GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXVI.

NUMĂRUL 1. — SEPTEMVRIE 1930.

SUMARUL

1. Lista Membrilor Societăţii „Gazeta Matematică".
2. Membrii decedaţi.
3. Premiile şi alte dispoziţiuni ale fondurilor „Gazetei Matematice".
4. Premiul „Inginer H. Capriel".
5. Sur un cercle associé au triangle . . . . . *V. Thébault.*
6. Note matematice: 1 — 5.
7. Bibliografie.
8. Cereri: 194 — 195.
9. Probleme rezolvate: 3537, 3598, 3604, 3891, 3917, 3918.
10. Exerciţii: 1 — 10.
11. Probleme propuse: 3931 — 3940.

BIBLIOTECA CENTRALĂ a „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

REGIA M. O., IMPRIMERIA NAŢIONALĂ

1930

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXXVI se compune din D-nii: Locot.-Colonel **Gh. I. Liteanu** dela Marele Stat Major al Armatei; **G. A. Nichifor,** Doctor în Matematici Conferenţiar la Universitatea din Bucureşti; **Al. D. Bunescu,** Inginer, Directorul General al Regiei Publice Comerciale «Monitorul Oficial şi Imprimeriile Statului», Cassier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui GH. ILIESCU, Inginer, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela „*Gazeta Matematică*" („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 914, 1000, 08, 56, 58, 92, 146, 62, 78, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 310, 33, 55, 64, 67. 84, 86, 99, 412, 50, 82, 553, 87, 637, 50, 79, 711, 29, 33, 53, 64, 807, 76, 906, 14. 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70. 74, 111, 70, 233, 338, 53, 82, 92, 405, 08, 14, 22, 30, 39, 56, 66, 77, 502, 03, 29, 45, 56, 77, 80, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 58, 65, 84, 92, 95, 709, 13, 17, 35, 58, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 56, 3005, 45, 69, 81, 127, 50, 61, 59, 208, 30, 55, 60, 75, 98, 300, 04, 07, 08, 09, 10, 16, 18, 20, 50, 61, 79, 405, 24, 25, 72, 89, 91, 95 509, 22, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 20, 22, 27, 32, 46, 47, 57, 65, 79, 81, 94, 99, 700, 03, 20, 22, 33, 36, 80, 84, 93, 97, 99, 804, 08, 10, 29, 35, 36, 44, 45, 48, 50, 53, 63, 64, 70, 80, 84, 96, 98, 907, 08, 09, 12, 13, 14, 15, 16, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I—XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procură dela „*Gazeta Matematică*" („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

GAZETA MATEMATICA

BIBLIOTECA CENTRALĂ
a „ASOCIAȚIUNII"
SIBIIU

GAZETA MATEMATICA

FOAE LUNARA

DE

MATEMATICI ELEMENTARE ŞI SPECIALE

PENTRU UZUL

ŞCOALELOR SECUNDARE, SPECIALE ŞI SUPERIOARE

VOLUMUL XXXVI

15 SEPTEMBRIE 1930 — 15 AUGUST 1931

BUCUREŞTI

REGIA M. O., IMPRIMERIA NAŢIONALĂ

1930

GAZETA MATEMATICĂ

FOAIE LUNARĂ

DE

MATEMATICĂ ELEMENTARĂ ŞI SPECIALĂ

PENTRU UZUL

ŞCOALELOR SECUNDARE, SPECIALE ŞI SUPERIOARE

VOLUMUL XXXVI

1930 — 1931

LISTA MEMBRILOR
SOCIETAŢII „GAZETA MATEMATICA“

DELEGAŢIUNEA PENTRU ANUL XXXVI*)

Lt.-Colonel GH. LITEANU, G. A. NICHIFOR şi AL. D. BUNESCU (Cassier)

PERSONALUL REDACŢIUNII

I. Ionescu. Membru delegat pentru schimburi de reviste, primirea lor, cereri, recreaţiuni, diverse şi reclamaţiuni privitoare la tipărire.

G. Ţiţeica. Raportor.

Gh. Iliescu. Membru delegat pentru convocările lunare, pentru primirea şi repartizarea manuscriselor destinate *Gazetei Matematice*.

Gh. A. Ioachimescu, Gh. Iliescu, C. Nicolau şi A. Sălăgeanu. Membri delegaţi pentru corecturi şi imprimarea revistei.

I. Ionescu şi C. H. Nicolau. Membri delegaţi pentru aritmetică elementară.

E. Abason, D. Barbilian şi O. Ţino. Membri delegaţi pentru geometrie elementară.

I. S. Antoniu, Lt.-Col. G. Liteanu şi O. Ţino. Membri delegaţi pentru trigonometrie.

Rod. Racliş, O. Ţino şi Th. Angheluţă. Membri delegaţi pentru algebră elementară.

G. A. Nichifor. Membru delegat pentru geometria descriptivă.

Cr. Mateescu şi E. Abason. Membri delegaţi pentru mecanica elementară.

Col. Gh. Buicliu, D. Barbilian şi Al. Pantazi. Membri delegaţi pentru geometria analitică.

G. A. Nichifor, C. Orăşanu şi Lt.-Col. Gh. Liteanu. Membri delegaţi pentru cosmografie.

Ş. Gheorghiu, Cl. Mititelu şi Al. Pantazi. Membri delegaţi pentru geometria triunghiului.

A. Angelescu. Membru delegat pentru probleme şi note de matematici superioare.

Th. Angheluţă, Gh. Bratu şi P. Georgescu. Membri delegaţi pentru probleme propuse de matematici superioare.

E. Abason şi O. Ţino. Membri delegaţi pentru clasarea problemelor propuse.

I. S. Antoniu. Membru delegat pentru exerciţii.

N. Rod. Racliş, E. Abason şi Lt.-Col. Gh. Liteanu. Membri delegaţi pentru chestiuni de examen.

C. H. Nicolau şi A. Brener. Membri delegaţi pentru alcătuirea tablei de materii.

E. Abason, M. Sarian şi O. Ţino. Membri delegaţi pentru cercetarea prealabilă a problemelor redijate.

E. Abason, D. Barbilian, A. Brener, Col. Gh. Buicliu, G. I. Dumitrescu, M. Ghermănescu, Căpitan I. Linteş, Lt.-Col. Gh. Liteanu, T. Mareş, Cr. Mateescu, O. Orănescu, Al. Pantazi, O. Ţino, I. S. Antoniu, Maior Gh. Cassian, Rod. Racliş şi C. H. Nicolau. Membri delegaţi pentru cercetarea şi redactarea problemelor rezolvate.

---

*) Societatea este administrată şi reprezentată de o delegaţie alcătuită din doi membri şi un casier. (Art. 13 din statute).

MEMBRII

1	1922, Mart. 1*	ABASON ERNEST. Inginer-Şef.—Diplomat al Şcoalei de Poduri şi Şosele din Bucureşti. — Doctor în Matematici. — Conferenţiar şi Subdirector la Şcoala Politechnică din Bucureşti. — Str. Justinian, 20. Bucureşti 3.
2	1907, Iulie 1	ABRAMESCU N. Doctor în Matematici. — Profesor la Universitatea din Cluj.
3	1913, Oct. 7	ALAGI V. Doctor în Matematici. — Profesor la Şcoala Politechnică din Timişoara şi Şcoala Militară de Artilerie. — Str. General Foch, 27. Timişoara.
4	1919, Sept. 12	ANGELESCU A. Doctor în Matematici. — Profesor Universitar. — Str. Frumoasă, 12. Bucureşti 2.
5	1922, Noem. 4	ANGHELUŢĂ TH. Doctor în Matematici. — Profesor la Universitatea din Cluj. — Str. Iuliu Maniu, 2. Cluj.
6	1928, Aug. 29	ANTONIU S. ION. Inginer Diplomat al Şcoalei Politechnice din Bucureşti. Inginer Diplomat al Şcoalei Superioare de Electricitate din Paris. — Inginer la Societatea Generală de Gaz şi Electricitate. — Calea Griviţei 23. Bucureşti 2.
7	1921, Febr. 5	AVRAMESCU C. Inginer. — Str. Porumbaru, 56. Bucureşti.
8	1929, Aug. 28	BĂDESCU A. LUCA. Inginer. — Inginer la Societatea Comunală a Tramvaielor Bucureşti. Asistent la Şcoala Politechnică din Bucureşti. — Str. Olari, 15. Bucureşti 4.
9	1924, Aug. 29	BAIDAFF IG. BERNARDO. Doctor în Matematici. — Buenos-Aires. Belgrano. Republica Argentina.
10	1911, Febr. 20	BANCIU I. Licenţiat în Matematici. — Directorul General al Contabilităţii Generale a Statului şi a Finanţelor Publice. — Str. Lucaci, 95. Bucureşti.
11	1927, Mai 11	BARBILIAN DAN. Doctor în Matematici. — Asistent Universitar. — Str. Carol Davila, 60. Bucureşti.
12	1912, Aug. 28	BELEŞ I. Inginer-Şef. — Director de Serviciu C. F. R. — Str. Regală, 12. Bucureşti 1.
13	1920, Ian. 10	BORNEANU GEORGE Inginer. — Directorul Societăţii „Uzinele Chimice Române". — Str. Basarabia, 45. Bucureşti 2.
14	1920, Ian. 10	BRATU GH. Doctor în Matematici dela Facultatea de Ştiinţe din Paris. — Profesor de Astronomie şi de Calcul diferenţial şi integral la Facultatea de Ştiinţe din Cluj. Directorul Observatorului Astronomic din Cluj. — Str. Brătianu, 29. Cluj.
15	1926, Iunie 28	BRENER M. AVRAM. Inginer. — Inginer la Cassa Autonomă a Monopolurilor — Piaţa Lahovary, 1 A. Bucureşti 3.
16	1910, Iunie 21	BRUCKNER VICTOR Inginer Inspector General. — Directorul Serviciului Podurilor C. F. R. — Str. Ing. Pandele Ţăruşanu, 7. Bucureşti 2.

*) Data admiterii.

17	1920, Aug. 15	Budeanu I. C. Inginer. — Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti. — Parcul Bonaparte. Str. B., 32. Bucureşti 3.
18	1910, Apr. 3	Buicliu Gh. Colonel de Artilerie. — Comandantul Regimentului 38 Obuziere. — Timişoara.
19	1930, Aug. 31	Bungescu Ion. Ofiţer de Artilerie; absolvent al Şcoalei de Art. A. A. din Franţa (Metz).—Căpitan în Regt. 1 Art. A. A. Profesor la Şcoalele Militare de Aeronautică.—Str. Elina Matei Voevod, 7. Bucureşti 4.
20	1928, Mai 9	Bujoreanu N. Inginer-Şef. — Inspector principal C. F. R. — Str. Justinian, 17. Bucureşti 3.
21	1924, Ian. 30	Bunescu D. Al. Inginer. — Directorul General al Regiei Publice Comerciale „Monitorul Oficial şi Imprimeriile Statului".—Str. Fabrica de Chibrituri, 22. Telefon 300/79. Bucureşti 6.
22	1920, Ian. 10	Buradescu Traian Inginer Şef C. F. R. Inspector principal technic. Conducătorul Inspecţiei a 7-a Exploatare Cluj.—Str. Berthellot, 10. Cluj.
23	1910, Oct. 25	Bușilă D. C. Inginer. — Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti. — Str. Matei Milo, 2. Telefon 301/45. Bucureşti.
24	1930, Aug. 31	Bușilă Adrian. Inginer. — Inginer Constructor la Societatea Electrica. — Str. Aurel Vlaicu, 51. Bucureşti 1.
25	1921, Mai 4	Bușilă I. Inginer. — Inginer în Ministerul Lucrărilor Publice. — Str. Esculap, 6 bis. Bucureşti. 2.
26	1914, Iulie 12	Cambureanu V. Inginer.—Director central C. F. R.— Subdirectorul Casei Muncii C. F. R. — Str. Vasile Lupu, 24. Bucureşti 2.
27	1926, Iun. 28	Cambureanu V. D. Inginer. — Inginer la Casa Autonomă a Drumurilor de Stat. — Str. Cobălcescu, 31. Bucureşti.
28	1910, Aug. 3	Capriel Dicran. Inginer. — Antreprenor de Lucrări Publice. — Str. Democraţiei, 37. Galaţi.
29	1922, Noem. 4	Capriel I. Inginer-Şef. Inginer diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti. — Administrator-Delegat al Societăţii „România Carboniferă", al Societăţii „Construcţiunea". — Str. Visarion, 5. Bucureşti 3.
30	1920, Mart. 1	Caraman E. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „V. Alexandri" din Galaţi. — Str. Lascar Catargi, 40. Galaţi.
31	1928, Aug. 29	Cassian Gh. Maior. — Director de studii la Şcolile pregătitoare şi speciale ale Aeronauticei. — Calea Griviţei, 81. Bucureşti.
32	1920, Ian. 10	Cazacu N. C. Inginer. — Inspecţia Mişcării. 13 C. F. R. — Str. Averescu, Buzău.
33	1914, Dec. 20	Chiricuţă A. Inginer Inspector General. — Bulevardul Elisabeta, 89. Bucureşti 2.
34	1920, Mart. 1	Chiţulescu I. Ioan. Inginer. — Direcţia Specială a Atelierelor C. F. R. Asistent la Şcoala Politechnică din Bucureşti. — Str. Pantelimon, 34. Bucureşti 4.
35	1921, Febr. 5	Cioc M. Inginer. — Sub-director General al Societăţii „Uzinele Metalurgice din Copşa Mică şi Cugir" — Str. Gr. Cantacuzino, 14. Bucureşti 1.
36	1930, Aug. 31	Ciorănescu Nicolae. — Doctor în Matematici. — Licenţiat în Fizico-Chimice. — Conferenţiar la Şcoala Politechnică din Bucureşti.—Str. Pomul Verde, 14. Bucureşti 2.

37	1895, Sep. 15* (fondator)	CONSTANTINESCU TANCRED. Inginer Inspector General. — Senator. Fost Ministru. — Aleea Vulpache, 7 (Parcul Filipescu). Bucureşti 3.
38	1910, Apr. 3	COSTINESCU DAN. Inginer. — Director General al Fabricii de Hârtie „Letea". — Fabrica Letea. Bacău.
39	1922, Noem. 1	DUMITRESCU I. GH. Licenţiat în Matematici. — Profesor. — Şos. Ştefan cel Mare, 170. Bucureşti 3.
40	1922, Mart. 1	DUMITRESCU ARG. D. Inginer. — Şeful Secţiei L 3 C. F. R.—Str. N. Bălcescu, 34. Craiova.
41	1918, Ian. 28	FELIX CORNELIU. Colonel în rezervă. — Str. G. D. Palade, 72. Bucureşti 3.
42	1909, Iulie 1	FILIPESCU EM. GH. Inginer. — Director General al Societăţii Comunale a Tramvaielor Bucureşti. Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti. — Str. Vasile Lascăr, 216. Bucureşti 3.
43	1929, Ian. 31	FOCŞENEANU I. MIHAIL. Locotenent de Artilerie. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Şcoala Militară a Artileriei. — Şcoala militară a Artileriei. Timişoara.
44	1928, Mai 9	FUNDĂŢEANU C. ION. Inginer diplomat al Şcolii Politechnice federale Zürich. — Directorul Energiei din Ministerul Industriei şi Comerţului. Profesor la Şcoala de electricieni din Bucureşti. — B-dul Pache, 43. Bucureşti 4.
45	1921, Mai 4	GABRIELESCU RAMIRO. Inginer. — Str. Dionisie, 19. Bucureşti 1.
46	1914, Dec. 20	GÂLCĂ I. TOMA. Inginer-Şef. Secretarul general al Ministerului de Comunicaţii. — Str. Luigi Cazzavilan, 8. Bucureşti 2.
47	1906, Mart. 4	GEORGESCU I. N. Inginer Inspector General. — Directorul General al Serviciului de Indiguiri şi Desecări. — Str. G. D. Palade, 35. Bucureşti 3.
48	1921, Febr. 5	GEORGESCU N. N. Inginer.— B-dul. Elisabeta, 24. Bucureşti 1.
49	1927, Mai 11	GEORGESCU-ROEGEN N. Licenţiat în Matematici. Diplomat al Institutului de Statistică din Paris. — Profesor de Matematici la Liceul din Constanţa. — Str. Tudor Vladimirescu, 14. Constanţa.
50	1922, Aug. 31	GHERMĂNESCU N. MIHAIL. Licenţiat în Matematici. — Profesor de Analiză Matematică la Şcoala pregătitoare de Ofiţeri de Geniu. Profesor secundar în Bucureşti.—Str. Popa Nan, 79. Bucureşti 4.
51	1929, Aug. 28	GHEORGHIU A. ŞERBAN. Doctor în ştiinţele Matematice. Statistician. — Str. Nerva Traian, 116, Bucureşti.
52	1913, Aug. 30	GHEORGHIU A. MIRCEA. Inginer-Şef. — Direcţiunea Generală a Porturilor. — Serviciul Porţilor de Fer.—Serv. Hidraulic. Orşova.
53	1913, Aug. 30	GHEORGHIU S. I. Inginer-Şef. Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti. — Str. Lahovary, 3. Bucureşti 3.
54	1921, Mai 4	GHIMUŞ A. D. Căpitan. — Comandantul Şcoalei şi Centrului de instrucţie al Geniului.—Profesor la Şcoalele Militare de Geniu şi la Şcoalele Aeronauticei. — Str. Vasile Lupu, 18. Bucureşti.

*) Data fondării revistei *„Gazeta Matematică"*. Societatea Gazeta Matematică a fost constituită la 1 Septemvrie 1909.

55	1910, Iunie 2	Grigorescu C. Inginer. — Antreprenor de Lucrări Publice. — Str. Plantelor, 40. Bucureşti 4.
56	1920, Ian. 10	Gutzu Victor. Inginer.—Directorul Manufacturei de Tutun.—Iaşi.
57	1927, Ian. 28	Hanganu D. M. Inginer diplomat al Şcoalei Politechnice din Bucureşti şi al Şcoalei superioare de Electricitate din Paris.— Inginer la Soc. „Edilitatea". — Str. Brezoianu, 44. Bucureşti.
58	1924, Ian. 30	Ianculescu Romulus. Inginer.—Licenţiat în Matematici. Inspector de Exploatare C. F. R. — Bacău.
59	1922, Mai 10	Iliescu Gh. Inginer. — Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret.— Fabrica de Chibrituri-Filaret. Bucureşti 6.
60	1928, Aug. 29	Iliescu Traian. Locot.-Colonel de artilerie. — Direcţia XI Tehnică Superioară. — Str. Uranus, 98. Bucureşti 6.
61	1895, Sept. 15 (fondator)	Ioachimescu Gh. Andrei. Inginer-Şef. Licenţiat în Matematici.— Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti. — Str. Buzeşti, 76. Bucureşti 2.
62	1926, Iunie 28	Ioachimescu A. Gh. Inginer. — Director în Regia M. O.—Str. Buzeşti, 76. Bucureşti 2.
63	1920, Ian. 10	Ioanovici Aurel. Inginer.—Antreprenor.—Str. General Berthelot, 55. Bucureşti. 2.
64	1922, Noem. 1	Ionescu V. D. Doctor în Matematici. Fost elev al Şcoalei Normale Superioare din Paris. — Conferenţiar de Analiză la Facultatea de Ştiinţe din Cluj. — Str. Dorobanţilor, 7. Cluj.
65	1895, Sept. 15 (fondator)	Ionescu I. Inginer Inspector General. — Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti. Membru în Consiliul superior al avuţiilor şi întreprinderilor publice; în Consiliul permanent al Ministerului Instrucţiunii pentru partea industrială. Membru corespondent al Academiei Române. — Str. Căluşei, 23. Bucureşti 4.
66	1912, Iunie 2	Jijie Adam. Căpitan Comandor în rezerva marinei.—Licenţiat în Ştiinţe.—Inginer Electrician.—Concesionarul luminatului electric şi al alimentării cu apă din Sulina. — Sulina.
67	1924, Ian. 30	Kaufmann N. Inginer. — Şef de Secţie. Direcţiunea Economatului C. F. R. — Str. G-l Manu, 26. Bucureşti 2.
68	1919, Sept. 12	Lintes I. Căpitan. — Inginer diplomat al Şcoalei Superioare de Aeronautică din Franţa. Profesor la Şcoalele Militare şi Speciale de Aeronautică. — Str. Epicol, 49. Bucureşti 6.
69	1921, Mai 4	Liteanu I. Gh. Lt.-Colonel. — Marele Stat Major al Armatei. Profesor la Şcoalele Militare ale Aeronauticei şi la Cursul de Pregătire militară al Şcoalei Politechnice din Bucureşti. — Str. General Angelescu, 24. Bucureşti 2. Telefon 332/99.
70	1913, Aug. 30	Malcoci C. Inginer Inspector General. — Directorul General al Exploatării Monopolurilor. — Str. Fabrica de Chibrituri, 22. Bucureşti 6.
71	1926, Iunie 28	Manoilescu Mihail. Inginer. — Ministrul Comunicaţiilor şi al Lucrărilor Publice. — Str. Mussolini, 27. Bucureşti 3.

72	1921, Febr. 5	MAREŞ T. Inginer-Şef. — Şeful Serviciului de Poduri şi Şosele. Str. Transilvaniei, 36. Bucureşti.
73	1922, Mai 10	MATEESCU CR. Inginer.—Asistent la Şc. Politechnică.—Subdirector al Soc. „Electrica" Bucureşti.— Str. General Anghelescu, 179. Bucureşti.
74	1927, Mai 11	MEREUŢĂ V. Inginer. — Inspectoratul I C. F. R. — Gara Filaret. Bucureşti 6.
75	1929, Ian. 31	MIHĂILESCU P. TIBERIU. Licenţiat în Matematici.—Profesor la Liceul Militar „N. Filipescu" dela Mânăstirea Dealului Târgovişte. — Str. Dionisie Eclizerului, 15. Bucureşti 2.
76	1921, Febr. 5	MIHALOPOL C. Inginer-Şef. — Str. Profesori, 6 bis. Bucureşti. 5.
77	1925, Febr. 11	MIRCEA M. E. Inginer. — Inginer-Şef la Societatea „Concordia".— Buştenari. Jud. Prahova.
78	1909, Iunie 1	MIREA N. ŞT. Inginer-Şef. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Şcoala Superioară de Arhitectură. Conferenţiar la Universitate. — Str. Inundaţiei, 8. Bucureşti 6.
79	1929, Aug. 28	MITESCU CAMIL. Inginer. — Subdirector al Exploatării în Direcţia. Generală a Exploatării Monopolurilor. — Piaţa Lahovary, 1. Bucureşti.
80	1920, Ian. 10	MITITELU C. CLAUDIU. Inginer-Şef. — Licenţiat în Matematici. — Director de Serviciu în Adm. Centrală a Casei Autonome a Monopolurilor.—Asistent la Şcoala Politechnică din Bucureşti. Piaţa Lahovary 1 A. Bucureşti 3.
81	1920, Ian. 10	MITITELU C. I. Inginer. — Intreprinzător de Lucrări Publice. — B-dul Elisabeta, 60. Telefon 67/93. Bucureşti 2.
82	1922, Martie 1	NEGRETZU I. Inginer de mine.—Exploatări agricole (agricultor).— Str. Şerban-Vodă, 170. Piteşti.
83	1928, Aug. 29	NEGURĂ St. Licenţiat în Matematici. — Profesor la liceul „Codreanu" din Bârlad. — Str. Carol, Bârlad.
84	1910, Mai 20	NICHIFOR A. G. Doctor în Ştiinţele Matematice.— Docent Universitar. Profesor. Conferenţiar la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti. — Str. Dimitrie Racoviţă, 32. Bucureşti 4.
85	1929, Aug. 28	NICOLAU H. CONST. Inginer. — Director în Regia M. O. — Str. Fabrica de Chibrituri, 22. Bucureşti 6. Telefon 372/88.
86	1922, Noem. 4	NICOLAU TH. M. Inginer. — Direcţiunea de Poduri şi Şosele, Studii şi Construcţii. Ministerul Lucrărilor Publice. — Str. Lăzureanu, 31 bis. Bucureşti. 6.
87	1920, Oct. 28	NICULESCU CRISTEA. Inginer-Şef. — Director General al Societăţii Anonime industriale „Arad-Brad".—B-dul Carol, 57. Arad.
88	1923, Iulie 4	NICULESCU GHEORGHE. Căpitan. — Inginer. — Absolvent al Şcoalei Politechnice Timişoara şi al Şcalei Superioare de Aeronautică Paris.—Str. Isvor, 98. Bucureşti 6.
89	1929, Ian. 31	NICULESCU MIRON. Doctor în Matematici. — Conferenţiar Universitatea din Cernăuţi. — Str. Isvor, 98. Bucureşti 6.
90	1922, Martie 1	ONICESCU O. Doctor în Matematici. — Profesor la Universitatea din Bucureşti. Director al Şcoalei de Statistică. — Str. Rozelor, Bucureşti 9.

91	1927, Ian. 28	OPRESCU GH. Colonel. — Fundătura Oraţiu, 6 bis. Bucureşti 2.
92	1927, Ian. 28	ORĂNESCU O. Inginer.—Inginer mecanic la Navigaţiunea Fluvială Română, Galaţi. — Str. Grădina-Veche, 34. Galaţi.
93	1913, Oct. 7	ORĂŞANU D. CEZAR. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. Licenţiat in Matematici. Inginer-hotarnic şi Operator Topometru. — Conferenţiar la Şcoala Politechnică din Bucureşti. Profesor la Şcoalele Aeronautice. Antreprenor de Lucrări. — Strada Ştirbei Vodă, 45. Bucureşti 2.
94	1910, Mai 20	ORĂŞANU GR. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „Gh. Lazăr" din Bucureşti. — Str. Stănică Marin, 32. Ploeşti.
95	1927, Oct. 17	OTTULESCU EUG. Inginer. — Str. Alexandrina, 10. Bucureşti 2.
96	1914, Dec. 20	PANAITESCU SC. General de Divizie în retragere. Conferenţiar Universitar. — Membru corespondent al Academiei Române. Consilier la Banca Românească din Chişinău. — Str. Alexandru cel Bun, 79. Chişinău.
97	1929, Ian. 31	PANTAZI ALEXANDRU. Doctor în Matematici. — Actuar la Casa Centrală a Asigurărilor Sociale. — Str. Cristian Tell, 9 B. Tel. 219/37. Bucureşti 3.
98	1924, Ian. 30	PAŞCANU S. Inginer diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele (1919); Arhitect Naval diplomat Univ. din Glasgow (1921). B. Sc.; A. I. N. A. — Inginer Expert la Societatea Naţională de Credit Industrial. Asistent la Şcoala Politechnică din Bucureşti. — Calea Dorobanţilor, Aleea A, 8. Loco. 3.
99	1911, Dec. 17	PATRICIU G. TITUS. Licenţiat în Matematici. — Profesor. Directorul Liceului „M. Kogălniceanu" din Iaşi. Fost Director General al Învăţământului Primar şi Normal în Ministerul Instrucţiunii. — Str. Rosetti, 8. Iaşi.
100	1920, Oct. 28	PHILIPIDE M. Inginer. — Directorul General al Societăţii Anonime Române de Navigaţie pe Dunăre S. R. D. — Str. Radu Vodă, 25. Bucureşti 5.
101	1911, Aug. 11	POPESCU GH. Inginer Inspector General. — Director General al Societăţii Naţionale de Credit Industrial. Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti. — Str. General Praporgescu, 27. Bucureşti 1.
102	1922, Aug. 31	POPESCU ION. Inginer. — Director la Soc. Comunală a Tramvaielor Bucureşti. Asistent la Şcoala Politechnică din Bucureşti. — Str. Popa Savu, 12 A. Bucureşti 2.
103	1927, Mai 11	POPP TRAIAN. Licenţiat în Matematici. Profesor la Seminarul pedagogic universitar şi la Liceul Sf. Sava. — Parcul Delavrancea, Aleea D, 2. Bucureşti 2.
104	1928, Mai 9	POPOVICIU TIBERIU. Licenţiat în Matematici. — Elev al Şcoalei Normale Superioare din Paris.—Str. Niculae Filipescu, 25. Arad.
105	1929, Ian. 31	PORTOCALĂ MIHAI. Inginer. — Bul. Domniţei, 15. Bucureşti 1.
106	1930, Aug. 31	POTOPEANU GHEORGHE. Lt.-Colonel din Marele Stat Major al Armatei.—Bulevardul Elisabeta, 97. Et. II. Bucureşti. 2.

107	1925, Febr. 11	PROTOPOPESCU GRIGORE. Colonel din Artilerie. — Comandantul Regimentului 2 Artilerie „General de Divizie Gheorghe Manu.— Str. 11 Februarie, 12. Bucureşti 1.
108	1927, Mai 11	RACLIŞ RODOLPHE Doctor în Ştiinţele Matematice dela Facultatea de Ştiinţe din Paris. Licenţiat în Ştiinţele Fizice dela Facultatea de Ştiinţe din Paris. Inginer Diplomat de l'Ecole Supérieure d'Electricité din Paris. — Directorul „Revistei Universitare Matematice". — Aleea Vulpache, 21. Bucureşti 3.
109	1910, Aug. 3	RADU E. M. Inginer Inspector General. — Director în Direcţia de Poduri şi Şosele, Studii şi Construcţii. Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti. — Str. Armenească, 24. Bucureşti 1.
110	1920, Aug. 15	REVICI TEOFIL. Inginer. — Şef de Secţie în Direcţia de Poduri C. F. R. — Str. D. Racoviţă, 14. Bucureşti 4.
111	1895, Sept. 15 (fondator)	ROCO M. Inginer Inspector General. — Str. Paris, 7 (Parcul Filipescu). Bucureşti.
112	1914, Dec. 20	ROŞU V. Inginer Inspector General. — Directorul Serviciului Hidraulic. — Str. Francmazonă, 114. Bucureşti.
113	1929, Aug. 28	SĂLĂGEANU AUREL. Inginer.—Inginer în Regia M. O.—Str. Fabrica de Chibrituri, 22. Bucureşti 6. Telefon 372/88.
114	1904, Sept. 1	SALIGNY M. Inginer Inspector General. — Subdirectorul Serviciului Hidraulic. Profesor la Şcoala de Conductori de Lucrări Publice din Bucureşti.—Str. G. Gr. Cantacuzino, 50. Bucureşti 2.
115	1920. Ian. 10	SĂPUNARU S. GH. Inginer de Poduri şi Şosele. — Director General al Societăţii „Clădirea Românească".—Str. Pia Brătianu, 5. (Parcul Ioanid). Bucureşti 3.
116	1929, Aug. 28	SARIAN MIHAI. Inginer. — Inginer la Atelierele de locomotive Griviţa. Asistent la Şcoala Potitechnică din Bucureşti.—Parcul Domeniilor. Str. D. Lotul 204. Bucureşti.
117	1920, Aug. 15	ŞERBĂNESCU GH. VICTOR. Inginer.—Antreprenor de construcţii. — Str. Sf. Constantin, 24. Bucureşti.
118	1928, Aug. 29	SERGESCU BARBU. Inginer de mine. Licenţiat în Matematici. — Inginer Şef la Societatea „Steaua Română". — Moineşti, Jud. Bacău.
119	1919, Sept. 12	SERGESCU P. Doctor în Matematici. Licenţiat în Filosofie. — Profesor Universitar. — Str. Berde, 3. Cluj.
120	1921, Febr. 5	SFINŢESCU C. Inginer diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti.—Profesor la Şcoala Superioară de Architectură şi la Şcoala Superioară de Ştiinţe de Stat. Director General al Casei Lucrărilor Municipiului Bucureşti. — Str. Barbu Delavrancea, 43. Etaj. Bucureşti 2.
121	1910, Aug. 3	SMÂNTÂNESCU AUREL. Inginer-Şef. — Director P. şi S. Direcţiunea II-a de Poduri şi Şosele. — Str. Sf. Ştefan, 5. Bucureşti 4.
122	1923, Iulie 4	STAMATESCU I. Profesor la Liceul Matei Basarab şi Seminarul Pedagogic Universitar. — Str. Toamnei, 47, Bucureşti 3.
123	1920, Ian. 10	STAN D. Inginer. — Asistent la Şcoala Politecnică din Bucureşti. Inginer la Soc. „Edilitatea".—Aleea Mântuleasa, 1. Bucureşti 4.

124	1927, Mai 11	TĂNĂSESCU A. Colonel. — Str. Frumoasă, 54. Bucureşti 2.
125	1928, Mai 9	TĂNĂSESCU A. TUDOR. Inginer. Licenţiat în Matematici. — Conferenţiar la Şcoala Politechnică din Bucureşti. — Str. Salvator, 37. Bucureşti 6.
126	1900, Noem. 1	TEODOREANU V. Profesor la Liceul Naţional şi Liceul Militar din Iaşi. — Str. Elena Domna, 39. Iaşi.
127	1911, Mai 18	TEODORESCU N. N. Inginer Inspector General.—Str. Aurel Vlaicu, 22. Bucureşti 3.
128	1929, Aug. 28	TEODORU D. RADU. Inginer-Şef. — Director la Direcţia Generală a exploatării monopolurilor. — Piaţa Lahovary, 1. Bucureşti 3.
129	1910, Mai 20	THIERRIN H. G. Licenţiat în Matematici. — Directorul Institutului „Schewitz-Thierrin". — Str. Scaune, 33. Bucureşti 1.
130	1921, Aug. 31	ŢINO O. Doctor în Matematici. — Profesor la Seminarul Pedagogic din Bucureşti. — Str. Ismail, 16. Bucureşti 4.
131	1929, Oct. 30	ŢIŢEICA GABRIELA. Licenţiată în Matematici, Inginer. — Asistentă la Facultatea de Ştiinţe. — Str. Dionisie, 80. Bucureşti.
132	1895, Noem. 1	ŢIŢEICA GH. Doctor în Ştiinţele Matematice. — Secretar general al Academiei Române. Profesor la Facultatea de Ştiinţe şi la Şcoala Politecnică din Bucureşti. Profesor agreat la Sorbona.— Str. Dionisie, 80. Bucureşti, 3.
133	1919, Sept. 12	ULESCU AL. Inginer. — Director la Fabrica I. A. R. — Str. General Dona, 11. Bucureşti 2.
134	1914, Dec. 10	VARDALA I. Inginer Inspector General.—Director General al Regiei autonome a Porturilor.—B-dul Brătianu, 72. Bucureşti 4.
135	1927, Mai 11	VASILACHE I. Inginer-Şef. — Profesor şi Subdirector al Şcoalei Superioare de Arte şi Meserii din Bucureşti. — Str. Polizu, 11. Bucureşti 2.
136	1927, Mai 11	VASILESCU FL. Doctor în Matematici.—Str. Eroului, 19. Bucureşti
137	1923, Mart. 26	VASILESCU GR. Inginer. — Str. Costache Negri, 21. Bucureşti 6.
138	1920, Ian. 10	VASILESCU C. I. Inginer-Şef — Str. Grigore Alexandrescu, 21. Bucureşti 3.
139	1925, Aug. 26	VASILIU M. Inginer. — Asistent la Şcoala Politechnică din Bucureşti. Director în Ministerul Industriei şi Comerţului. — Str. Vaselor, 70. Bucureşti 4.
140	1924, Ian. 30	ZAMFIRESCU GRIGORE. Inginer. Diplomat S. N. P. S. Bucureşti 1921 şi E. S. A. Paris 1922. — Coasociat şi Director al Societăţii pentru Exploatări Technice. — Parcul Ferdinand Str. B. 5. Bucureşti 4.
141	1920, Sept. 28	ZAPAN GH. Avocat. Profesor şi Avocat. — Berlin-Charlottenburg. Dernburgstr 26.
142	1921. Mai 4	ZAPAN GRIGORE. Căpitan. Inginer de construcţii Aeronautice şi Mecanice. Inginer hotarnic. Inginer la Arsenalul Aeronauticei· Profesor de Matematici. — Légation de Roumanie. — 17, rue Brémontier, Paris (17-e).
143	1925, Aug. 26	ZLATCU ST. C. Inginer-mecanic dela Şcoala Politechnică din Zürich. — Antreprenor—Str. Pasteur, 8. Tel. 336/54. Bucureşti 6.

†

MEMBRII DECEDAȚI *)

		Data admiterii	Data morții
1.	Alexandrescu T. I.	1928 Mai 9	1930 Sept. 5
2.	Alexandrini O.	1895 Noemb. 15	1905 Sept. 6.
3.	Balaban V.	1895 Sept. 15 (fondator)	1895 Sept. 22.
4.	Cristescu V.	1895 Sept. 15 (fondator)	1929 Martie 10.
5.	Davidescu Em.	1895 Sept. 15 (fondator)	1905 Aug. 28.
6.	Dordea Tr.	1928 Ian. 26	1930 Aprilie 30.
7.	Erbiceanu C.	1898 Sept. 15	1904 Apr. 3.
8.	Evolceanu V.	1927 Ian. 28	1928 Oct. 19.
9.	Lalescu Tr.	1905 Mart. 1	1929 Iunie 15.
10.	Moțoi I.	1906 Apr. 1	1929 Ianuarie 16.
11.	Năsturaș D.	1909 Noemb. 9	1930.
12.	Nicolaevici G.	1909 Iunie 1	1917.
13.	Nicolescu N.	1895 Sept. 15 (fondator)	1924 Mai 5.
14.	Roșu Al.	1910 Iunie 21	1917 Apr. 17.
15.	Saligny A.	1914 Dec. 9	1925 Iunie 17.
16.	Teodor D. I.	1906 Apr. 1	1924 Iulie 30.
17.	Teodorescu I. S.	1914 Iunie 12	1918 Dec. 22.
18.	Zottu I. G.	1895 Sept. 15 (fondator)	1902 Iulie 8.

PREMIILE ȘI ALTE DISPOZIȚIUNI ALE FONDURILOR „GAZETEI MATEMATICE“

PENTRU

CURSUL ANULUI 1930 — 1931

(1 Septemvrie 1930 — 31 August 1931)

In conformitate cu dispozițiunile art. 11 din Regulamentul General al fondurilor „Gazetei Matematice“, subsemnații membrii ai Comisiunii pentru controlarea gestiunei acestor fonduri și pentru privigherea la îndeplinirea prevederilor regulamentare ale fiecărui fond, desemnați în adunarea generală care a avut loc în ziua de 28 August 1929, aducem la cunoștință următoarele:

1. Din venitul anual al fondului Spiru C. Haret, conform regulamentului pentru administrarea lui, publicat în „Gazeta Mate-

*) Aci sunt trecuți numai redactorii și membrii, cari au stat la *„Gazeta Matematică“* până la sfârșitul vieții lor, în ordine alfabetică.

matică" Vol. XXVI pag. 108, urmează să se cumpere cărți de matematici pure și aplicate (literatură matematică, istoria matematicilor, varietăți și curiozități matematice, aparate și modele matematice, etc.) care să se doneze bibliotecilor școlare dela școli secundare sau corespondenților merituoși, elevi ai acestor școli. Cărțile se vor distribui între începutul anului școlar și vacanța Crăciunului.

In baza hotărîrei luate de adunarea generală dela 31 August 1930, cărțile de felul celor enumerate mai sus, cumpărate din venitul anului expirat, s'au destinat să se doneze Liceului din Năsăud.

2. Din venitul fondului Lt.-Col. G. Tănăsescu, al cărui regulament a fost publicat în „Gazeta Matematică", Vol. XXVIII, pag. 19, urmează să se dea cărți de matematică, primului clasificat la concursurile anuale ale „Gazetei Matematice".

3. Premiul bienal Inginer H. Capriel în valoare de 500 lei pentru lucrări de matematici superioare sau pure aplicate se acordă lucrărilor ce se vor presenta societății de către: studenții Universităților, elevii Școalei de Poduri și Șosele sau de către elevii Școalelor de Artilerie, Geniu și Marină din țară.

Regulamentul acestui premiu a fost publicat în „Gazeta Matematică" anul XVII, pag. 361.

Subiectul lucrărei pentru premiul pe anul 1932 se va anunța în «Gazeta Matematică» anul XXXVI, numărul 9 (pe luna Mai).

Lucrările trebuesc trimise Societății cel mai târziu până la 1 Mai 1932, iar rezultatul se va publica în numărul din Septembrie 1932 al «Gazetei Matematice».

Premiul este indivizibil și în cazul când nu se va găsi nici o lucrare meritorie, se va ține un nou concurs.

4. Premiul Vasile Conta în valoare de 200 lei, alimentat din fondurile „Gazetei Matematice" se acordă exclusiv pentru lucrări de filosofie matematică.

Regulamentul acestui premiu s'a publicat în «Gazeta Matematică» anul XXIX pag. 14.

Autorul trebue să fie român și să-și fi făcut studiile secundare în țară.

Lucrările trebuesc prezentate până la 1 Iulie ale fiecărui an, și în cazul când până la această dată nu s'a primit nici o lucrare, se va aștepta data de 1 Iulie anul următor și așa mai departe.

Comisiunea care va examina lucrările prezentate după 1, 2, 3,

etc., ani va propune pentru premiere una sau două lucrări dintre cele mai bune, cu totalul sumelor strânse an cu an până la acea dată, sumă care dacă intervalul e mai mare de un an, se va puteà divide între lucrările alese. Comisiunea însă va putea să nu recomande nici una din lucrările presentate.

Raportul Comisiunei însărcinate cu cercetarea lucrărilor se va supune desbaterilor generale extraordinare în cursul lunei Octombrie, iar rezultatul se va publica în numărul din Noembrie al «Gazetei Matemalice».

5. Premiul pentru lucrări de matematică aplicată la ştiinţele militare în valoare de 200 lei, se acordă pentru cea mai bună publicaţiune de matematică aplicată la ştiinţele militare apărută în cursul fiecărui an.

Regulamentul acestui premiu a fost publicat în «Gazeta Matematică anul XXIII pag. 9.

Autorul publicaţiunei trebue să fie român sau să-şi fi făcut cultura matematică în ţară.

Premiul este indivizibil şi se acordă neapărat în fiecare an. In cazul cand nu se găseşte nici o lucrare de premiat sau în cazul când autorul lucrărei premiate nu voeşte a primi suma de 200 lei, ea se va da uneia din revistele în care se publică şi chestiuni de ştiinţă matematică aplicate la ştiinţele militare.

Comisiunea însărcinată cu examinarea publicaţiunilor militare, apărute prin reviste sau cărţi speciale, până la 1 Septembrie anul trecut, precum şi manuscrisele ce s'ar aduce la cunoştinţa societăţi. până la acea dată, va întocmì un raport ce se va supune desbaterilor Adunărei Generale extraordinare în cursul lunei Ianuarie.

Premiul se va anunţa în numărul ce apare în luna Martie şi se va acorda lucrărei premiate după apariţia numărului.

6. Din fondul «Anghel Saligny», destinat tipărirei bibliotecei technice a «Gazetei Matematice» nu se va tipări nimic, suma fiind angajată în publicaţiunile ce au apărut din acest fond.

7. Din fondurile bibliotecei «Gazetei Matematice» s'a publicat «Culegerea de probleme de geometrie de G. Ţiţeica».

Comisiunea pentru premii:

Ioan Buşilă,

G. Ioachimescu.

PREMIUL „INGINER H. CAPRIEL“

La pag. 361 a volumului XVII al «Gazetei Matematice» s'a publicat regulamentul premiului bienal «H. CAPRIEL». In conformitate cu prevederile acestui regulament urma să se publice în numărul de față, rezultatul premiului pe anul 1930

Deoarece nu s'a primit nici o lucrare pânăla 1 Mai 1930, adunarea generală anuală dela 31 August a. c., a hotărît schimbarea subiectului lucrării, care se va anunța în «Gazeta Matematică» anul XXXVI, numărul 9 (pe luna Mai).

Lucrările se vor trimite pe adresa D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei No. 23, București, pânăla 1 Mai 1932.

DELEGAȚIA SOCIETĂȚEI.

SUR UN CERCLE ASSOCIÉ AU TRIANGLE

M. A. ANGELESCU vient de signaler, en la question 3185, un cercle associé au triangle qui mérite l'attention et au sujet duquel nous nous proposons de donner d'autres propriétés.

1. *Soient* H_a, H_b, H_c *les milieux des hauteurs* AD, BE, CF, *d'un triangle* ABC *ou les points de rencontre des hauteurs et des côtés du triangle complémentaire* A'B'C', B_a *et* C_a, C_b *et* A_b, A_c *et* B_c *les points où les droites* $H_b H_c$, $H_c H_a$, $H_a H_b$, *coupent les côtés* AB *et* AC, BC *et* BA, CA *et* CB; O_a, O_b, O_c *les centres des cercles* $AB_a C_a$, $BC_b A_b$, $CA_c B_c$. *Les six points* H_a, H_b, H_c, O_a, O_b, O_c *sont sur un même cercle* [1]).

M. AD. MINEUR donne de cette proposition la solutions fort élégante que voici [2]).

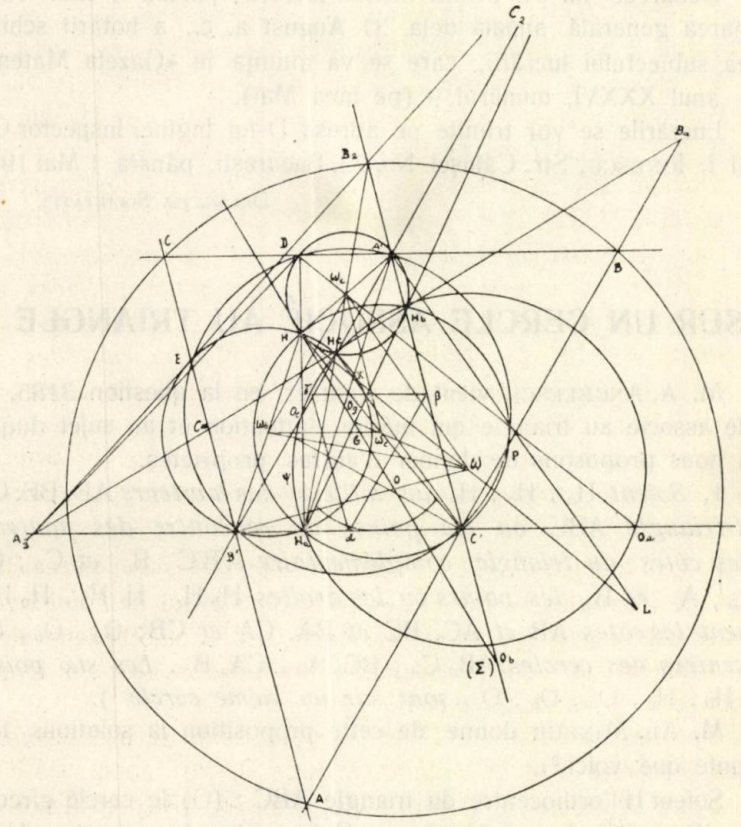
Soient H l'orthocentre du triangle ABC ; (O) le cercle circonscrit ; (O_9) celui des neuf points ; G le centre de gravité ; A_0 le point (BC, EF) ; A_1, A_2 les milieux de AH et AA_0 ; α, β, γ ceux de B'C', C'A', A'B'.

Les points H_b, H_c, A_2 sont les milieux des diagonales BE, CF, AA_0 d'un quadrilatère complet ; la droite $H_b H_c \equiv B_a C_a$ passe

1) *Gazeta Matematica*, 1930 — 424.

2) *Mathesis*, 1930 — 256.

en A_2. La droite A'H est parallèle à la droite OA_1 des centres des cercles ABC, AEF et est donc perpendiculaire à l'axe radical AA_0 de ces deux cercles. On en déduit, á l'aide du cercle $A'H_b\,HH_c$, de diamètre A'H, que ce cercle est tangent en D à la droite A_2D, que les droites $A_1\,A$, $B_a\,C_a$, sont antiparallèles par rapport aux droites AB, AC et qu'ainsi la circonférence $A\,B_a\,C_a$ est tangente



en A à la droite $A_2\,A$. Or la droite AH étant la polaire du point A_2 pour l'angle BAC est aussi la polaire de ce point pour le cercle $AB_a\,C_a$ dont le centre est donc le point de rencontre de B'C' avec la perpendiculaire en A à AA_2. Les longueurs $A_2\,A$, $A_2\,D$ étant égales, la propriété à démontrer résulte de ce qu'on a, en grandeur et en signe,

$$A_2\,H_b\,.\;A_2\,H_c = \overline{A_2D}^2 = \overline{A_2\,A}^2 = A_2H_a\,.\;A_2O_a\,.$$

2. Remarquons tout d'abord que les points H_a, H_b, H_c, sont les *isotomiques* des pieds des hauteurs du triangle A'B'C' dans ce triangle.

Les cercles (ω_a), (ω_b), (ω_c), décrits sur HA', HB', HC', comme diamètres, contiennent chacun deux des points H_a, H_b, H_c et se coupent à l'orthocentre H.

Les centres de ces cercles déterminent un triangle $\omega_a\,\omega_b\,\omega_c$ simétriquement égal au triangle $\alpha\beta\gamma$ par rapport à O_9 et symétriquement semblable à ABC, le centre étant H et le rapport 1 : 4.

Le centre ω du cercle (Σ) circonscrit au triangle $H_a\,H_b\,H_c$ est donc l'intersection des perpendiculaires, issues de H, sur les droites $H_b\,H_c$, $H_c\,H_a$, $H_a\,H_b$.

Comme les cercles (ω_a), (ω_b), (ω_c) se coupent deux par deux en H_a, H_b, H_c, *les points* H *et* ω *sont conjugués isogonaux par rapport au triangle* $\omega_a\,\omega_b\,\omega_c$ *et les droites* A'H *et* $\omega_a\,\omega$, B'H *et* $\omega_b\,\omega$, C'H *et* $\omega_c\,\omega$, *sont également inclinées sur les directions* AB *et* AC, BA *et* BC, CB *et* CA ; autrement dit, *les droites* A'H *et* $\omega_a\,\omega$, B'H *et* $\omega_b\,\omega$, C'H *et* $\omega_c\,\omega$, *ont des directions symétriques par rapport aux bissectrices des angles du triangle* ABC.

H *et* ω *sont les foyers d'une conique inscrite au triangle* $\omega_a\,\omega_b\,\omega_c$ *dont le cercle principal a pour diamètre le rayon du cercle* (Σ).

3. Les triangles $H_a\,H_b\,H_c$ sont *orthologiques*, les centres étant H et ω. Les triangles $H_a\,H_b\,H_c$ et A'B'C' sont aussi *orthologiques ;* l'un des centres est H ; le second centre est l'homothétique de ω dans l'homothétie $(\omega_a\,\omega_b\,\omega_c$, A'B'C'), c'est-à-dire un point L colinéaire avec ω et H, tel que $H\omega : HL = 1 : 2$.

Mais les triangles A'B'C' et $\omega_a\,\omega_b\,\omega_c$ sont de plus *homologiques*, le centre étant le *réciproque* K de O, par rapport à A'B'C', c'est-à-dire le point de LEMOINE du triangle ABC, et l'axe la droite $A_2\,B_2\,C_2$.

On en déduit cette proposition :

Le centre ω *du cercle* (Σ) *est situé sur la droite qui joint l'orthocentre* H *au point* K *de* LEMOINE *du triangle* ABC. *Cette droite* ω K H *est normale à l'axe,* $A_2B_2C_2$.

4. Le triangle $H_a\,H_b\,H_c$ est aussi le triangle podaire de l'orthocentre H par rapport au triangle A'B'C'. Son cercle circonscrit

(Σ) est par suite le cercle principal d'une conique inscrite au triangle A'B'C' dont les foyers sont H et le conjugué isogonal de ce point par rapport à A'B'C'. Ce point L, symètrique de H par rapport à ω, n'est autre que le centre L d'orthologie de A'B'C' et $H_a H_b H_c$.

De plus, d'après un théorème de M. P. LEMOINE, [1]) le cercle (Σ) passe par l'orthopôle ψ du diamètre $OO_9 H$ du cercle (O_9) circonscrit à A'B'C', par rapport à ce triangle.

ψ, qui est l'orthopôle de la droite d'EULER $OO_9 H$ du triangle A'B'C', par rapport à A'B'C' fournit un *septième* point remarquable du cercle (Σ).

ψ est de plus l'une des intersections des cercles (Σ) avec le cercle (O'_9) des neuf points de A'B'C'.

5. Ajoutons enfin que le triangle $H_a H_b H_c$ est inscrit dans une conique (Γ) qui touche les droites B'C', C'A', A'B' en H_a, H_b, H_c. *Cette conique a pour centre le complémentaire du réciproque de* K, *par rapport au triangle* A'B'C', *c'est-à-dire le centre* O_9 *du cercle d'*EULER *du triangle* ABC. En effet, $2\,GO_9 = OG$.

Le quatrième point communs au cercle (Σ) *et à la conique* (Γ) *est l'orthopôle* ψ *de la droite d'*EULER OH *par rapport au triangle* A'B'C'.

V. THÉBAULT
Le Mans (France).

(5 Août 1930).

NOTE MATEMATICE

1. *Programul matematicilor în Colegiul St. Sava din Bucureşti pe anul şcolar 1835 – 1836:*

Matematica elementară. Profesorul D. G. POP. Clasa VI de umanioare.

Aritmetica lui FRANCOEUR. Cap. I. Numere întregi. Cap. II. Frângeroase. Cap. III. Puteri şi rădăcini. Cap. IV. Raporturi.

Clasa I complimentară.

Geometria lui LEGENDRU. Cartea I, Liniile şi unghiurile. Cartea II. Cercul şi măsura unghiurilor. Cartea III. Proporţionalitatea figurilor. Cartea IV. Poligoane regulate şi măsura cercului. Cartea V.

1) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1904 — 400.

Planurile şi unghiurile solide. Cartea VI. Poliedrele. Cartea VII. Sfera. Cartea VIII. Cele trei trupuri solide.

Clasa I şi II complimentară. Profesor D. D. PAULID.

Algebra şi trigonometria. Calculul algebric. Adunarea scăderea, polinoame, înmulţirea, împărţirea. *Ecuaţii de gradul I.* Greutăţile soluţiilor, băgare de seamă la soluţiile problemelor, eliminaţii, probleme nehotărîte, reguli de amestecare. *Puteri şi rădăcini.* Exponenţi negativi şi frângeroşi, rădăcini patrate, ecuaţii de gradul II. *Raporturi.* Proporţii, progresii, logaritmi, regula de dobândă compusă, anuităţile, regula de poziţii greşite. *Frângeri conţinute.* Definiţie, legea compunerii reduselor, diferenţa a două reduse, hotarul greşalelor, ce înfăţoşază frângerea periodică, aplicaţia acestei teorii la deslegarea unei ecuaţii de gradul I cu două necunoscute. *Sizigii şi combinaţii.* Definiţii, forma sizigiilor şi a combinaţiilor, probleme.

Trigonometria de LEGENDRU. I. *Trigonometria dreptliniată.* Ştiinţe generale asupra liniilor trigonometrice, teoremi şi formule asupra liniilor trigonometrice, construcţia tablelor de sinus, prinţipuri asupra deslegării triunghiurilor dreptliniate şi dreptunge şi deslegarea triunghiurilor în general, probleme. II. *Trigonometria sferică.* Prinţipuri pentru deslegarea triunghiurilor drepte, deslegarea triunghiurilor sferice, drept unge, prinţipuri pentru deslegarea triunghiurilor în general, forme de căpetenie pentru deslegarea a oricărui triunghiu sferic, deslegarea oricărui triunghiu sferic, probleme.

In anul 1838 găsim acelaş program, numai că în loc de *sizigii* găsim *orânduieli*, iar la algebră s'a mai adăogat *nepotriviri.*

Să se compare acest program cu cel de azi ca să se vază enormele (!) progrese realizate în învăţământul matematicilor în liceele noastre.

I. I.

2. *Asupra problemei 3614.* Soluţia publicată la pagina 473 din Anul XXXV nu este exactă. Era chestiunea când

$$[2^{9(n-1)} - 1] / (2^9 - 1)$$

se divide cu 241? Dar $(2^9 - 1) = 511$, e prim cu 241. Trebuie dar să avem:

$$2^{9(n-1)} - 1 \equiv \mathcal{M}.\ 241.$$

Dacă α este cel mai mic divizor al lui 240 care face $(2^\alpha - 1)$ divizibil cu 241, atunci $9(n-1) = k\alpha$. Se găseşte uşor că $(2^{24}-1)$ se divide cu 241, că nu e alt exponent mai mic; deci $\alpha = 24$. De aci:

$$9(n-1) = 24k,$$

$$\therefore \quad n = 8m + 1.$$

Deci soluţiile problemei sunt 1, 9, 17, 25,...

I. B. FLORESCU.

3. *Asupra Notei 25 Anul XXXV.* Era chestiunea de a pune sub forma unui determinant polinomul $P_m(y) = x^m + (1/x^m)$ în care $y = x + (1/x)$. Polinomul dat la pagina 139 nu e exact căci dă $P_2 = y^2 - 1$ în loc de $P_2 = y^2 - 2$. Determinantul corect este:

$$P_m = \begin{vmatrix} y & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & y & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & y & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & y \end{vmatrix}.$$

I. B. FLORESCU.

4. *Asupra ecuaţiei de gradul al treilea.* Formula lui CARDAN pentru rezolvarea ecuaţiei

$$x^3 + px + q = 0 \tag{1}$$

se obţine, după cum se ştie, identificându-i primul membru cu un determinant de ordinul al treilea, conţinând două cantităţi nedeterminate, u şi v, sau ţinând seama —ceeace e de altfel acelaş lucru— de identitatea

$$x^3 - y^3 - z^3 - 3xyz = (x - y - z)(x - \alpha y - \alpha^2 z)(x - \alpha^2 y - \alpha z)$$

unde α şi α^2 sunt rădăcinile cubice, complexe, ale unităţii.

Nu ştiu dacă metoda e cunoscută, dar de mult ezit să arăt

că se poate rezolvă ecuația (1) prin următoarea schimbare de necunoscută

$$x = z - \frac{p}{3z} \tag{2}$$

care conduce la ecuația *trinom*

$$z^6 + qz^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

și care se rezolvă ușor, punând $z^3 = y$; obținem ecuația

$$y^2 + qy - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

cu rădăcinile

$$y = z^3 = -\frac{9}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

valorile lui z scoase de aci și introduse în (2) conduc la formula lui CARDAN, cunoscută pentru fiecare din cele trei rădăcini.

M. GHERMĂNESCU.

5. *Asupra unor integrale.*

Integralele

$$y_1 = \int_0^{\infty} e^{-\frac{u^n}{n}} \cos x\, u^n\, du\ ,\ z_1 = \int_0^{\infty} e^{-\frac{u^n}{n}} \sin x\, u^n\, du$$

calculate de D-l Profesor TH. ANGHELUȚĂ în G. M. (XXXIV, pag. 445 și urm.) constituesc o remarcabilă aplicațiune a teoriei ecuațiilor diferențiale, la calculul integralelor definite. Observ însă că în particular integralele de mai sus, se pot calculà direct.

Avem

$$y_1 + iz_1 = \int_0^{\infty} e^{-\frac{u^n}{n}} (\cos x u^n + i \sin x u^n)\, du = \int_0^{\infty} e^{-au^n}\, du$$

unde am pus

$$a = \frac{1}{n} - ix.$$

Făcând apoi schimbarea de variabilă

$$u = \frac{v^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}}}$$

avem

$$\int_0^\infty e^{-au^n}\, du = \frac{1}{n\sqrt[n]{a}} \int_0^\infty e^{-v}\, v^{\frac{1}{n}-1}\, dv = \frac{1}{n\sqrt[n]{a}}\, \Gamma\left(\frac{1}{n}\right).$$

Valorile integralelor y_1 și z_1 se obțin separând părțile, reală și imaginară din această expresie. Dacă punem

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{n} - ix}} = r\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

obținem

$$\frac{1}{\frac{1}{n} - ix} = \frac{n + in^2x}{1 + n^2x^2} = r^n\,(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$$

de unde

$$r^n = \frac{n}{\sqrt{1 + n^2x^2}}$$

iar

$$\cos n\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + n^2x^2}}; \quad \sin n\alpha = \frac{nx}{\sqrt{1 + n^2x^2}}$$

deducem

$$y_1 + iz_1 = \frac{1}{n}\,\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) r\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

de unde

$$y_1 = \frac{1}{n}\,\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) n^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + n^2x^2}}\right)^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{1}{n}\operatorname{arc\,cos}\frac{1}{\sqrt{1 + n^2x^2}}\right)$$

$$z_1 = \frac{1}{n}\,\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) n^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + n^2x^2}}\right)^{\frac{1}{n}} \sin\left(\frac{1}{n}\operatorname{arc\,sin}\frac{nx}{\sqrt{1 + n^2x^2}}\right).$$

Aceste formule se identifică imediat cu cele găsite de D-l Prof. Th. Angheluță dacă observăm că

$$n\alpha = \operatorname{arc\,tg} nx$$

iar

$$\Gamma\left(\frac{1}{n} + 1\right) = \frac{1}{n}\,\Gamma\left(\frac{1}{n}\right).$$

M. Ghermănescu.

BIBLIOGRAFIE

Bulletin de mathématiques et physique pures et appliquées de l'École polytechnique de Bucarest. I. Année No. 3. Bucureşti 1930. Sur le théorème des accroissements finis, par E. ABASON. Sur une formule due à M. POMPEIU, par N. CIORĂNESCO. Sur l'arc affin, par. GR. C. MOISIL. Sur la distribution des vitesses et des accélérations dans une plaque rigide mobile dans son propre plan, par LUCA TEODORIU. Remarques sur la note de Mr TEODORIU, par D. POMPEIU. Synthèse des lois de similitude de dynamiques et formules dans le cas des fluides compressibles, par D. GERMANI. La nouvelle théorie d' EINSTEIN, par AL. PROCA. Le potentiel des métaux platine — zinc dans l'eau, par ER. TOPORESCU. Sur la déformation des pièces droites soumises à une compression excentrique, par AUREL A. BELEŞ, Hypothèses sur la rupture des matériaux, par GH. EM. FILIPESCO. Reponse aux observations de M. CARAFOLI, par V. VĂLCOVICI. Calcul des performances d'un avion, par ELIE CARAFOLI. Informations. Bibliographie.

Revista matematică din Timişoara. Anul X. No. 6. August 1930. Timişoara. Câteva proprietăţi în legătură cu transversalele într'un triunghiu, de CESAR COŞNIŢĂ.

N. CIORĂNESCU. *Curs elementar de algebră superioară*, predat elevilor Anului Preparator al Şcoalei Politecnice din Bucureşti. Litografiat, Bucureşti 1930.

Mathesis. Tomul XLIV No. 7, Iulie 1930 Gembloux. Asupra permutaţiilor de A. ERRERA. Asupra unei noui generalizări a teoremei lui DROZ-FARNY-NOYER de R. GOORMAGHTIGH. Asupra numerelor prime impare, de G. LAMBERT Asupra calculului a două integrale elementare de AD. M.

RENÉ GARNIER. *Cours de mathématiques générales. (Analyse. Géométrie).* Tome I. Calcul différentiel. (Géométrie). Paris Gauthier-Villars & C-ie. 1930.

Acest volum de 463 de pagini e cursul primului semestru pe care autorul l'a făcut la Facultatea de ştiinţe din Paris, cu oarecare adăogiri. Demonstraţiile simple şi riguroase. Capitolele tratate sunt: Limite şi continuitatea, exponenţii fracţionari, derivatele, numerele complexe, seriile, funcţiuni clasice şi desvoltarea lor în serii, aplicaţiunile derivatelor la teorema creşterilor finite şi la seria lui TAYLOR, funcţiuni de mai multe variabile, geometria analitică a dreptei şi a planului, curbe şi suprafeţe de al doilea ordin, noţiuni de geometrie infinitezimală. E o carte folositore pentru cei ce pregătesc studii de fizică generală, sau studii teoretice de inginerie precum şi pentru studenţii Facultăţilor şi elevii Politecnicelor.

I. I.

J. HADAMARD. *Cours d'Analyse, professé à l'Ecole Polytechnique.* Tome second. Paris. Librairie scientifique Hermann & C-ie. Paris 1930.

Autorul este un matematician reputat în lumea întreagă şi nu mai este nevoie a-i recomanda opera. In cele 721 pagini ale voluminosului tratat gă-

sim chestiuni: Partea I. Potenţiale menţiune. Cap. I. Potenţialul de volum. Cap. II. Potenţiale de suprafaţă. Cap. III. Proprietăţile potenţialelor de suprafaţă la trecerea stratului atrăgător. Cap. IV. Funcţiunile armonice. Cap. V. Aplicaţiuni la electrostatică. Cap. VI. Aplicaţiuni la Magnetism. Se trece la Calculul Variaţiunilor cu Capitolele: Integrala simplă cu limite fixe. Cap. II. Limite variabile. Cap. III. Maxima şi Minima legate. Cap. IV. Integrale multiple. Partea treia tratează despre funcţiunile analitice cu Capitolele: Cap. I. Proprietăţi fundamentale ale funcţiunilor de variabilă complexă. Cap. II. Aplicaţiuni diverse ale teoremelor generale. Cap. III. Noţiuni sumare asupra funcţiunilor eliptice. In partea patra se ocupă cu proprietăţile ecuaţiunilor diferenţiale, unde găsim Capitolele: Cap. I. Metode generale. Cap. II. Ecuaţii şi sisteme lineare. Partea cincia coprinde ecuaţiile cu derivate parţiale: Cap. I. ecuaţii de primul ordin. Cap. II. Ecuaţii lineare de al doilea ordin, cu două variabile independente. Cap. II. Ecuaţii de al doilea ordin cu mai mult de două variabile independente. Ultima parte tratează probalităţile. In Cap. I sunt definiţii şi principii generale. Cap. II. Repetarea probelor. Cap. III. Probabilitatea cauzelor. Cap. IV. Erorile de observaţie şi legea lui Gauss.

I. I.

CERERI

194. Cine-mi poate procurà, şi cu ce preţ, No. 1 şi 2 din „*Gazeta Matematică*", Anul XXXIII? Pot da in schimbul uneia din acestea No. 1 d n anul XXXV.

UNGHEANU MIHAIL
(Str. General Manu 3, Oltenița)

195. Există tabele de patrate de 7 şi de 8 cifre?.

VIRGILIU C. POPESCU
(Asistent-Astronom. Toulouse).

PROBLEME REZOLVATE

*PROBLEMA 3537. *Se dă* $N = a^{2\alpha}$ *unde* a *este un număr prim de forma* $(2^n + 1)$; *când putem aveà:*

$$\varphi_{2n}(N) > \sqrt{N} > \varphi_{2n+1}(N)$$

$\varphi_i(N)$ *însemnând indicatorul de ordinul* i *a lui* N?

CĂPITAN I. LINTEŞ.

Avem succesiv:

$$\varphi_1(N) = \varphi[(2^n+1)^{2\alpha}] = (2^n+1)^{2\alpha-1} \cdot 2^n$$

$$\varphi_2(N) = \varphi[(2^n+1)^{2\alpha-1} \cdot 2^n] = (2^n+1)^{2\alpha-2} \cdot 2^{2n-1}$$

$$\varphi_3(N) = (2^n+1)^{2\alpha-3} \cdot 2^{3n-2}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\varphi_{2n}(N) = (2^n+1)^{2\alpha-2n} \cdot 2^{2n^2-2n+1}$$

$$\varphi_{2n+1}(N) = (2^n+1)^{2\alpha-2n-1} \cdot 2^{2n^2-2n}.$$

Deci trebuie să avem:

$$(2^n+1)^{2\alpha-2n} \cdot 2^{2n^2-2n+1} > (2^n+1)^{\alpha} > (2^n+1)^{2\alpha-2n-1} \cdot 2^{2n^2-n}.$$

Sau:

1) $$2^{2n^2-2n+1} > (2^n+1)^{2n-\alpha}$$

2) $$(2^n+1)^{2n-\alpha+1} > 2^{2n^2-n}.$$

Din prima neegalitate deducem că:

$$2 > (2^n+1)^{\frac{2n-\alpha}{2n^2-2n+1}}$$

deci trebuie să avem:

$$\frac{2n-\alpha}{2n^2-2n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

sau:

3) $$\alpha + 1 \geqslant n(4-\alpha).$$

Din a doua neegalitate deducem că:

$$(2^n+1)^{\frac{2n-\alpha+1}{2n^2-n}} > 2$$

deci trebuie să avem:

$$\frac{2n-\alpha+1}{2n^2-n} \geqslant \frac{1}{n}$$

sau:

4) $$\alpha \leqslant 2 \qquad \text{pentru} \qquad n > 0.$$

BIBLIOTECA CENTRALĂ a „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

Ori din condiţiunile 3) şi 4) se deduce că:

$$\frac{\alpha \mid 2 \mid 1}{n \mid 1 \mid 0} \qquad \text{dar} \qquad n > 0$$

deci avem:

$$\alpha = 2 \qquad \text{şi} \qquad n = 1.$$

Astfel în cât vom avea:

$$\varphi_2(3^4) > 3^2 > \varphi_3(3^4)$$

sau

$$2.3^2 > 3^2 > 2.3.$$

Notă. 1. A rezolvat problema cu ajutorul logaritmilor D-l Gheorghe Th. Gheorghiu.

2. Mai general, dacă ne-am propune condiţiunile:

$$\varphi_\alpha(N) > \sqrt[n]{N} > \varphi_\beta(N)$$

unde $\alpha < \beta$, am ajunge, în ipotezele că:

$$N = a^m; \qquad \beta = \alpha + \varepsilon \qquad \text{şi} \qquad m = k.n$$

la condiţiunile:

$$a^{kn-\alpha}.(a-1)A_{\alpha-1} > a^k > a^{kn-\alpha-\varepsilon}(a-1).A_{\alpha+\varepsilon-1}$$

notând prin:

$$A_1 = 1 \qquad \text{iar} \qquad A_i = \varphi[(a-1)A_{i-1}].$$

Iar în cazul că: $a = 2^t + 1$, fiind considerat prim, atunci se ajunge la condiţiunile:

$$\alpha + \varepsilon - 1 \geqslant k.t(n-1) \geqslant \alpha - 1$$

unde intervalul se măreşte puţin, admiţându-se: $2^t + 1 \sim 2^t$.

In cazul problemei: 3537 găsim:

$$4n > \alpha n \geqslant 2n - 1$$

de unde ar rezultă $\alpha = 2$ şi 3, dar nu convine decât $\alpha = 2$.

I. L.

PROBLEMA 3598. *Să se găsească minimul expresiunei:*

$$E = x!\, y!$$

Când avem:

$$x + y = k = \text{const.}$$

Căpitan Gh. Niculescu.

1. *Soluția* dată de D-nul Eugen Russu. Presupunem x și y numere întregi și pozitive iar pentru formele $k = 2p$; $k = 2p + 1$.

Formăm șirul:

$$0!\,k!\ ,\ 1!\,(k-1)!\ ,\ 2!\,(k-2)!\ \ldots\ldots\ |\tfrac{1}{2}k|!\,(k-|\tfrac{1}{2}k|$$

unde $|\frac{1}{2}k|$ înseamnă cel mai mare întreg cuprins în $\frac{1}{2}k$.

Vom arătă că acest șir este descrescător și pentru aceasta însemnăm cu E_x al x-lea termen al șirului ($x \leqslant \frac{1}{2}k$).

Formăm raportul:

$$\frac{E_x}{E_{x-1}} = \frac{x!\,(k-x)\,!}{(x-1)!\,(k+1-x)!} = \frac{x}{k+1-x}\,.$$

Cum $x < \frac{1}{2}k$, rezultă că $x < k + 1 - x$ și deci $E_x < E_{x-1}$!

Șirul este deci descrescător și cel mai mic termen este ultimul din acest șir. Minimul expresiunei va fi deci pentru $x = \frac{1}{2}k$, $y = \frac{1}{2}k$ dacă $k = 2p$ și pentru $x = \frac{1}{2}(k+1)$, $y = \frac{1}{2}(k-1)$ dacă $k = 2p+1$ (sau $x = \frac{1}{2}(k-1)$, $y = \frac{1}{2}(k+1)$) și vom avea respectiv:

$$E_{min} = [(\tfrac{1}{2}k)!]^2\ \ldots\ (k = 2p)$$

$$E_{min} = [\tfrac{1}{2}(k+1)]!\ [\tfrac{1}{2}(k-1)]!\ \ldots\ (k = 2p+1).$$

2. Problema se mai poate soluționă considerând coeficientul binomial general:

$$C_k^x = \frac{(k-x+1,\ k)}{x!}\,.$$

Expresiunea dată se mai poate scrie:

$$E = x!\,(k-x)\,! = x!\,(k-x)\,!\,\frac{(k-x+1,\,k)}{(k-x+1,\,k)} = \frac{k!}{C_k^x}\,.$$

Sub această formă, minimul lui E depinde de maximul lui C_k^x.

Cum coeficienții binomiali-simetrici față de extremități sunt egali, maximul lui C_k^x va fi pentru:

$$x = \tfrac{1}{2}k \qquad (k = 2p)$$

$$x = \tfrac{1}{2}(k+1) \qquad (k = 2p+1)$$

și găsim deci aceiași valoare a minimului expresiunei.

3. *Generalizare.*

Enunțul problemei nu presupune nimic asupra mărimilor x și y. Cum se poate dà un sens lui $x!$ chiar pentru x neîntreg, fie uti-

lizând formula lui STIERLING, fie considerând funcţia $\Gamma(x+1)$ ca o extindere directă a acestui factorial, se poate soluţiona problema şi pentru x şi y neîntregi.

Vom aveà de găsit minimul expresiunei:

$$E = \Gamma(x)\ \Gamma(y)$$

în aceiaşi condiţie:

$$x + y = k = \text{const.}$$

Derivând obţinem:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{d\Gamma(x)}{dx}\,\Gamma(y) + \Gamma(x)\,\frac{d\Gamma(y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Ţinând seamă că $dy/dx = -1$ şi de simetria ecuaţiei de mai sus, soluţia ecuaţiei:

$$\frac{dE}{dx} = 0$$

nu poate fi decât:

$$x = y = \tfrac{1}{2}k$$

dând minimul:

$$E_{\min} = [\Gamma(\tfrac{1}{2}k)]^2$$

Observări:

1. O generalizare şi mai largă se poate face când înlocuim $\Gamma(x)$ cu $F(x)$. In acest sens a lucrat singurul corespondent, D-l RADU GHIULEA. Dar D-sa a utilizat formula aproximativă:

$$x! = e^{-x+\theta(x)}\cdot\sqrt{2\pi}\cdot x^{x+\frac{1}{2}}$$

şi a mai făcut considerente teoretice, ce eşiau din cadrul problemei.

2. Formula cunoscută:

$$\Gamma(x)\,\Gamma(y) = \Gamma(x+y)\,B(x, y) \quad , \quad (x+y=k)$$

ne duce la acelaş rezultat, căutând minimul integralei:

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx.$$

$$p > 1 \quad , \quad q > 1$$

3. D-l N. PAVEL (Craiova), aplică teorema:

«Maximul sau minimul unei *funcţiuni* simetrice de mai multe variabile, cu o relaţie de legătură simetrică, are loc când variabilele sunt egale», stabilită de D-l C. STAN în Nota Matematică din R. M. T. No. 3, Anul VIII, pag. 36.

Deşi ajunge la rezultat — aplicaţia este eronată, căci teorema este valabilă pentru funcţiuni, iar D-sa a aplicat-o pentru x şi y întregi. Atât D-sa cât şi D-l EUGEN RUSSU propun generalizarea:

Să se găsească minimul expresiunei:

$$E = x!\ y! \ldots u!$$

pentru:

$$x + y + \ldots + u = k = \text{const.}$$

Dau numai rezultatul, pentru:

$$x = y = \ldots = u$$

fără a demonstră riguros şi fără a arătà cari sunt formele aritmetice posibile ale lui k. Această chestiune rămâne deci de studiat de corespondenţii doritori.

4. D-nul E. M. CAŢICHI a făcut înlocuirea:

$$x = p + d$$

$$y = p - d$$

ajungând să dea rezultatul.

5. D-nii: I. I. DAMIAN. P. I. GHIŞOIU, I. JEBA şi E. N. SAULEA au făcut numai o verificare şi nu o demonstraţie a problemei, fie prin încercări, fie servindu-se de rezultatul cunoscut pentru $E = xy$.

6. D-l EUGEN RUSSU dă maximul: $E_{max} = k!$

7. Un corespondent (*numai unul*) derivează numere întregi, dă valori negative lui x şi arată în definitiv că $E_{min} = 1$. Soluţinea era probabil rezervată recreaţiunilor.

CPT. G. N.

PROBLEMA 3604. *Să se caute valorile lui* n *pentru care*

$$n + 9^n$$

se divide prin 101.

COL. GH. BUICLIU.

Soluţie dată de D-l: R. GHIULEA (Cluj).

Teorema lui FERMAT arată că

$$9^{100m} = Mul.\ 101 + 1 \qquad (1)$$

Să punem deci

$$n = 100m + p \qquad p < 100 \qquad (2)$$

m şi p fiind numere întregi pozitive. Cu acestea, expresia dată devine

$$E = 100m + p + 9^{100m}\, 9^p$$

sau ţinând seamă de (1)

$$E = 101q + p + 9^p - m \qquad (3)$$

In problema 604 a D-lui COL. GH. BUICLIU rezolvată la pagina 100 din *Revista Matematică din Temişoara* Vol. VII, s'a demonstrat că restul împărţirei lui N^{50} prin 101 este zero sau ± 1. Deci restul împărţirei lui 9^{50} prin 101 va fi $+1$ sau -1. Şi într'un caz şi în altul, cu începere de la 9^{50} resturile împărţirei lui 9^p prin 101 se vor repeta. Aceasta conform cu teoremele stabilite de D-l A. G. IOACHIMESCU în articolele sale întitulate «*Asupra resturilor divizibilităţei unui număr de forma A^m printr'un număr dat p*», publicate în *Gazeta Matematică* Vol. V. Fie r_p restul împărţirei lui 9^p prin 101. Căutând aceste resturi pentru valorile lui p de la 0 la 50 inclusiv se găsesc rezultatele înscrise în următorul tabel.

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
r_p	1	9	81	22	97	65	80	13	16	43	84	49	37	30	68	6	54
p	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
r_p	82	31	77	87	76	78	96	56	−1	−9	−81	−22	−97	−65	−80	−13	−16
p	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
r_p	−43	−84	−49	−37	−30	−68	−6	−54	−82	−31	−77	−87	76	−78	−96	−56	1

Se vede că resturile se repetă, cu semn schimbat, chiar dela $p = 25$.

Dacă înlocuim în (3) pe 9^p în funcţie de 101 şi r_p, avem

$$E = 101h + p + r_p - m = 101h - (m - p - r_p) \qquad (4)$$

Pentru ca (4) să se dividă prin 101 trebue ca

$$m - p - r_p = 101t$$

$$m = p + r_p + 101t \qquad (5)$$

unde t este un număr întreg pozitiv sau negativ, aşa ca m să fie pozitiv, iar p şi r_p sunt 2 valori corespunzătoare din tabelul precedent. Ducând pe m din (5) în (2) se găseşte valoarea căutată a lui n:

$$n = 10100t + 101p + 100r_p .$$

Se vede că problema are o infinitate de soluţii. Cea mai mică valoare a lui n este 4 corespunzătoare la

$$p = 4 \ , \quad r_p = 97 \ , \quad t = -1.$$

Problema se poate generaliza în felul următor

Dacă N *este un număr prim şi prim cu* A, *iar dacă* r_p *este restul diviziunei lui* A^p *prin* N, *atunci*

$$n + A^n$$

se divide prin N, *pentru valorile pozitive ale lui n date de formula*

$$n = N\,(N-1)\,t + pN + (N-1)\,r_p$$

$$\text{în care } p \leqslant N - 1.$$

Soluţia problemei generale este identică cu a problemei 3604.

Notă. 1° D-l C. V. Costăchescu a rezolvat problema parţial dând soluţiile 4, 100 şi 10200.

2°. D-l I. N. Craiu a dat soluţiile 4.37 şi 100, fără să arate pe ce cale le-a găsit.

3°. Au dat numai soluţia 4, D-nii: E. N. Burlacu; C. I. Istinie-Brezuică; C. I. Râmniceanu; H. Uschersohn; I. Wassermann; P. Ghişoiu; I. Alexandrescu.

PROBLEMA 3891. *Dacă* m *şi* n *sunt numere întregi, în ce caz expresiunea:*

$$m^2/n + n^2/m$$

este un întreg?

I. Ionescu.

Soluţie dată de D-l M. P. CHIŢU (Liceul Giurgiu).

Făcând suma găsim $(m^3 + n^3)/mn$. Fie $m = d\alpha$ şi $n = d\beta$ în care d este cel mai mai mare comun divizor al lui m şi n. Inlocuind, expresiunea devine $d\ (\alpha^3 + \beta^3)/\alpha\beta$. Cum α şi β sunt primi între ei parenteza nu se poate divide nici cu α, nici cu β. Rămâne dar să avem $d = k\alpha\beta$. Expresia se reduce la întregul $k(\alpha^3 + \beta^3)$. Reese de aci că m şi n sunt de forma $k\alpha^2$ şi $k\alpha\beta^2$.

D-nii: P. I. GHIŞOIU, ION G. POPA, V. CRIVĂŢ, D. ŞERBAN-ULMENI şi G. M. PĂUN, au dat numai soluţia evidentă $m = n$. Celelalte soluţii primite sunt eronate.

PROBLEMA 3917. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\text{arc sin}x + \text{arc cos}x = \text{arc sin}2x.$$

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-nii: M. VELEA, P. I. GHIŞOIU, N. DONCIU, A. NEGREA, E. MEREUŢĂ, C. N. POPESCU, T. DEAC, A. EM. BĂDESCU.

Punem:

$$x = \sin a = \cos b = \tfrac{1}{2}\sin c. \qquad a + b = c.$$

De acì deducem:

$$\sin c = \sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a,$$

şi cum:

$$\cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a} = \sqrt{1 - x^2},$$

$$\sin b = \sqrt{1 - \cos^2 b} = \sqrt{1 - x^2},$$

înlocuind găsim:

$$2x = x \cdot x + \sqrt{1 - x^2}\ ,\ \sqrt{1 - x^2} = x^2 + (1 - x^2) = 1.$$

Deci:

$$x = \tfrac{1}{2}.$$

In adevăr:

$$\text{arc sin}\tfrac{1}{2} = 30^0, \qquad \text{arc cos}\tfrac{1}{2} = 60^0, \qquad \text{arc sin } 1 = 90^0,$$

şi egalitatea dată se verifică.

O întrebare. Prin faptul că radicalele trebuiau luate cu dublu semn, nu s'a pierdut vre-o soluţie?

I. I.

---

*PROBLEMA 3918. *Să se rezolve cu ajutorul trigonometriei dar fără ajutorul logaritmilor, ecuaţiunile:*

1) $x^3 + 2x^2 - 1 = 0$

2) $2x^3 + x - 3 = 0.$

Ion S. Antoniu.

Soluţie trimisă de D-l Dumitraşcu N. Romeo (Lic. Roman).

Prima ecuaţie

Avem

$$x^3 + 2x^2 - 1 = 0.$$

Facem

$$x = \sin a$$

şi avem

$$\sin^3 a + 2\sin^2 a - 1 = 0$$

$$\sin^3 a + 2\sin^2 a = 1$$

$$\sin a\,(1-\cos^2 a) + 2\sin^2 a - \sin^2 a - \cos^2 a = 0$$

$$\sin a - \sin a\cos^2 a + \sin^2 a - \cos^2 a = 0$$

$$\sin a\,(\sin a + 1) - \cos^2 a\,(\sin a + 1) = 0$$

$$(\sin a + 1)(\sin a - \cos^2 a) = 0$$

$1^0.$ $\quad \sin a = -1 = x$

$2^0.$ $\quad \sin a - \cos^2 a = 0$

$$\sin a - 1 + \sin^2 a = 0$$

$$\sin^2 a + \sin a - 1 = 0$$

$$\sin a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\sin' a = x' = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \qquad x' = \sin'' a = -\frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

Sau având $\sin^3 a + 2\sin^2 a - 1 = 0$ avem deodată

$(\sin a + 1)(\sin^2 a + \sin a - 1) = 0$ etc.

A doua ecuaţiune

$$2x^3 + x - 3 = 0.$$

Facem

$$x = \sin b$$

şi avem

$$2\sin^3 b + \sin b - 3 = 0$$

$$\sin(b - 1)(2\sin^2 b + 2\sin b + 3) = 0$$

$1^0.$ $\quad \sin b = x = 1$

$2^0.$ $\quad 2\sin^2 b + 2\sin b + 3 = 0$

$$\sin b = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 24}}{4}$$

$$\sin b = \frac{-1 \pm \sqrt{-5}}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin' b = x' &= \frac{\sqrt{-5} - 1}{2} \\ \sin'' b = x'' &= -\frac{\sqrt{-5} + 1}{2} \end{aligned}\right\} \text{ Rădăcini imaginare.}$$

Prin urmare ecuaţiunea :

$2x^3 + x - 3 = 0$ are o singură rădăcină reală 1.

R. Dumitraşcu.

*EXERCIŢII

1. Diferenţa a două numere, unul răsturnatul altuia, se divide cu 9.

M. Ungheanu.

R. Suma cifrelor acelor numere fiind aceiaşi, diferenţa lor e $\mathcal{M}9$.

2. Ce patrate se termină cu aceiaşi cifră semnificativă repetată ?

M. Ungheanu.

R. Printre patratele de 2 cifre este numai 144. Deci ultima cifră e 4. Pentru patrate terminat cu 444 găsim $1444 = 38^2$. Alte soluţii nu mai sunt.

3. Suma a şase termeni întregi şi pozitivi ai unei progresii este 45. Care e acea progresie?

I. Curchi.

R. Dacă a e primul termen şi r raţia suma este $(6a + 15r) = 45$, din care ese $a = 5\ (3 - r)/2$. Se vede că $r \leqslant 3$ şi impar. Deci $r = 3$, de unde $a=1$. Progresia este: 5, 6, 7, 8, 9, 10; sau $r = 3$ şi $a = 0$ şi progresia este: 0, 3, 6, 9, 12, 15.

4. Suma a patru termeni întregi consecutivi din o progresie aritmetică este 30. Care e acea progresie?

I. Curchi.

R. Dacă a e primul termen şi q raţia suma este $a\ (q^4 - 1)/(q - 1)$ sau $a\ (1 + q + q^2 + q^3) = 30$. Se vede că $q = 3$ face paranteza peste 30. Deci $q = 2$, de unde ese $a = 2$. Progresia este: 2, 4, 8, 16.

5. Să se arate că $(4^n + 15n - 1)$ se divide cu 9.

C. N. Popescu.

R. Procedăm prin inducţie. Pentru $n = 1$ se verifică. Înlocuim n cu $(n + 1)$ şi scădem din rezultat expresia dată. Rezultatul este $(3.\ n^n + 15)$. Suprimăm factorul 3 şi rămâne a dovedi că $(4^n + 5)$ se divide cu 3, sau scoţând toţi $\mathcal{M}3$; rămâne $(1^n + 2)$, care se divide cu 3.

6. Să se arate că $(2^{2n-1}.\ 3^{n+2} + 1)$ se divide cu 11.

C. N. Popescu.

R. Înmulţim cu 2 prim cu 11 şi găsim expresia $(9,\ 12^n + 2)$. Scoatem -1 $\mathcal{M}11$ şi rămâne $(9,\ 1^n + 2) = 11$.

7. Să se arate că $(2^{7n+3} + 3^{2n+1}.\ 5^{4n+1})$ se divide cu 23.

C. N. Popescu.

R. Observăm că $2^7 = \mathcal{M}23 + 13$, $5^4 = \mathcal{M}23 + 4$ aşa că expresia se poate înlocui cu $(8,\ 13^n + 5.\ 36^n)$. Scoatem $\mathcal{M}23$. Rămâne $(18.\ 13^n + 5.\ 13^n) = 23.\ 13^n$.

8. Să se demonstreze relaţia

$$\sum (a^2 - b^2)\ \frac{\sin^2 C}{c^2} = 0$$

notaţiile fiind cele obişnuite la un triunghiu oarecare.

Ion V. Măţieş.

R. De oarece

$$\frac{\sin^2 C}{c^2} = \frac{\sin^2 B}{b^2} = \frac{\sin^2 A}{a^2}$$

relaţia devine

$$\frac{\sin^2 C}{c^2} \sum (a^2 - b^2) = 0$$

evidentă deoarece

$$\sum (a^2 - b^2) = 0.$$

9. Să se demonstreze că într'un triunghiu oarecare avem relaţia

$$r = R^2 \frac{\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C}{p \operatorname{cotg} C}$$

notaţiile fiind acele obişnuite

IULIAN ALEXIU.

R. Se ştie că

$$S = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4 \operatorname{cotg} C},$$

ce se deduce de altfel uşor din $2S = \frac{a^2}{\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C} = \frac{b^2}{\operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} A} = \frac{c^2}{\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B}$.

Înlocuind în $r = \frac{S}{p}$, valoarea lui S, şi apoi făcând $a = 2R \sin A$ etc...

avem

$$r = 4R^2 \frac{\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C}{4 p \operatorname{cotg} C}$$

ce ne dă relaţia din enunţ.

10. Într'un triunghiu oarecare avem

$$\frac{1}{p^m}\left(a^m r_a^m + b^m r_b^m + c^m r_c^m\right) = 2^{2m} R^m \sum \sin^{2m} \tfrac{1}{2} A.$$

HARALAMB P. IONESCU - BISS.

R. Este generalizarea exerciţiului 49. G.M. XXXV. pag. 318 şi pentru stabilirea ei se întrebuinţează aceleaşi relaţii, ca la loc. citat—, ridicate la puterea m^a.

PROBLEME PROPUSE

3931. Dacă la un patrat de cinci cifre înlocuim cifra mijlocie cu o virgulă, găsim patratul unei fracţii zecimale. Care sunt acele patrate ?

I. IONESCU.

3932. Se cere suma :

$$101 + 21012 + 3210123 \ldots + n\,(n-1) \ldots 21012 \ldots (n-1)n$$

unde $n \leqslant 9$.

C. GEORGESCU.

3933. D-l D. V. ŞERBAN-ULMENI a observat, examinând o tablă de cuburi, că toate grupele de trei cifre care termină un cub perfect, precedate de orice cifră, sunt terminaţiuni de patru cifre ale unui cub (*Gazeta Matematică* Anul XXXV pag. 417). Să se deà o demonstraţie directă a acestei proprietăţi.

I. B. FLORESCU.

3934. Construire un triangle ABC connaissant le milieu d'un côté et deux des contacts du cercle inscrit sur les côtés.

V. THÉBAULT.

3935. Să se dovedească pentru un triunghiu oarecare ABC relaţia

$$\frac{3}{8S} = \frac{a \cdot a_1}{b^2c^2} + \frac{b \cdot b_1}{c^2a^2} + \frac{c \cdot c_1}{a^2b^2},$$

S fiind suprafaţa triunghiului, a, b şi c laturile, iar a_1, b_1 şi c_1 distanţele dela centrul cercului celor nouă puncte la laturi.

CORNELIU N. POPESCU.

*3936. Dacă M şi N sunt două puncte fixe de pe cercul O, să se arate că unghiul format de dreptele lui SIMSON, ale acestor puncte în raport cu oricare din triunghiurile înscrise în cercul O, este constant.

TH. GH. COCEA.

3937. a, b, c fiind laturile unui triunghiu, să se deducă o soluţiune a ecuaţiunii:

$$a\sqrt{(4x^2-b^2)(4x^2-c^2)}+b\sqrt{(4x^2-c^2)(4x^2-a^2)}$$
$$+c\sqrt{(4x^2-a^2)(4x^2-b^2)}=abc.$$

CEZAR COŞNIŢĂ.

3938. La ce ore acele orarului şi minutarului unui ceasornic fac între ele unghiul π/n? Cazurile particulare când acele coincid, sunt în prelungire sau dreptunghiulare.

V. C. POPESCU.

*3939. Să se rezolve ecuaţiunea

$$\sum_0^p \sin px = 0.$$

şi să se generalizeze.

† TR. A. DORDEA.

3940. Să se găsiască curba Γ ştiind că dacă α, β, γ sunt respectiv lungimele razei vectore, a subtangentei şi a subnormalei într'un punct M, avem

$$\frac{2}{\alpha}=\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}.$$

GH. TH. GHEORGHIU.

ERATĂ: 1) La problema *3926* se va ceti: „Să se arate că patrulaterul DOEF *nu* este *niciodată* „paralelogram".

2) La problema *3895* relaţiunea este:

„$\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{CE}=\overline{CB}\cdot\overline{CD}\cdot\overline{AE}$".

3) La problema *3827* relaţiunea a doua este:

„$\sum\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\overline{AI}^2}=\sum\frac{\overline{AI}_a^2}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}$".

4) La problema *3814* se va ceti: „GHEK" în loc de GHKE şi „*diagonala AC*" în loc de diagonala *AD*.

Articolele, notele şi problemele însemnate cu * se referă la matematicile elementare (cursul de liceu).

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Alexiu I. (3910); *Bădescu Em. A.* (3925, 28, 29, A); *Coşniţă C.* (3887); *Crivăţ I. Vl.* (3860, 65, 72, 88, 89, 92, 99); *Cupşa I. C.* (3869, P); *Curchi I.* (3886); *Deac I.* (3911, P); *Dumitraşcu N. R.* (P); *Florescu B. I.* (A, N, P); *Ghişoiu I. P.* (3910); *Haralamb P. E.* (3886); *Jovmir T.* (3886); *Mărgărit Faţe* (3824, 68, 99, 903, 27, 28); *Mendel Bercu* (3865, 88, 99); *Millea G. E.* (3865, 81); *Parepeanu C. I.* (3911); *Popa Gh. Ioan* (3619, 818, 39, 62, 87, 99); *Popescu N. C.* (3785, 886, 87); *Şerban-Ulmeni D.* (3202, 48, 82, 619, 714, 817, 26, 65, 69, 72, 92, 95, 903); *Ungheanu M.* (3282, 865, 68, 69); *Velea M.* (3862, 79, 83).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac deasemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

„Gazeta Matematică“ vinde ani completi broşaţi, cu preţul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX şi XXI care se vând cu preţul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV şi XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecţiuni de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediţia IV revăzută şi adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de Geometrie analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II) Lei 150,—

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamaţiunile şi cererile pentru cărţi din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Regiei Publice Comerciale „Monitorul Oficial şi Imprimeriile Statului“, B-dul Elisabeta 29, Bucureşti I.

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii şi orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie şi expediţie, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, Bucureşti 4.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

BIBLIOTECA CENTRALĂ a „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

ANUL XXXVI.

NUMĂRUL 2. — OCTOMVRIE 1930.

SUMARUL

1. Asupra unor formule pentru calculul cu aproximaţie al ariilor . . . . . *Ernest Abason.*
2. Determinarea eforturilor suferite de un avion in picaj vertical . . . . . *Căpitan I. Linteş.*
3. Note matematice: 6 — 10.
4. Bibliografie.
5. Cereri: 196.
6. Probleme rezolvate: 3275, 3669, 3750, 3838, 3841, 3860, 3904.
7. Exerciţii: 11 — 16.
8. Probleme propuse: 3941 — 3950.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

REGIA M. O., IMPRIMERIA NAŢIONALĂ

1930

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXXVI se compune din D-nii: Colonel **Gh. I. Liteanu** dela Marele Stat Major al Armatei; **G. A. Nichifor**, Doctor în Matematici, Conferenţiar la Universitatea din Bucureşti; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Regiei Publice Comerciale «Monitorul Oficial şi Imprimeriile Statului», Cassier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui GH. ILIESCU, Inginer, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela „*Gazeta Matematică*" („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 62, 78, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 310, 33, 55, 64, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 82, 553, 87, 650, 79, 711, 29, 53, 64, 807, 76, 906, 14. 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 233, 338, 53, 82, 92, 405, 08, 14, 22, 30, 39, 56, 66, 77, 502. 03, 45, 56, 77, 80, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 58, 65, 84, 92, 95, 709, 13, 17, 35, 58, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 56, 3005, 45, 69, 81, 127, 50, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 07, 08, 09, 10, 16, 18, 20, 50, 61, 79, 405, 24, 25, 72, 89, 91, 95 509, 22, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 20, 22, 27, 32, 46, 47, 57, 65, 79, 81, 94, 99, 700, 03, 20, 22, 33, 36, 80, 84, 93, 97, 99, 804, 08, 10, 29, 35, 36, 44, 45, 48, 50, 53, 63, 64, 70, 80, 96, 98, 908, 09, 12, 13, 15, 16, 19, 20, 21, 24, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I—XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procurà dela „*Gazeta Matematică*" („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

ASUPRA UNOR FORMULE PENTRU CALCULUL CU APROXIMAȚIE AL ARIILOR

1. Pentru calculul cu *aproximație* al ariei mărginită de un arc de curbă *oarecare* AB, de ordonatele extreme A*a*, B*b*, și de axa O*x*, una din formulele cele mai uzitate este aceia a lui SIMPSON.

Principiul acestei formule constă în aproximarea diferitelor porțiuni de arce, în care se poate descompune arcul AB, prin arce de parabolă, de gradul al 2-lea, corespunzătoare la două subintervale consecutive, din cele $2n$ în care a fost împărțit segmentul *ab*; din această cauză, și spre deosebire de formula *trapezelor*, formula lui SIMPSON, necesită împărțirea intervalului *(a, b)*, într'un număr *pereche* de părți egale.

Formula lui SIMPSON poate fi însă utilizată și în cazul când intervalul *(a, b)* a fost împărțit într'un număr *nepereche*, $(2n+1)$ de părți egale; în acest caz este suficient a aplica formula lui SIMPSON pentru $2n$ subintervale consecutive, corespunzătoare ordonatelor y_1, $y_2 \ldots y_{2n+1}$ (sau ordonatelor: y_0, $y_1 \ldots y_{2n}$); pentru calculul arii cuprinsă între ordonatele y_0, y_1 (sau y_{2n}, y_{2n+1}), axa O*x* și arcul de parabolă ce trece prin extremitățile lui y_0, y_1, y_2 (sau lui y_{2n-1}, y_{2n}, y_{2n+1}) chestiunea revine la următoarea problemă:

„Să se determine o formulă care să dea aria mărginită de un arc de parabolă AB, *axa* O*x și ordonatele extreme* A*a*, B*b*, — *în funcțiune de aceste ordonate:* y_α, y_β *și de o a treia ordonată* y_γ, *exterioară primelor două, însă astfel aleasă încât aceste trei ordonate să fie echidistante.* (Fig. 2)".

Formula aceasta este cunoscută în manualele germane sub numele de: «*Fünf-Acht-Regel*» și are una din formele:

$$(1) \qquad A = \frac{b-a}{12}(5\,y_\alpha + 8\,y_\beta - y_\gamma)$$

$$(2) \qquad A = \frac{b-a}{12}(5\,y_\beta + 8\,y_\alpha - y_\gamma)$$

după cum ordonata y_γ este la dreapta sau la stânga ariei A.

Scopul prezentelor rânduri este de a atrage atenţia asupra unui instrument de calcul, care pare foarte adecuat chestiunilor privitoare la studiul «*mediei*» unei funcţiuni şi deci şi a *ariilor;* el permite nu numai stabilirea printr'o metodă unitară şi naturală a formulelor cunoscute din teoria quadraturilor funcţiunilor polinomiale, dar şi găsirea de noui rezultate în acest domeniu.

2. Instrumentul de calcul despre care vorbim mai sus, constă din o clasă de polinoame speciale, pe care le putem totdeauna ataşà unui interval (a, b) şi pe care le-am numit «*puteri periodice*»,

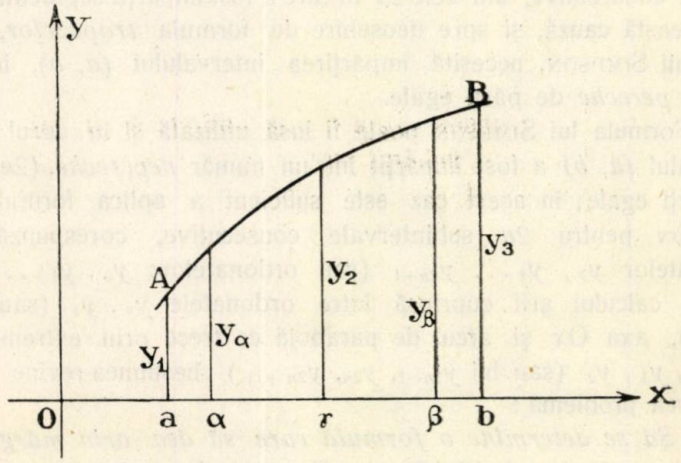


Fig. 1.

deoarece au proprietăţi analoage puterilor lui x şi pentru că joacă un rol important în studiul funcţiunilor periodice [1]).

O parte din rezultatele obţinute prin utilizarea acestei *chei* algebrice au fost publicate în diferite periodice [2]).

Aci mă voiu mărgini să arăt cum şi formula «*Fünf-Acht-Regel*»

1) E. Abason. „*L'étude d'une classe de polynomes et de la correspondance entre les problèmes bilocaux pour les équations différentielles et les equations intégrales* Fredholm" (Thèse. Bucarest 1927).

2) E. Abason. „*Sur le théorème des accroissements finis*" 1) (Bull. de Math. et de Physique pure et appliquée de l'Ecole Polytechnique de Bucarest. I-ère Année No. 1 pag. 4—10. No. 3. pag. 149—152), 2) (Annales scientifiques de l'Université de Jassy. T.XV. fasc. 3-4. pag. 339-340); 3) (Bulletin de la Société des Sciences de Cluj. 1930).

este cuprinsă într'o formulă generală pe care am stabilit-o prin utilizarea *„puterilor periodice"*.

Un rezumat al proprietăţilor fundamentale a *„puterilor periodice"* l-am dat într'o notă: *„Sur les séries de puissances périodiques"* (*„Mathematica"*. Vol. I. pag. 113—120. Cluj. 1929).

Pentru cele ce urmează este necesar a reaminti că puterea periodică de ordinul n: $\pi_n\,(x/a,\ b)$, relativă la intervalul (a, b) o vom notă cu $\overline{x}^{n}$.

3. Pentru aria mărginită de un arc de parabolă AB (fig. 1).

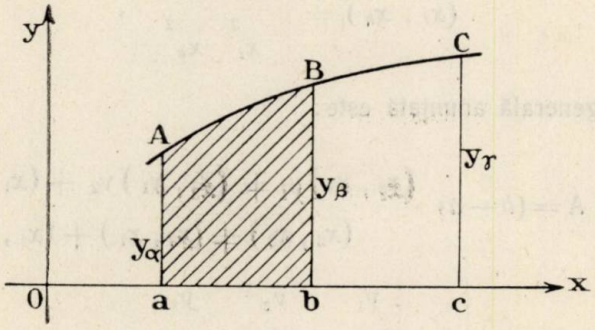


Fig. 2.

s'au dat diferite formule, în funcţiune de *două* sau *trei* ordonate, cuprinse între ordonatele extreme $y_1 = \overline{Aa}, y_3 = \overline{Bb}$; cele mai cunoscute, sunt acelea referitoare la cazul când ordonatele sunt *simetric* aşezate în raport cu ordonata y_2, corespunzătoare mijlocului intervalului, (a, b).

Astfel, însemnând cu α şi β abscisele a două puncte *interioare* lui (a, b) şi *simetric* aşezate faţă de mijlocul intervalului, avem formulele:

$$(1)\qquad A = \frac{b-a}{2}\,(y_\alpha + y_\beta) \qquad\qquad \beta - \alpha = \frac{b-a}{\sqrt{3}},$$

a lui MALEYX;

$$(2)\qquad A = \frac{b-a}{6}\,(y_1 + 4\,y_2 + y_3),$$

a lui MACLAURIN;

$$(3)\qquad A = \frac{b-a}{3}(y_\alpha + y_2 + y_\beta)\quad \beta - \alpha = 0.7071(b-a)$$

a lui TCHEBYCHEFF. etc. [1]).

Toate aceste formule, sunt cazuri particulare ale unei formule generale, pe care am stabilit-o [2]) şi care ni se pare a nu fi fost încă semnalată.

Astfel, dacă x_1, x_2, x_3 sunt abscisele a trei puncte *oarecari* [3]), cuprinse în intervalul (a, b) iar y_1, y_2, y_3 ordonatele corespunzătoare şi dacă însemnăm cu :

$$(4)\qquad (\overline{x_i}\ ,\ \overline{x_k}) = \begin{vmatrix} \overline{x_i} & \overline{x_k} \\ \overline{x_i^2} & \overline{x_k^2} \end{vmatrix},$$

formula generală anunţată este:

$$(5)\quad A = (b-a)\frac{(\overline{x_2}\ ,\ \overline{x_3})y_1 + (\overline{x_3}\ ,\ \overline{x_1})y_2 + (\overline{x_1}\ ,\ \overline{x_2})y_3}{(\overline{x_2}\ ,\ \overline{x_3}) + (\overline{x_3}\ ,\ \overline{x_1}) + (\overline{x_1}\ ,\ \overline{x_2})}$$

sau

$$(5)_1\quad A = (b-a)\frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ \overline{x_1} & \overline{x_2} & \overline{x_3} \\ \overline{x_1^2} & \overline{x_2^2} & \overline{x_3^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \overline{x_1} & \overline{x_2} & \overline{x_3} \\ \overline{x_1^2} & \overline{x_2^2} & \overline{x_3^2} \end{vmatrix}},$$

In cazul special când y_2 este ordonata corespunzătoare mij-

---

1) A se vedeà şi articolul D-lui profesor ION IONESCU : *Calculul aproximativ al ariilor*, publicat în *Gazeta matematică*. Anul XXXIII. Pag. 41, 81, 121. (1928).

2) E. ABASON. «*Sur la quadrature des fonctions paraboliques*» (Bull. Scientifique de l'Ecole Polytechnique de Timişoara, 1930).

3) De fapt, există o restricţie în privinţa distribuţiei acestor puncte (A se vedeà nota precedentă).

$$(3)\qquad A = \frac{b-a}{3}(y_\alpha + y_2 + y_\beta)\quad \beta - \alpha = 0.7071(b-a)$$

a lui TCHEBYCHEFF. etc. [1]).

Toate aceste formule, sunt cazuri particulare ale unei formule generale, pe care am stabilit-o [2]) şi care ni se pare a nu fi fost încă semnalată.

Astfel, dacă x_1, x_2, x_3 sunt abscisele a trei puncte *oarecari* [3]), cuprinse în intervalul (a, b) iar y_1, y_2, y_3 ordonatele corespunzătoare şi dacă însemnăm cu :

$$(4)\qquad (\overline{x_i}\ ,\ \overline{x_k}) = \begin{vmatrix} \overline{x_i} & \overline{x_k} \\ \overline{x_i^2} & \overline{x_k^2} \end{vmatrix},$$

formula generală anunţată este:

$$(5)\quad A = (b-a)\frac{(\overline{x_2}\ ,\ \overline{x_3})y_1 + (\overline{x_3}\ ,\ \overline{x_1})y_2 + (\overline{x_1}\ ,\ \overline{x_2})y_3}{(\overline{x_2}\ ,\ \overline{x_3}) + (\overline{x_3}\ ,\ \overline{x_1}) + (\overline{x_1}\ ,\ \overline{x_2})}$$

sau

$$(5)_1\quad A = (b-a)\frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ \overline{x_1} & \overline{x_2} & \overline{x_3} \\ \overline{x_1^2} & \overline{x_2^2} & \overline{x_3^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \overline{x_1} & \overline{x_2} & \overline{x_3} \\ \overline{x_1^2} & \overline{x_2^2} & \overline{x_3^2} \end{vmatrix}},$$

In cazul special când y_2 este ordonata corespunzătoare mij-

---

1) A se vedeà şi articolul D-lui profesor ION IONESCU : *Calculul aproximativ al ariilor*, publicat în *Gazeta matematică*. Anul XXXIII. Pag. 41, 81, 121. (1928).

2) E. ABASON. «*Sur la quadrature des fonctions paraboliques*» (Bull. Scientifique de l'Ecole Polytechnique de Timişoara, 1930).

3) De fapt, există o restricţie în privinţa distribuţiei acestor puncte (A se vedeà nota precedentă).

locului γ a lui (a, b) iar y_1, y_3 sunt două ordonate simetrice în raport cu aceasta, de abscise α şi β, — formula precedentă ia forma:

$$(6)\quad A = (b-a)\frac{-\bar{\gamma}^2 \cdot y_\alpha + (\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2) y_\gamma - \bar{\gamma}^2 \cdot y_\beta}{\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2 - 2\bar{\gamma}^2}$$

sau

$$(6)_1\quad A = (b-a)\frac{\begin{vmatrix} y_\alpha & y_\gamma & y_\beta \\ \bar{\alpha} & 0 & -\bar{\alpha} \\ \bar{\alpha}^2 & \bar{\gamma}^2 & \bar{\alpha}^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \bar{\alpha} & 0 & -\bar{\alpha} \\ \bar{\alpha}^2 & \bar{\gamma}^2 & \bar{\alpha}^2 \end{vmatrix}}.$$

care cuprinde în cazuri particulare *toate* formulele clasice, ale lui MACLAURIN, TCHEBYSCHEFF, MALEYX, etc.

4. Formula «*Fünf-Acht-Regel*» este şi ea cuprinsă în formula (5), cu toate că una din ordonate este exterioară intervalului (a, b); la calculul lui $(\bar{x}_2, \bar{x}_3)$ şi $(\bar{x}_3, \bar{x}_1)$ trebue numai să luăm ca valori ale lui $\bar{x}_3$ şi $\bar{x}_3^2$, acelea ce rezultă din înlocuirea lui x prin x_3, în polinoamele ordinare $\bar{x}$ şi $\bar{x}^2$ (nu în aceste polinoame, socotite ca periodice, perioada fiind: $b-a$); se găseşte astfel:

$$(\bar{x}_2, \bar{x}_3) = \frac{10}{12}(b-a);\ (\bar{x}_3, \bar{x}_1) = \frac{16}{12}(b-a);\ (\bar{x}_1, \bar{x}_2) = -\frac{2}{12}(b-a)$$

iar formula (5) devine:

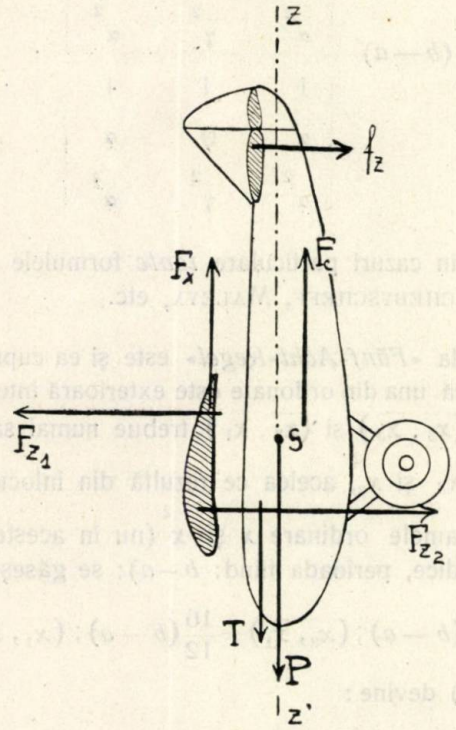
$$A = \frac{b-a}{12}(5\, y_\alpha + 8 \cdot y_\beta - y_\gamma).$$

In mod analog se stabileşte şi varianta acestei formule; se înţelege lesne că procedeul utilizat convine pentru stabilirea şi altor formule analoage cu «*Fünf-Acht-Regel*», însă mai generale.

28 Iulie 1930. ERNEST ABASON.

DETERMINAREA EFORTURILOR SUFERITE DE UN AVION ÎN PICAJ VERTICAL.

Eforturile suferite de un avion în picaj vertical au fost determinate sub diferite forme, în cele ce urmează voiu încercà să le determin pe o cale pur mecanică, profitând astfel de coloanele Gazetei, spre a face o aplicaţie.



Să presupunem un avion în picaj vertical dealungul axei *zz'*, atunci forţele aplicate asupra lui vor fi:

P, greutatea avionului aplicată în centrul de greutate G şi având sensul în jos, dealungul axei *zz'*.

T, tracţiunea moto-propulsorului, paralelă axei *zz'*, cu semnul în jos şi depărtată de distanţa *a*.

F_c, rezistenţele pasive ale avionului fără aripi (numai părţile

pasive ale avionului), paralelă axei zz', cu sensul de jos în sus şi la depărtarea b.

F_x, rezistenţa la înaintare a aripilor, paralelă axei zz', cu sensul de jos în sus şi la o depărtare h.

F_{z1} şi F_{z2}, aproape egale şi de sens contrar, depărtarea între ele fiind l, iar faţă de centrul de greutate fiind la depărtările respective l_1 şi l_2, astfel în cât: $l = l_1 + l_2$. Ele acţionează perpendicular faţă de axa zz'.

f_z, forţă perpendiculară axei zz', aplicată asupra profundorului avionului, la depărtarea d, de centrul de greutate.

Pentru ca avionul să rămână în echilibru pe timpul picajului, trebuie să avem condiţiunile de echilibru:

1) $$F_c + F_x = T + P$$

2) $$F_{z1} = F_{z2} + f_z$$

3) $$T \cdot a + F_{z1} \cdot l_1 + F_{z2} \cdot l_2 + F_c \cdot b = F_x \cdot h + f_z \cdot d.$$

Avionul fiind presupus astfel în cădere la viteza limită (cea mai mare viteză), deci în cazul cel mai defavorabil.

Dintre forţele de mai sus, cunoaştem pe: F_c, T, P şi f_z, rămânând deci să determinăm pe F_x, F_{z1} şi F_{z2}.

Observăm apoi că tocmai forţele necunoscute acţionează asupra aripelor avionului, deci determinându-le exact, vom construi aripa în consecinţă [1]).

Ori din condiţiunile 1), 2) şi 3) determinarea se face uşor şi obţinem:

4) $$F_x = T + P - F_c$$

5) $$F_{z1} = \frac{(T+P-F_c) \cdot h + f_z \cdot (d+l_2) - T \cdot a - F_c \cdot b}{l}$$

6) $$F_{z2} = \frac{(T+P-F_c) \cdot h + f_z \cdot (d-l_1) - T \cdot a - F_c \cdot b}{l}.$$

Aceste formule presupun însă avionul construit deja, ceeace nu este de loc comod, căci tocmai în stabilirea *prototipului* de

1) Ruptura aripilor unui avion pe timpul picajului este încă un frecvent şi periculos accident în aviaţie. Anual—din nenorocire—se înregistrează asemenea accidente şi în scopul de a contribui şi eu cu puţin la înlăturarea lui, am dat acest studiu.

avion avem nevoie să cunoaştem forţele de mai sus. Aici facem să intervină acele binefaceri ale ipotezelor, pe cari însă trebuie să le respectăm sau să le eliminăm în construcţia finală a avionului.

In adevăr presupunem că:

1. Tracţiunea T a moto-propulsorului este nulă, dar elicea învârtindu-se, nu este capabilă de nici un fel de frânare (nu produce nici frânare, nici tracţiune).

2. Presupunem că F_c, trece prin centrul de greutate al avionului, deci $b = 0$.

3. Neglijăm pe l_1 şi l_2 în raport de d.

Cu aceste ipoteze, formulele devin:

7) $$F_x = P - F_c .$$

8) $$F_{z1} = F_{z2} = \frac{(P - F_c) . h + f_z . d}{l} .$$

Mai rămâne acum să determinăm punctele de aplicaţie ale acestor forţe, ceeace—până în prezent—se face numai pe cale experimentală (la tunelul aerodinamic).

Observaţie. Forţa f_z se determină după felul cum ne propunem să facem reglajul profundorului. In orice caz, din cele de mai sus, rezultă că profundorul (stabilizatorul) avionului trebuie reglat negativ, adică cu un unghiu de atac mai mic ca 0°.

CĂPITAN I. LINTEŞ.

NOTE MATEMATICE

6. *Asupra Exerciţiului No. 7. G. M. XXXIII.* Relaţia în orice triunghiu enunţată e inexactă.

1. Se enunţă că

$$p^2 = 2r(6R - r).$$

— Această relaţie nu e satisfăcută de triunghiul echilateral, căci înlocuind $R = 2r$ şi $p = 3r\sqrt{3}$ s'ar obţine

$$27r^2 = 2r(12r - r) = 22r^2 \qquad (?).$$

— Pentru triunghiurile oarecari punând:

$$r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}; \quad Rr = \frac{abc}{4s} \quad r = \frac{abc}{4p}$$

se obține

$$p^2 = 2\left[\frac{3abc}{2p} - \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}\right] = \frac{3abc - 2(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$$

sau

$$p^3 = 3abc - 2p^3 + 2(a+b+c)p^2 - 2(ab+ac+bc)p + 2abc$$

$$\therefore \quad p^3 - 2(ab+bc+ca)p + 5abc = 0.$$

Numai triunghiurile cari ar verifică această relație, verifică și pe aceea din enunțul exercițiului citat.

2. De altfel dacă procedăm după indicațiile date la rezolvirea exercițiului, adică pornind dela identitatea

$$(a+b+c)^3 - (b+c-a)^3 - (a+c-b)^3 - (a+b-c)^3 = 24abc$$

și ținând seamă de

$a^2+b^2+c^2 = 2(p^2-r^2-4Rr)$ și $a^3+b^3+c^3 = 2p(p^2-3r^2-6Rr)$

se ajunge la relația

$$2p^2 - 3(p^2-r^2-4Rr) + p^2 - 3r^2 - 6Rr = \frac{3abc}{2p}$$

$$\text{adică } 12Rr - 6Rr = \frac{3abc}{2p} \text{ sau } 6Rr = \frac{3abc}{2p}$$

identitate verificată prin inlocuirea $abc = 4Rpr$; iar nu la relația din enunțul exercițiului citat.

ADRIAN C. GHEORGHIU.

7. *Generalizarea problemei 3885.*

Dacă se pune:

$$X_i = a_1 x_i^{n-1} + 2a_2 x_i^{n-2} + \ldots + na_n, \quad (i = 1, 2, 3, \ldots n).$$

unde $x_1, x_2, \ldots x_n$ sunt rădăcinile ecuației:

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0,$$

atunci se are:

$$\sum \frac{1}{X_i} = (-1)^{n+1}/a_n; \quad \sum \frac{x^\alpha}{X_{i\,(\alpha=1,2,\ldots,n-1)}} = 0; \quad \sum \frac{x_i^n}{X_i} = (-1)^n.$$

In adevăr:

$$X_i = n(x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n) - [nx^n + (n-1)a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x]$$
$$= nf(x_i) - x_i f'(x_i) = -x_i f'(x_i).$$

Pe de altă parte:

$$f'(x_i) = \lim \left[\frac{f(x)}{x - x_i}\right]_{x \to x_i} = (x_i - x_1)(x_i - x_2)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)$$

şi deci:

$$X_i = -x_i (x_i - x_1)(x_i - x_2)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n).$$

Fie acum determinantul

$$\Delta\alpha = \begin{vmatrix} x_1^\alpha & x_2^\alpha & x_3^\alpha & \ldots & x_n^\alpha \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Se are evident:

$$\Delta_0 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_n)$$
$$(x_2 - x_3)\ldots(x_2 - x_n)$$
$$\ldots (x_{n-1} - x_n)$$

$\Delta\alpha = 0$ pentru $\alpha = 1, 2, 3, \ldots, n-1$;

$$\Delta n = (-1)^{n-1} x_1 x_2 x_3 \ldots x_n \Delta_0 = (-1)^{n-1} \cdot (-1)^n a_n \Delta_0 = -a_n \Delta_0.$$

Dezvoltând pe $\Delta\alpha$ după elementele primei linii şi divizându-l cu Δ_0, se are, după oarecare reduceri:

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta_0} = \sum \frac{x_1 x_2 \ldots x_{i-1} x_i^\alpha x_{i+1} \ldots x_n}{f'(x_i)} = x_1 x_2 \ldots x_n \sum \frac{x_i^\alpha}{x_i f'(x_i)} = -(-1)^n a_n \sum \frac{x_i^\alpha}{X_i}$$

şi deci:

$$\sum \frac{x_i^\alpha}{X_i} = \frac{(-1)^{n+1} \Delta\alpha}{\Delta_0 \, a_n}.$$

Ţinând seama de cele de mai sus, rezultă

$$\sum \frac{1}{X_i} = (-1)^{n+1} \frac{\Delta_0}{\Delta_0\, a_n} = (-1)^{n+1}/a_n$$

$$\sum \frac{x_i^{\alpha}}{X_i} = \frac{0}{\Delta_0\, a_n} = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, n-1,)$$

$$\sum \frac{x_i^n}{X_i} = (-1)^{n+1} \frac{-a_n \Delta_0}{\Delta_0\, a_n} = (-1)^n .$$

Pentru $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ se obţin relaţiile din *Problema 3885* propusă de D-l I. Ionescu, cu oarecare modificări de semne.

II. Fie acum şirul:

$$u_1 = 0 \quad u_2 = 0 \ldots \; u_{n-1} = 0 \quad u_n = 1 \ldots u_r, \ldots$$

ai cărui termeni sunt legaţi prin relaţia de recurenţă

$$u_r + a_1 u_{r-1} + a_2 u_{r-2} + \ldots + a_n u_{r-n} = 0.$$

Ţinând seamă de cele de mai sus şi de articolul D-lui Prof. A. Anghelescu „*Asupra relaţiilor de recurenţă lineare, omogene şi cu coeficienţi constanţi*“ (*Gazeta Matematică* XXX, 160—165) termenii acestui şir sunt daţi de relaţia

$$u_r = (-1)^n \sum \frac{x_i^r}{X_i},$$

unde x_i şi X_i au notaţiile din partea I a acestei note. Deci:

$$u_r = (-1)^n \left[\frac{(-1)^{n+1} \Delta_r}{\Delta_0\, a_n} \right] = - \frac{\Delta_r}{\Delta_0\, a_n},$$

sau:

$$\Delta_r = - u_r\, a_n\, \Delta_0 ,$$

această formulă ne dă mijlocul când cunoaştem pe Δ_0 (determinantul lui Vandermonde relativ la rădăcinile ecuaţiei caracteristice) să calculăm pe Δ_r cu ajutorul termenilor şirului u_r şi invers.

Insă:

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} x_1^r & x_2^r & \ldots & x_n^r \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} x_1 x_2 x_3 \ldots x_n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \ldots & x_n^{n-2} \\ x_1^{r-1} & x_2^{r-1} & \ldots & x_n^{r-1} \end{vmatrix}$$

sau încă

$$\Delta_r = -u_r\, a_n \Delta_0 = (-1)^{n-1}(-1)^n a_n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \\ x_1^{r-1} & x_2^{r-1} & \dots & x_n^{r-1} \end{vmatrix}.$$

De unde această relațiune remarcabilă:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \\ x_1^{r} & x_2^{r} & \dots & x_n^{r} \end{vmatrix} = u_{r+1}\Delta_0 .$$

IOAN B. FLORESCU.

8. *O generalizare.*

In G. M. XXXIII, pag. 363 Inginerul V. CRISTESCU dă câteva proprietăți ale ortopolului.

Vreau să generalizez aici, câteva din acele proprietăți.

Rog a privi figura din G. M. vol. XXXI pag. 448, din articolul meu „Asupra ortopolului".

1°. A', B', C' fiind proecțiile lui A, B, C pe dreapta Δ, ω_a, ω_b, ω_c centrele cercurilor ortopolare relative la dreapta Δ, iar ω ortopolul ei, pentrucă ω se găsește pe cercul $\omega_a\,\omega_b\,\omega_c$ și cercul *a*, *b*, *c*, cele două cercuri fiind omotetice, în raportul $^1/_2$, rezultă că simetricele punctelor A', B', C' față de $\omega_b\,\omega_c$, $\omega_c\,\omega_a$, $\omega_a\,\omega_b$ se confundă în ω. Rezultă deci:

Simetricele unei drepte Δ, *față de laturile triunghiului format de centrele cercurilor ortopolare* $\omega_a\,\omega_b\,\omega_c$, *concură în ortopolul dreptei* Δ, *față de* ABC. Aceasta generalizează teorema lui MEYTELON.

După cum am demonstrat în articolul citat, ω se găsește pe cercul $\omega_a\,\omega_b\,\omega_c$.

2°. Fie A", B", C" proecțiile vârfurilor A, B, C pe o altă

BIBLIOTECA CENTRALĂ a „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

dreaptă Δ', paralela cu Δ și α_1, β_1, γ_1 simetricele punctelor A'', B'', C'', față de laturile *triunghiului ortopolar* $\omega_a\,\omega_b\,\omega_c$ și fie $a_0b_0c_0$ triunghiul format de simetricele dreptei Δ', față de $\omega_a\,\omega_b\,\omega_c$.

Patrulaterele $\omega A'A''\alpha_1$, $\omega B'B''\beta_1$, $\omega C'C''\gamma_1$ fiind trapeze isoscele, rezultă egalitatea segmentelor $\omega\alpha_1$, $\omega\beta_1$, $\omega\gamma_1$. Deci:

ω este centrul cercului $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ și aparține cercului $\omega_a\,\omega_b\,\omega_c$, e ortopolul dreptei Δ și cercul $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ are raza egală cu distanța dintre Δ și Δ'. (V. Thébault).

3°. Dreptele b_0c_0, c_0a_0, a_0b_0 fiind perpendiculare pe $\omega\alpha_1$, $\omega\beta_1$, $\omega\gamma_1$, rezultă că triunghiul $a_0b_0c_0$ *este triunghiul tangențial al triunghiului* $\alpha_1\beta_1\gamma_1$.

4°. Fie φ ortopolul dreptei Δ'.

Se știe că $\omega\varphi$ este perpendiculară pe direcția dreptelor Δ și Δ' și egală cu distanța dintre cele 2 drepte.

Deci φ *se găsește pe cercul cu centrul în ω și de rază distanța* (Δ, Δ') *adică* δ, *adică pe cercul* $\alpha_1\beta_1\gamma_1$.

5°. Rezultă de aici imediat că triunghiul $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, este *asemenea cu* ABC *și ceva mai mult, ortologic,* de oarece perpendicularele din α_1, β_1, γ_1, pe BC, CA, AB concură în φ.

Prin urmare ABC și $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ *sunt invers asemenea.*

6°. *Paralelele prin* α_1, β_1, γ_1 la BC, CA, AB *concură pe cercul* $\alpha_1\beta_1\gamma_1$.

7°. Analog paralelele și perpendicularele prin A, B, C la $\beta_1\gamma_1$, $\gamma_1\alpha_1$, $\alpha_1\beta_1$, concură pe cercul ABC în două puncte diametral opuse.

S.-Lt. Mihail I. Focșeneanu.

9. *Asupra distanței unui punct la o dreaptă în spațiu.* Voi găsi această distanță pe o cale pe care o cred nouă. Fie trei puncte în spațiu $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ cari nu sunt colineare. Notez cu S aria triunghiului $M_0M_1M_2$ și cu S_1, S_2, S_3 proecțiile acestei arii respectiv pe planele $x0y$, $y0z$ și $z0x$. Se știe că

$$S_1 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}, \quad S_2 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} y_0 & z_0 & 1 \\ y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix}, \quad S_3 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} z_0 & x_0 & 1 \\ z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \end{vmatrix}$$

și

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2.$$

Primele relații le scriu mai pe scurt

$$S_1 = \tfrac{1}{2}\,\delta_1 \quad , \quad S_2 = \tfrac{1}{2}\,\delta_2 \quad , \quad S_3 = \tfrac{1}{2}\,\delta_3$$

unde se vede ușor cine sunt δ_1, δ_2, δ_3. Dacă acum d este distanța căutată, atunci $S = \tfrac{1}{2}\,dM_1M_2$ și deci:

$$\tfrac{1}{4}\,d^2\,\overline{MM}_2^2 = \tfrac{1}{4}\,\delta_1^2 + \tfrac{1}{4}\,\delta_2^2 + \tfrac{1}{4}\,\delta_3^2$$

$$\therefore \quad d^2 = \frac{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_2^2}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \,.$$

In particular distanța dela origină la dreaptă este dată de formula

$$d^2 = \frac{(x_1y_2 - y_1x_2)^2 + (y_1z_2 - z_1y_2)^2 + (z_1x_2 - x_1z_2)^2}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \,.$$

GH. TH. GHEORGHIU-GLADIȘ.

10. *Asupra Articolului „Géométrie et Mécanique"*. G. M. XXXV, pag. 281.

Relațiile

$$\cos 2A = \frac{a^2 - 2R^2}{R^2} \quad , \quad \cos 2B = \frac{b^2 - 2R^2}{R^2} \quad , \quad \cos 2C = \frac{c^2 - 2R^2}{R^2}$$

fiind scrise greșit, trebuesc înlocuite prin

$$\cos 2A = \frac{2R^2 - a^2}{2R^2} \quad , \quad \cos 2B = \frac{2R^2 - b^2}{2R^2} \quad , \quad \cos 2C = \frac{2R^2 - c^2}{2R^2}$$

P. I. GHIȘOIU.

De altfel în cuprinsul articolului aplicarea lor s'a făcut corect, sub ultima formă.

COLONEL G. I. LITEANU.

BIBLIOGRAFIE

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XXXVI. No. 5. Mai 1930. New-York. Adunarea din Fevruarie dela New-York, de A. DRESDEN. Adunarea din Aprilie dela Stanford, de T. M. PUTNAM. Adunarea din Aprilie dela New-York, de A. DRESDEN. Adunarea din Aprilie dela Chicago, de M. H. INGRAHAM.

Idem. No. 7. Iulie 1930. Adunarea din Iunie dela Oregon, de T. M. PUTNAM. *Coble* despre geometria algebrică şi funcţiunile totale de O. ZARISKI. Teoria numerelor a lui DICKSON, de E. T. BELL. Noile mecanice, de R. D. CARMICHAEL. LEBESGUE despre integraţiune, de T. H. HILDEBRANDT.

Anales dela Sociedad cientifica Argentina. Tomul CX. Fascicola I. Iulie 1930. Buenos-Ayres. Prezentarea D-lui HADAMARD la Societate de DASSEN. Conferinţă asupra rolului matematicilor în mecanica cerească, de HADAMARD. Studii internaţionale obligatorii de hidraulică din punct de vedere economic, de CH. WAUTERS.

Idem. Fascicola II. August 1930. Coordonate tetracirculare şi pentasferice. Inversiunea, de C. C. DASSEN.

Boletin Matematico. Anul III. No. 6. Iunie 1930. Buenos-Ayres. Proprietăţi de congruienţă ale funcţiunii lui RAMANUJAN $\tau(n)$ de modul 11, de J. R. WILTON.

Boletin Matematico Elemental. Anul I. No. 3. Mai 1930. Buenos-Ayres. In jurul unei construcţii elementare, de B. I. BAIDAFF.

Idem. No. 4. Iunie 1930. Către autorii de soluţii, de *Redacţie*.

Idem. No. 5. Iulie 1930. Geometria o tautologie, de B. I. BAIDAFF.

Revista universitară matematică. X 1(3) Remarques sur les transformations ponctuelles planes au voisinage d'un point où le jacobien est nul, par GASTON JULIA. Câteva cuvinte în legătură cu lecţiile D-lui PAUL MONTEL, de E. CĂLUGĂREANU.

Revista matematică din Timişoara. Anul X. No. 7. Septemvrie 1930. Timişoara. Contribuţii la studiul ecuaţii de gradul II, de I. MURĂROIU.

In memoria lui Traian Lalescu. Timişoara 1930. (Conţine cuvântările rostite la inaugurarea bustului său ridicat la Şcoala Politehnică din Timişoara).

Cours de mecanique de l'Ecole Polytechnique (Paris) par PAUL PAINLEVÉ *et* CH. PLATVIER. Ed. Gauthier-Villars & C-nie Paris 1929.

Acest tratat coprinde partea a doua a cursului de mecanică predat la Şcoala Politechnică din Paris de D-l CH. PLATVIER suplinitorul D-lui P. PAINLEVÉ; el nu se racordează însă — de cât ca materie tratată — cu prima parte

despre care am făcut o dare de seamă în No. 8/930 al G. M., acela fiind făcut personal de D-l Painlevé iar aceasta de D-l Platvier. Metodele de tratare diferă. D-l Painlevé se menţine la metodele clasice: proecţiuni şi întrucâtva vectori, D-l Platvier introduce dela început teoria tensorilor, care, dacă are avantagiul de a obişnui pe cititor cu unele elemente analitice indispensabile în teorii de fizică noi, îngreuează expunerea — cu puţine avantage — pentru teoriile mecanice clasice. Deşi elevii Şcolii Politechnice din Paris au o pregătire matematică mult mai întinsă de cât elevii altor şcoli technice, totuşi, pentru utilizarea noilor elemente, autorul e nevoit a face multe şi intinse digresiuni pur analitice şi indispensabile numai în teoria relativităţei generale. Utilizarea acestui nou instrument — tensorii — în expunerea mecanicei generale a tentat şi pe alţii, astfel în manualul Hütte Ed. 24, în partea de mecanică se introduc dela început tensorii; probabil însă că acest mod de expunere a întâmpinat obiecţiuni, căci în ediţia următoare s'a revenit la vechiul sistem al metodelor clasice.

Cursul D-lui Platvier coprinde patru părţi.

Prima parte se referă la dinamica solidelor indeformabile, cu următoarele capitole: Cap. I tensorii simetrici de al doilea ordin; Cap. II mişcarea unui corp solid cu o axa fixă; Cap. III, IV şi V. mişcarea unui corp solid cu un punct fix, în care se insistă în special asupra fenomenelor giroscopice şi aplicaţiile lor, se tratează exemple numeroase în care calculele sunt duse până la aplicaţii numerice; Cap. VI. mişcarea unui corp solid liber; Cap. VII, mişcarea cu frecare; Cap. VIII, ciocniri şi percusiuni.

Partea a doua se referă la mecanica mediilor continui deformabilile, subdivizată în trei — cărţi. In prima carte, după un nou capitol destul de întins asupra proprietăţilor geometrice şi analitice ale tensorilor, se stabilesc expresiunile tensiunilor într'un mediu continuu deformat. In cartea a doua se studiează mecanica fluidelor, cu următoarele capitole: Cap. I mecanica fluidelor; Cap. II Hydrodinamica, studiu general; Cap. III, circulaţia şi vârtejuri; Cap. IV, mişcări irataţionale; Cap. V, propagarea undelor; Cap. VI, mişcări permanente; Cap. VII, noţiuni de hidraulică; Cap. VIII, rezistenţa fluidelor; Cap. IX, omogenitatea şi similitudinea în hidrodinamică; Cap. X, cazul lichidelor viscoase. Cartea a treia se referă la teoria elastcităţei cu următoarele capitole: Cap. I, relaţiuni între tensiuni şi deformaţiuni; Cap. II, echilibrul elastic al corpurilor izotrope; Cap. III, micile mişcări ale corpurilor elastice; Cap. IV, aplicaţii; Cap. V, problema lui St. Venant; Cap. VI. corpuri elastice cu 1 şi 2 dimensii; Cap. VII, rezistenţa materialelor.

Partea a treia coprinde noţiuni sumare de maşini şi aviaţie, subdivizată în două cărţi. Într'o carte se descriu în mod sumar diferite tipuri de maşini, apoi o teorie sumară a regulării mişcării maşinelor; cartea a doua tratează despre aviaţie, se expun rezultatele principale în ceeace priveşte rezistenţa aerului, sborul fără motor şi sborul cu motor.

Ultima parte, cea mai interesantă şi originală, se referă la Mecanica lui Newton şi Mecanica lui Einstein. Ea se subdivide în 3 cărţi. In prima carte se reia şi se discută postulatele fundamentale — generale, geometrice şi mecanice — pe care se bazează mecanica clasică newtoniană şi rezultatele la care

se ajunge; într'un prim capitol examinează axiomele, în altul noţiunea de forţă, şi în alte două noţiunele de spaţiu absolut şi de timp absolut. In cartea a doua se ocupă cu teoria relativităţei restrânse în 3 capitole; într'un prim capitol se expun principiile şi axiomele pe care se bazează această disciplină, în capitolul următor se tratează noţiunea de spaţiu şi timp în mecanica relativistă, iar într'un ultim capitol despre continuul spaţio-temporar şi universul lui MINKOVSKI. In cartea a doua se ocupă de teoria relativităţei generale în 2 capitole, un capitol de natură analitică tratând calculul tensorilor pentru transformări oarecare, iar în capitolul următor se expun legile gravităţii după noua concepţie.

Cursul D-lui PLATVIER este interesant de citit pentru cei ce voesc să-şi complecteze cunoştinţele de mecanică generală.

A. G. I.

CERERI

196. Regretatul TRAIAN DORDEA, profesor la Liceul din Oltenița, începuse să se ocupe de pregătirea unei noi ediţii a *Culegerii de probleme de Trigonometrie* a lui VASILE CRISTESCU. Ni s'a comunicat de către părinţii lui DORDEA că o parte din cărţile lui şi din materialul adunat pentru revizuirea acelei Culegeri se află la unii din foştii săi elevi, dela acel Liceu. Ar fi de dorit ca acel material şi cărţi să fie restituit *Gazetei Matematice* spre a se puteà hotărî continuarea pregătirii nolei ediţiuni, utilizându-se şi munca depusă de TRAIAN DORDEA.

ION IONESCU.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3275. *Fie* D, E, F *punctele de contact ale cercului înscris în triunghiul* ABC *cu laturile* a, b, c; D_a, E_b, F_c *punctele de contact ale cercurilor exînscrise în unghiurile* A, B, C *respectiv cu laturile* a, b, c. *Fie apoi* Γ *şi* γ *punctele lui* GERGONNE *şi* NAGEL *a triunghiului* ABC, *iar*

θ_1	*intersecţia dreptelor*	EF	şi	$E_b F_c$
θ_2	„	„	FD	„	$F_c D_a$
θ_3	„	„	DE	„	$D_a E_b$
Q′	„	„	$E_b F$	„	EF_c
Q″	„	„	$F_c D$	„	FD_a
Q‴	„	„	$D_a E$	„	DE_b

Se cere să se demonstreze că grupurile de puncte (Q', A, Q_2, Q_3), (Q'', B, Q_1, Q_3), (Q''', C, Q_2, Q_1), (Γ, γ, Q', Q'', Q''') *sunt colineare şi că aria fiecăruia din triunghiurile* DEF *şi* $D_a E_b F_c$ *este jumătate din aria triunghiului* $Q_1Q_2Q_3$.

ATH. RADEV.

I. *Soluţie şi generalizare*, dată de D-l R. GOORMAGHTIGH.

Nous allons montrer que l'énoncé est encore exact si les points de GERGONNE et NAGEL sont remplacés par deux points conjugués isotomiques quelconques Γ et γ et si les points D, E, F et D_a, E_b, F_c sont les pieds des transversales angulaires AΓ, BΓ, CΓ et Aγ, Bγ, Cγ.

Soient (α, β, γ) et $\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}\right)$ les coordonnées barycentriques de Γ et γ.

Les équations de EF, $E_b F_c$ sont

$$-\beta\gamma x + \gamma\alpha y + \alpha\beta z = 0 \quad , \quad -\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

et les coordonnées de Q_1 sont dès lors

$$(1) \quad x = -\alpha(\beta^2 - \gamma^2) \quad , \quad y = \beta(\gamma^2 - \alpha^2) \quad , \quad z = \gamma(\alpha^2 - \beta^2),$$

et celles de Q_2, Q_3, par conséquent,

$$(2) \quad x = \alpha(\beta^2 - \gamma^2) \quad , \quad y = -\beta(\gamma^2 - \alpha^2) \quad , \quad z = \gamma(\alpha^2 - \beta^2),$$

$$(3) \quad x = \alpha(\beta^2 - \gamma^2) \quad , \quad y = \beta(\gamma^2 - \alpha^2) \quad , \quad z = -\gamma(\alpha^2 - \beta^2).$$

D'autre part, les équations de EF_c et FE_b s'écrivent

$$-\alpha\gamma x + \gamma\beta y + \alpha^2 z = 0 \quad , \quad -\alpha\beta x + \alpha^2 y + \beta\gamma z = 0,$$

et Q' a pour coordonnées

$$(4) \qquad \frac{1}{\alpha}(\alpha^4 - \beta^2\gamma^2) \quad , \quad \beta(\alpha^2 - \gamma^2) \quad , \quad \gamma(\alpha^2 - \beta^2).$$

Il résulte de (2), (3), (4) que Q', A, Q_2, Q_3 appartiennent à la droite

$$\gamma(\alpha^2 - \beta^2)y + \beta(\gamma^2 - \alpha^2)z = 0.$$

D'autre part, les coordonnées (4) vérifient l'équation

$$\alpha x(\beta^2 - \gamma^2) + \beta y(\gamma^2 - \alpha^2) + \gamma z(\alpha^2 - \beta^2) = 0$$

de la droite Γγ.

Les aires des triangles DEF, $D_a E_b F_c$, $Q_1Q_2Q_3$ sont propor-

tionnelles aux déterminants Δ_1, Δ_2, Δ_3 dont les éléments sont les coordonnées barycentriques absolues des sommets de ces triangles.

Or, ces coordonnées sont, pour D, E, F,

$$0, \frac{\beta}{\beta+\gamma}, \frac{\gamma}{\beta+\gamma}\ ;\ \frac{\alpha}{\alpha+\gamma}, 0, \frac{\gamma}{\alpha+\gamma}\ ;\ldots,$$

pour D_a, E_b, F_c

$$0, \frac{\gamma}{\beta+\gamma}, \frac{\beta}{\beta+\gamma}\ ;\ \frac{\gamma}{\alpha+\gamma}, 0, \frac{\alpha}{\alpha+\gamma}\ ;\ldots,$$

pour Q_1, Q_2, Q_3

$$\frac{\alpha(\beta^2-\gamma^2)}{(\beta-\gamma)(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}, \frac{\beta(\gamma^2-\alpha^2)}{(\beta-\gamma)(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}, \frac{\gamma(\alpha^2-\beta^2)}{(\beta-\gamma)(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}.$$

On déduit de là, par un calcul facile,

$$\Delta_1 = \Delta_2 = -\tfrac{1}{2}\Delta_3 = \frac{2\alpha\beta\gamma}{(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)},$$

ce qui établit la dernière partie de l'énoncé.

II. *Soluţie elementară.* Fie triunghiul ABC în care $c<a<b$. Se ştie că avem

$$\left.\begin{aligned} AF = AE = CE_b = BF_c &= p-a \\ BF = BD = CD_a = AF_c &= p-b \\ CD = CE = BD_a = AE_b &= p-c \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

unde p este semiperimetrul triunghiului ABC. Ţinând seamă de (1) şi urmărind figura se găsesc cu uşurinţă încă egalităţile:

$$DD_a = b-c \quad ; \quad EE_b = a-c \quad ; \quad FF_c = b-a. \qquad (2)$$

Consider triunghiul AEF tăiat de transversala $F_c Q_1 E_b$ şi obţin

$$\frac{Q_1F}{Q_1E}\cdot\frac{E_bE}{E_bA}\cdot\frac{F_cA}{F_cF} = 1$$

de unde, ţinând seamă de (1) şi (2), se găseşte

$$\frac{Q_1F}{Q_1E}\cdot\frac{a-c}{p-c}\cdot\frac{p-b}{b-a} = 1$$

$$\therefore \qquad \frac{Q_1F}{Q_1E} = \frac{b-a}{a-c}\cdot\frac{p-c}{p-b}. \qquad (3)$$

Triunghiul $F_c AE_b$ tăiat de FQ E dă

$$\frac{Q_1F_c}{Q_1E_b} = \frac{b-a}{a-c}. \tag{4}$$

Triunghiul BDF tăiat de $Q_2F_2D_a$ dă

$$\frac{Q_2F}{Q_2D} = \frac{b-a}{b-c} \cdot \frac{p-c}{p-a}. \tag{5}$$

La fel $F_c BD_a$ tăiat de Q_2FD dă

$$\frac{Q_2F_c}{Q_2D_a} = \frac{b-a}{b-c} \tag{6}$$

In mod analog triunghiul DEC tăiat de $Q_3E_b D_a$ şi triunghiul $E_b D_a C$ tăiat de Q_3ED dau respectiv

$$\frac{Q_3E}{Q_3D} = \frac{a-c}{b-c} \cdot \frac{p-b}{p-a}. \tag{7}$$

$$\frac{Q_3E_b}{Q_3D_a} = \frac{a-c}{b-c}. \tag{8}$$

Triunghiul FAE_b tăiat de $Q'EF_c$ şi triunghiul $F_c AE$ tăiat de $Q'E_b F$ dau respectiv

$$\frac{Q'E}{Q'F_c} = \frac{a-c}{b-c} \cdot \frac{p-a}{p-c}. \tag{9}$$

$$\frac{Q'F}{O'E_b} = \frac{b-a}{a-c} \cdot \frac{p-a}{p-b} \tag{10}$$

Cu aceste elemente se poate trece acum la rezolvarea problemei.

1°. Q', A, Q_2, Q_3 *sunt colineare.* Fie M intersecţia lui Q_2Q_3 cu $F_c E_b$. Triunghiul $D_a F_c E_b$ tăiat de transversala Q_2Q_3M dă

$$\frac{ME_b}{MF_c} \cdot \frac{Q_2F_c}{Q_2D_a} \cdot \frac{Q_3D_a}{Q_3E_b} = 1.$$

De unde ţinând seamă de (6) şi (8)

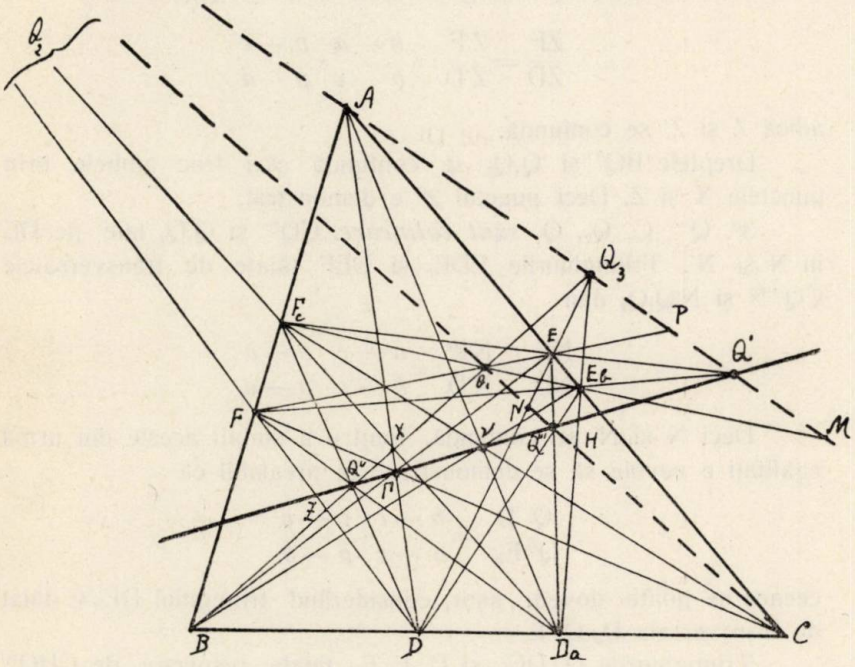
$$\frac{ME_b}{MF_c} = \frac{a-c}{b-a}. \tag{11}$$

Fie M' intersecția lui AQ' cu $F_c E_b$. Triunghiul $F_c FE_b$ tăiat de AQ'M' dă

$$\frac{M'E_b}{M'F_c} \cdot \frac{AF_c}{AF} \cdot \frac{Q'F}{Q'E_b} = 1$$

sau ținând seamă de (1), (2) și (10)

$$\frac{M'E_b}{M'F_c} = \frac{a-c}{b-a} \tag{12}$$



Comparând (11) cu (12) rezultă că M și M' se confundă.

Fie P intersecția lui Q_2Q_3 cu FE și P' intersecția lui AQ' cu FE. Triunghiul DEF tăiat de Q_2Q_3P și triunghiul FF_cE tăiat de AP'Q' dă, dacă se ține seamă de relațiunile stabilite la început

$$\frac{PF}{PE} = \frac{P'F}{P'E} = \frac{b-a}{a-c} \cdot \frac{p-c}{p-b}$$

ceeace dovedește că P și P' se confundă.

Dreptele Q_2Q_3 și AQ' trecând prin punctele M și P se suprapun, deci Q', A, Q_2, Q_3 sunt colineare.

2°. Q″, B, Q_1, Q_3 *sunt colineare.* Fie X intersecția lui BQ″ cu $D_a F_c$ și X′ intersecția lui Q_1Q_3 cu $D_a F_c$. Triunghiul $FF_c D_a$ tăiat de BQ″X și triunghiul $F_c D_a E_b$ tăiat de Q_3Q_1X' dau

$$\frac{XF_c}{XD_a} = \frac{X'F_c}{X'D_a} = \frac{b-a}{b-c}$$

ceeace arată că X și X′ se confundă.

Fie Z și Z′ intersecția lui DF cu BQ″ și cu Q_3Q_1. Triunghiul DFF_c tăiat de BZQ″ și triunghiul DFE tăiat de Q_3Q_1Z' dau

$$\frac{ZF}{ZD} = \frac{Z'F}{Z'D} = \frac{b-a}{b-c} \cdot \frac{p-c}{p-a}$$

adică Z și Z′ se confundă.

Dreptele BQ″ și Q_1Q_3 se confundă căci trec ambele prin punctele X și Z. Deci punctul 2° e demonstrat.

3°. Q‴, C, Q_2, Q_1 *sunt colineare.* CQ‴ și Q_1Q_2 taie pe DE în N și N′. Triunghiurile EDE_b și DEF tăiate de transversalele CQ‴N și $N'Q_1Q_2$ dau

$$\frac{NE}{ND} = \frac{N'E}{N'D} = \frac{a-c}{b-c} \cdot \frac{p-b}{p-a}.$$

Deci N și N′ se confundă. Pentru a stabili aceste din urmă egalități e nevoie să se demonstreze în prealabil că

$$\frac{Q'''D}{Q'''E_b} = \frac{b-c}{a-c} \cdot \frac{p-c}{p-b}$$

ceeace se poate dovedi ușor, considerând triunghiul $DE_b C$ tăiat de transversala $D_a Q'''E$.

Triunghiurile $D_a DE_b$ și $D_a F_c E_b$ tăiate respectiv de CHQ‴ și de $H'Q_1Q_2$ dau

$$\frac{HE_b}{HD_a} = \frac{H'E_b}{H'D_a} = \frac{a-c}{b-c}$$

H′ se confundă cu H, deci CQ‴ se așterne pe Q_1Q_2.

4°. Γ, γ, Q′, Q″, Q‴ *sunt colineare.* Punctul Γ al lui Gergonne este punctul de concurență al cevienelor AD, BE, CF, iar punctul γ al lui Nagel este întâlnirea cevienelor AD_a, BE_b, CF_c. Proprietatea 4° se poate demonstră cu ajutorul transversalelor ca și primele 3 proprietăți. Se va arătà de exemplu că ΓQ″ și γΓ taie

pe AB în același punct considerând triunghiurile $DF_c A$ și CFF_c tăiate de transversalele $\Gamma Q''$ și $\gamma\Gamma$, apoi că aceleași drepte mai trec prin un punct comun de pe BC, etc.

Iată însă și o altă cale, dată de D-l I. C. VASILIU în soluția sa. Dreptele AB și AC formează în ansamblul lor o conică în care se află înscris exagonul $E_b FCF_c EB$. Conform teoremei lui PASCAL, laturile opuse ale acestui exagon ($E_b F$, $F_c E$), (FC, EB), (CF_c, BE_b) se întâlnesc în 3 puncte Q', Γ, γ colineare. Analog se arată că $\Gamma\gamma$ trece prin Q'' și Q'''.

5°. Se observă mai întâi că triunghiurile DEF și $D_a E_b F_c$ sunt egale ca triunghiuri reciproce. Fie S suprafața unuia din aceste triunghiuri, de exemplu DEF și S_1 suprafața triunghiului $Q_1Q_2Q_3$, ale cărui vârfuri se află pe laturile lui DEF în dispoziția examinată la cazul II în nota TEOREMA 642 din *Gazeta Matematică*, Vol. XXXV pag. 371. Conform formulei (5) din acea notă, vom avea pentru calculul raportului suprafețelor triunghiurilor DEF și $Q_1Q_2Q_3$.

$$\frac{Q_1E}{Q_1F} = \frac{d}{d'} \quad ; \quad \frac{Q_2F}{Q_2D} = \frac{f}{f'} \quad ; \quad \frac{Q_3D}{Q_3E} = \frac{g}{g}$$

$$\frac{S_1}{S} = \frac{dfg + d'f'g'}{(d+d')(f'-f)(g-g')}.$$

Dar ținând seamă de (3), (5) și (7), din prezenta soluție, se găsește imediat

$$dfg + d'f'g' = 2(a-c)(b-a)(b-c)(p-a)(p-b)(p-c) \quad (13)$$

$$\left.\begin{aligned} d + d' &= (a-c)(p-b) + (b-a)(p-c) = (b-c)(p-a) \\ f' - f &= (b-c)(p-a)(b-a)(p-c) = (a-c)(p-b) \\ g - g' &= (b-c)(p-a) - (a-c)(p-b) = (b-a)(p-c) \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Inmulțind egalitățile (14) între ele se găsește

$$(d+d')(f'-f)(g-g') = (a-c)(b-a)(b-c)(p-a)(p-b)(p-c) \quad (15)$$

Inpărțind (13) prin (15) avem

$$\frac{S_1}{S} = 2$$

adică tocmai punctul 5° al problemei.

COL. GH. BUICLIU.

Observaţiuni. 1°. Am dat soluţia I aşa de desvoltată, dar elementară, pentru a încurajà pe corespondenţii de licee, ale căror programe de matematici sunt sub un alt nivel decât acela corespunzător datei la care s'a propus problema 3275. Ei pot conchide din această soluţie că teorema transversalelor, aplicată cu atenţie, le dă putinţa să rezolve unele din cele mai grele probleme în care se cere să se arate că mai multe puncte sunt colineare, mai cu seamă când acele puncte sunt obţinute prin intersecţii de linii drepte.

Evident că făcând apel la cunoştinţe mai înaintate, soluţia se simplifică mult şi se câştigă în eleganţă. Dovedesc aceasta frumoasa soluţie şi generalizare a D-lui R. Goormaghtigh publicată după originalul trimis de D-sa, fără nici o modificare.

2°. D-l I. C. Vasiliu, pe când erà în clasa VIII particulară, a rezolvat complect primele 4 puncte ale problemei cu ajutorul teoremei lui Pascal, observând că prin picioarele D, E, F şi D_a , E_b , F_c a 2 sisteme de ceviene isotomice trece o conică, d-sa a demonstrat că primele 4 proprietăţi sunt generale oricare ar fi punctele Γ şi deci γ.

Punctul al cincilea nu l-a demonstrat riguros, căci s'a bazat pe teorema 642 din *F. G. M*, fără a observà că acea teoremă stabileşte o formulă negenerală. (A se vedeà nota matematică dela pagina 371 din *Gazeta Matematică* Vol. XXXV).

3°. C. C. Popovici, pe când erà în clasa VIII, Lic. Internat din Iaşi, a dat o bună soluţie primelor 4 puncte cu ajutorul coordonatelor baricentrice, fără a reuşi să deà rezultatele sub forma aşa de concisă şi elegantă a D-lui R. Goormaghtigh. D-sa nu a încercat să rezolve şi ultimul punct.

4°. Considerarea punctelor de tangenţă a laturilor unui triunghiu cu cercurile tritangente, face să se găsească foarte multe puncte colineare sau drepte concurente. Corespondenţii vor puteà uşor găsi de exemplu că atât dreptele DQ_1, EQ_2, FQ_3 cât şi $D_a\,Q_1$, $E_b\,Q_2$, $F_c\,Q_3$ sunt concurente.

In legătură cu probleme de asemenea natură, se poate consultà *Géométrie* par E. Rouché et Ch. de Comberousse, septième édition, pagina 484 şi următoarele.

Gh. B.

---

*PROBLEMA 3669. *Cercul osculator într'un punct al unei spirale logaritmice, taie raza vectoare într'un punct, care descrie tot o spirală logaritmică.*

Sub.-Locot. M. Focşeneanu.

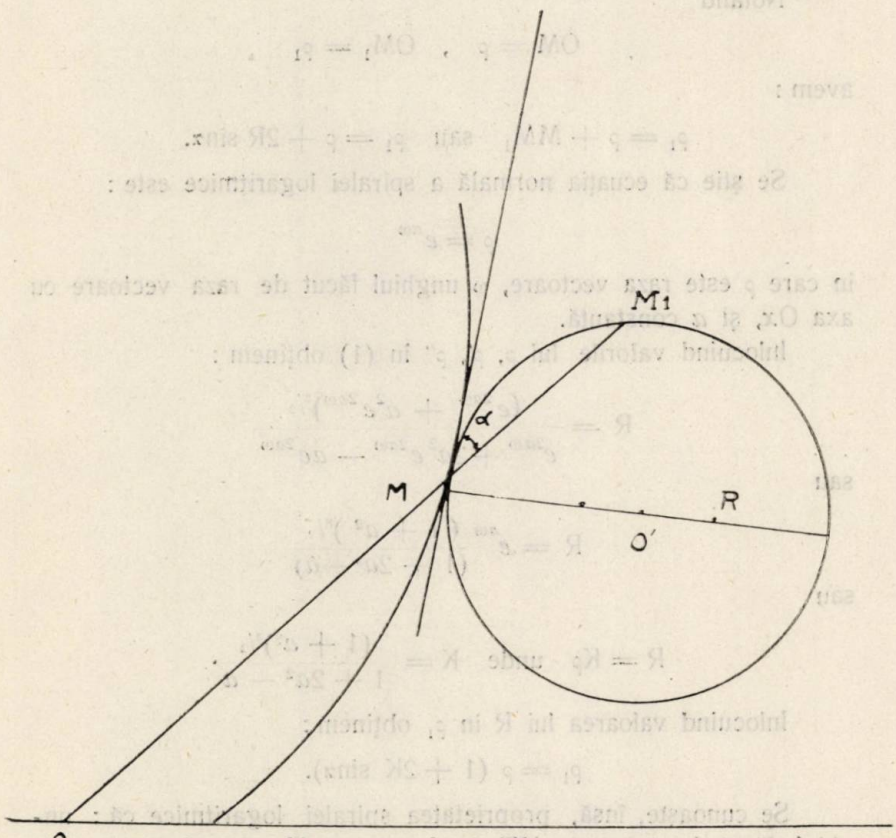
Soluţie dată de Sub.-Locot. Burlacu Eugeniu.

Se ştie că cercul osculator într'un punct la o curbă, se confundă cu cercul de curbură în acel punct al curbei. Razele lor sunt

deci egale și valoarea ei pentru curba raportată la axe carteziene este :

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''},$$

iar când curba este raportată la axe polare expresia ei este :



$$(1) \qquad R = \frac{(r^2 + r'^2)^{3/2}}{r^2 + 2r'^2 - rr''}.$$

Fie M un punct al spiralei, fie α unghiul făcut de raza vectoare cu tangenta în punctul M, deci $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ unghiul făcut de raza vectoare cu normala în M.

Fie M_1 punctul unde raza vectoare taie cercul oscular. Ţinând seamă de proprietatea că centrul cercului oscular se află pe normală, putem scrie:

$$MM_1 = 2R \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2R \sin\alpha.$$

Notând

$$OM = \rho \quad , \quad OM_1 = \rho_1$$

avem:

$$\rho_1 = \rho + MM_1 \quad \text{sau} \quad \rho_1 = \rho + 2R \sin\alpha.$$

Se ştie că ecuaţia normală a spiralei logaritmice este:

$$\rho = e^{a\omega}$$

în care ρ este raza vectoare, ω unghiul făcut de raza vectoare cu axa Ox, şi a constantă.

Inlocuind valorile lui ρ, ρ', ρ'' în (1) obţinem:

$$R = \frac{(e^{2a\omega} + a^2 e^{2a\omega})^{3/2}}{e^{2a\omega} + 2a^2 e^{2a\omega} - ae^{2a\omega}}$$

sau

$$R = e^{a\omega} \frac{(1 + a^2)^{3/2}}{(1 + 2a^2 - a)}$$

sau

$$R = K\rho \quad \text{unde} \quad K = \frac{(1 + a^2)^{3/2}}{1 + 2a^2 - a}.$$

Inlocuind valoarea lui R în ρ_1 obţinem:

$$\rho_1 = \rho\,(1 + 2K \sin\alpha).$$

Se cunoaşte, însă, proprietatea spiralei logaritmice că: unghiul făcut de tangenta MT, într'un punct M al curbei, cu raza vectoare OM, este constant, oricare ar fi punctul M pe curbă.

Rezultă deci că $\sin\alpha = ct$, deci notând $1 + 2K\sin\alpha = K$ rezultă

$$\rho_1 = K\rho.$$

Cum ρ_1 este tocmai raza vectoare a punctului M_1, rezultă că M descrie tot o spirală logaritmică.

Observaţii:

Se cunoaşte că la orice curbă există relaţia

$$\operatorname{tg} V = \frac{\rho}{\rho'}$$

unde V este unghiul făcut de tangenta MT, în punctul M, cu raza vectoare OM.
In cazul spiralei descrisă de M

$$V = \alpha \text{ de unde } \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{a}.$$

Se vede deci proprietatea cunoscută a spiralei logaritmice.
In cazul spiralei descrisă de punctul M_1

$$\operatorname{tg} V = \frac{1}{a}.$$

Rezultă deci că pentru un acelaş unghiu ω tangentele în punctele M şi M_1 fac acelaş unghiu cu raza vectoare OM (OM_1), adică tangentele sunt paralele.

SUB-LOCOT. BURLACU EUGENIU.

PROBLEMA 3750. *Să se construiască curba a cărei ecuaţie polară este*

$$(a\cos\omega + b\sin\omega)\,\rho + a\cos 2\omega + b\sin 2\omega = 0,$$

a *şi* b *fiind două lungimi pozitive.*

COL. GH. BUICLIU.

Soluţie dată de D-l E. I. DUMITRESCU.
Din ecuaţia dată se scoate

$$\rho = -\frac{\frac{a}{b}\cos 2\omega + \sin 2\omega}{\frac{a}{b}\cos\omega + \sin\omega}$$

sau punând

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha,$$

se găseşte

$$\rho = -\frac{\operatorname{tg}\alpha\cos 2\omega + \sin 2\omega}{\operatorname{tg}\alpha\cos\omega + \sin\omega} = (-1)\frac{\sin(\alpha + 2\omega)}{\sin(\alpha + \omega)}.$$

Sub această formă se vede că ecuația dată este un caz particular al ecuației

$$\rho = k\frac{\sin(\alpha - 2\theta)}{\sin(\alpha + \theta)}$$

care reprezintă o strofoidă. Deci curba dată este o strofoidă oblică a cărei construcție este cunoscută.

Semnele afectate lui *a* și *b* în enunț, sunt date pentru a evită discuția care ar fi rezultat din considerarea semnelor.

*PROBLEMA 3838. *Să se arate că suma cuburilor expresiunilor:*

$$3x^2y^2 \quad ; \quad x(x^2 + 2y^3) \quad ; \quad y(2x^3 + y^3)$$

este un patrat perfect.

Deasemenea, știind că avem:

$$xy(x + y) = 1,$$

atunci suma cuburilor expresiunilor:

$$x^3 - y^3 + 3xy(2x + y) \quad \text{și} \quad y^3 - x^3 + 3yx(2y + x)$$

este un cub perfect.

CĂPITAN I. LINTEȘ.

1. *Soluție* dată de D-nii: PETRE I. GHIȘOIU (anul preparator Sc. Politecnică, București), EMILIAN MEREUȚĂ, MIHAIL VELEA și NICOLAE DONCIU.

Avem:

$$E_1 = (3x^2y^2)^3 + [x(x^3 + 2y^3)]^3 + [y(2x^3 + y^3)]^3.$$

Sau dezvoltând, găsim:

$$E_1 \equiv 27.x^6y^6 + (x^3 + y^3)^4 + 9x^3y^3(x^3 + y^3)^2 + x^3y^3(x^6 + y^6).$$

Făcând apoi substituțiile:

$$x^3 = a \quad \text{și} \quad y^3 = b$$

găsim:

$$E_1 \equiv a^4 + 14a^3b + 51a^2b^2 + 14ab^3 + b^4$$
$$\equiv (a^2 + 7ab + b^2)^2.$$

Deci:

$$E_1 \equiv (x^6 + 7x^3y^3 + y^6)^2.$$

Aşa dar prima parte a problemei este demonstrată.

Notând apoi cu:

$$A \equiv x^3 - y^3 + 3xy(2x + y) = (x - y)^3 + 9x^2y$$

$$B \equiv y^3 - x^3 + 3yx(2y + x) = (y - x)^3 + 9xy^2.$$

Rămâne să calculăm:

$$E_2 = A^3 + B^3$$

$$= (A + B)(A^2 - AB + B^2).$$

Dar cum:

$$A + B = 9xy(x + y) = 9$$

$$A^2 = (x - y)^6 + 18x^2y(x - y)^3 + 81x^4y^2$$

$$B^2 = (x - y)^6 - 18xy^2(x - y)^3 + 81x^2y^4$$

$$AB = -[(x - y)^6 + 9xy(x - y)^4 - 81x^3y^3].$$

Inlocuind şi făcând reducerile, obţinem:

$$E_2 = 27[x^6 + 3x^5y + 6x^4y^2 + 7x^3y^3 + 6x^2y^4 + 3xy^5 + y^6]$$

$$= [3(x^2 + xy + y^2)]^3.$$

Ceeace demonstrează partea a doua a problemei.

2. *Soluţie* dată de D-l Virgiliu C. Popescu (student, Toulouse).

In „*Théorie des nombres*" par Edmond Lucas (tome premier la pag. 128) găsim identitatea:

$$aX^3 + bY^3 + a^2b^2Z^3 \equiv V^2$$

când:

$$X = x(ax^3 + 2by^3)$$

$$Y = y(by^3 + 2ax^3)$$

$$Z = 3x^2y^2$$

$$V = a^2x^6 + 7abx^3y^3 + b^2y^6.$$

Ori pentru cazul particular când :

$$a = b = 1$$

avem prima parte a problemei 3838 demonstrată.

Deasemenea în acelaş volum la pag. 132 găsim identitatea :

$$X^3 + Y^3 = A \cdot Z^3$$

pentru :

$$X = x^3 - y^3 + 3xy\,(2x + y)$$
$$Y = y^3 - x^3 + 3yx\,(2y + x)$$
$$Z = 3\,(x^2 + xy + y^2)$$
$$A = xy\,(x + y).$$

Ori pentru cazul când:

$$A = xy\,(x + y) = 1$$

avem partea a doua a problemei demonstrată.

D-l Haralamb Ionescu a rezolvat problema, făcând însă o greşală de grupare la partea a doua.

PROBLEMA 3841. *Să se găsească patratul perfect de cinci cifre de forma* ababa.

Col. Gh. Buicliu.

Soluţie dată de D-l P. I. Ghişoiu (Şc. Politecnică, Bucureşti).

In *Gazeta Matematică* Vol. XXXV pagina 193, la soluţia problemei 3791, s'a găsit că patratele de forma *cbaba* sunt

10404 ; 41616 ; 69696 şi 93636.

Din aceste patrate singurul care îndeplineşte condiţia

$$c = a$$

este

$$69696 = 264^2,$$

care este unica soluţie a problemei 3841.

Notă. 1°. Au rezolvat bine problema utilizând tabelul ultimelor 3 cifre ale unui patrat din nota D-lui Col. Gh. Buicliu, publicată în *Gazeta Matematică* Vol. XXXIII pag. 138, sau tabelul ultimelor 4 cifre ale unui patrat din nota

D-lui P. N. Teodor, publicată în *Gazeta Matematică* Vol. XXXV pag. 134, D-nii: P. I. Ghişoiu, H. St. Dăscălescu (Şc. Politecnică, Bucureşti), N. Aldea (student); Gh. O. Zamfirescu, M. D. Creţu, D. H. Nicolau, M. N. Constantinescu, I. C. Voicu, H. P. Ionescu, G. P. Boerescu, G. I. Mladin, N. Gh. Voicu, I. P. Bucur, C. M. Grecu, D. Şerban-Ulmeni, A. C. Raicu (Lc. Oltenița) C. Avram, R. I. Răşcanu (Bacău), Gh. Oprescu, A. H. Halperin, I. G. Bulancea (Lc. Internat, Iaşi), D. C. Ionescu-Ţiu (Şc. Militară de Geniu), G. Sâmbotin şi D. Şt. Mischimen.

2°. Au rezolvat bine problema, utilizând ultimele 2 cifre ale unui partat date în *Culegere de Probleme* (Aritmetica XXXIX) D-nii: I. C. Parepeanu (Lc. Meşotă Braşov), V. I. Aliman, N. N. Radoveneanu, N. Gr. Rentea, M. Ungheanu, C. M. Stănescu, A. D. Ghiţescu, C. I. Ştefănescu, I. Gh. Popa (Lc. Oltenița), I. C. Şova (Lc. Bacău), E. Mereuţă (Şc. Politecnică din Bucureşti), M. Ţincra (Şc. Politecnică din Timişoara), M. Velea (student), I. I. Petrică (Şc. de Conductori Tecnici, Cluj), C. Gh. Lupescu (Lc. Roman), I. C. Boian (Tg.-Mureş), M. D. Motoc, C. N. Russe şi Gh. A. Apostolescu.

3°. Au dat soluţie bună pe alte căi, şi încercări, D-nii; V. C. Popescu (student, Toulouse), V. I. Crivăţ (Lc. Matei Basarab, Bucureşti), Gh. M. Păun, I. N. Aliman, I. P. Gheorghe, D. M. Popescu (Lc. Oltenița), Gh. E. Colfescu (Lc. Şincai, Bucureşti), T. St. Marinescu şi N. N. Costache.

4°. D-l H. P. Ionescu arată că problema 3841 este cuprinsă în exerciţiul 70 din *Gazeta Matematică* Vol. XXXIII pag. 397.

5°. D-nii H. P. Ionescu şi D. Şerban-Ulmeni au căutat şi patratele de forma *abcba* şi au găsit soluţiile

$$101^2 = 10201 \; ; \; 111^2 = 12321 \; ; \; 121^2 = 14641$$
$$202^2 = 40804 \; ; \; 264^2 = 69696 \; ; \; 307^2 = 94249$$
$$212^2 = 44944$$

printre care se găseşte şi soluţia problemei 2841.

PROBLEMA 3860. *Să se stabilească identitatea*

$$\frac{\sum_{k=1}^{k=2n} \sin ka}{\sum_{k=1}^{k=2n} \cos ka} = \operatorname{tg} \frac{2n+1}{2} a.$$

I. Murăroiu.

I. *Soluţie* dată de D-nii: Vladimir I. Crivăţ şi Cristian I. Râmniceanu. Notând cu E prima parte a identităţei şi grupând la cele două sume termenii egali depărtaţi de extremi, avem

$$E = \frac{(\sin a + \sin 2na) + [\sin 2a + \sin(2n-1)a] + \ldots + [\sin na + \sin(n+1)a]}{(\cos a + \cos 2na) + [\cos 2a + \cos(2n-1)a] + \ldots + [\cos na + \cos(n+1)]}.$$

Transformând sumele din paranteze în produse, rezultă

$$E=\frac{2\sin\frac{2n+1}{2}a\cos\frac{2n-1}{2}a+2\sin\frac{2n+1}{2}a\cos\frac{2n-3}{2}a+\ldots+2\sin\frac{2n+1}{2}a\cos\frac{a}{2}}{2\cos\frac{2n+1}{2}a\cos\frac{2n-1}{2}a+2\cos\frac{2n+1}{2}a\cos\frac{2n-3}{2}a+\ldots+2\cos\frac{2n+1}{2}a\cos\frac{a}{2}}$$

sau

$$E=\frac{2\sin\frac{2n+1}{2}a\left[\cos\frac{2n-1}{2}a+\cos\frac{2n-3}{2}a+\ldots+\cos\frac{a}{2}\right]}{2\cos\frac{2n+1}{2}a\left[\cos\frac{2n-1}{2}a+\cos\frac{2n-3}{2}a+\ldots+\cos\frac{a}{2}\right]}=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}a}{\cos\frac{2n+1}{2}a}$$

$$\therefore \quad E=\operatorname{tg}\frac{2n+1}{2}a.$$

II. *Soluție* dată de D-nii: Vintilă P. Săvescu, Gh. Oprescu, G. Sâmbotin, I. C. Savin.

Avem

$$\sum_{k=1}^{k=2n}\sin ka=\sin a+\sin 2a+\sin 3a+\ldots+\sin[a+(2n-1)a].$$

Inmulțind ambele părți cu $2\sin\frac{a}{2}$, rezultă

$$2\sin\frac{a}{2}\sum_{k=1}^{k=2n}\sin ka=2\sin a\sin\frac{a}{2}+2\sin 2a\sin\frac{a}{2}+\ldots+2\sin[a+(2n-1)a]\sin\frac{a}{2}$$

Dar

$$2\sin a\sin\frac{a}{2}=\cos\left(a-\frac{a}{2}\right)-\cos\left(a+\frac{a}{2}\right)$$

$$2\sin 2a\sin\frac{a}{2}=\cos\left(a+\frac{a}{2}\right)-\cos\left(a+\frac{3a}{2}\right)$$

$$2\sin 3a\sin\frac{a}{2}=\cos\left(a+\frac{3a}{2}\right)-\cos\left(a+\frac{5a}{2}\right)$$

. . . . . .

$$2\sin[a+(2n-1)a]\sin\frac{a}{2}=\cos\left(a+\frac{4n-3}{2}a\right)-\cos\left(a+\frac{4n-1}{2}a\right).$$

Adunând obținem

$$2\sin\frac{a}{2}\sum_{k=1}^{k=2n}\sin ka=\cos\left(a-\frac{a}{2}\right)-\cos\left(a+\frac{4n-1}{2}a\right)$$

$$2\sin\frac{a}{2}\sum_{k=1}^{k=2n}\sin ka=2\sin\left[a+\frac{2n-1}{2}a\right]\sin na.$$

De unde

$$(1)\qquad \sum_{k=1}^{k=2n}\sin ka=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}a\,.\,\sin na}{\sin\frac{a}{2}}.$$

In mod analog obținem

$$(2)\qquad \sum_{k=1}^{k=2n}\cos ka=\frac{\cos\frac{2n+1}{2}a\,\sin na}{\sin\frac{a}{2}}.$$

Impărțind (1) prin (2) avem

$$\frac{\sum_{k=1}^{k=2n}\sin ka}{\sum_{k=1}^{k=2n}\cos ka}=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}a}{\cos\frac{2n+1}{2}a}=\operatorname{tg}\frac{2n+1}{2}a$$

c. c. t. d.

Domnii N. Aldea, C Dan, H. Șt. Dăscălescu, Ad. C. Gheorghiu, P. I. Ghișoiu, Cristache M. Grecu, M. I. Grossu, C. D. Ionescu-Țiu, H. P. Ionescu-Biss, Negrea A. Mircea-Leonte, Em. Mereuță, Corn. N. Popescu, M. Gh. Stavrat, M. I. Velea, N. O. Zaharia au trimis soluții analoage, stabilind relațiile (1) și (2) din relațiuni analoage cunoscute din „*Exercices d'Algèbre, d'Analyse et de Trigonométrie par Aubert et Papelier pag. 329, No. 642*“ ori din „*Eléments de Trigonométrie par F. J. C. pag. 66*“.

III. *Soluție* dată de D-l Cezar Coșniță (Bârlad).

Ținând seamă de formulele lui Euler:

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i},\ \cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},$$

avem

$$\sum_{k=1}^{k=2n} \sin ka = \frac{e^{ia}(1+e^{ia}+\ldots+e^{i(2n-1)a})-e^{-ia}(1+e^{-ia}+\ldots+e^{-i(2n-1)a})}{2i} =$$

$$\frac{e^{ia}\dfrac{e^{i2na}-1}{e^{ia}-1}-e^{-ia}\dfrac{e^{-i2na}-1}{e^{-ia}-1}}{2i} = \frac{(e^{i2na}-e^{-i2na})-(e^{i(2n+1)a}-e^{-i(2n+1)a})+e^{ia}-e^{-ia}}{2i(2-e^{-ia}-e^{ia})} =$$

$$\frac{\sin 2na-\sin[2n+1]a+\sin a}{4\sin^2\dfrac{a}{2}} = \frac{\sin\dfrac{2n+1}{2}a\cos\dfrac{2n-1}{2}a-\sin\dfrac{2n+1}{2}a\cos\dfrac{2n+1}{2}a}{2\sin^2\dfrac{a}{2}}$$

adică

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{k=2n} \sin ka = \frac{\sin\dfrac{2n+1}{2}a\sin na}{\sin\dfrac{a}{2}};$$

în mod analog se obține și relația (2); iar prin împărțire se ajunge la relația din enunț.

Observări:

1. Soluții mai puțin riguroase s'au primit dela D-nii: G. M. Păun și G. O. Zamfirescu.

2. Identități ce pot rezultă a remarcat D-l C. Coșniță:

$$\left(\sum_{k=1}^{k=2n}\cos ka\right)^2+\left(\sum_{k=1}^{k=2n}\sin ka\right)^2=\left(\frac{\sin na}{\sin\dfrac{a}{2}}\right)^2$$

$$\left(\sum_{k=1}^{k=2n}\cos ka\right)^2-\left(\sum_{k=1}^{k=2n}\sin ka\right)^2=\cos(2n+1)\frac{\sin^2 na}{\sin^2\dfrac{a}{2}}$$

$$2\left(\sum_{k=1}^{k=2n}\cos ka\right)\left(\sum_{k=1}^{k=2n}\sin ka\right)=\sin(2n+1)\frac{\sin^2 na}{\sin^2\dfrac{a}{2}}.$$

3. Enunțul acestei probleme fusese propus de autor sub forma

$$\frac{\sum_{k=1}^{k=2^n}\sin ka}{\sum_{k=1}^{k=2^n}\cos ka} = \operatorname{tg}\frac{2^n+1}{2}a.$$

O eroare de tipar a schimbat enunţul problemei, alegându-se soluţionarea sub forma cum s'au primit soluţii. De altfel demonstraţiile de mai sus, se aplică şi ultimei identităţi, în mod analog.

COLONEL G. I. LITEANU.

PROBLEMA 3904. *Se dă patrulaterul* ABCD *înscris în cercul* O, *având unghiul* B *egal cu unghiul* D.

Se construeşte raza OM *astfel ca*

$$\sphericalangle MOC = \sphericalangle DAC - \sphericalangle ACB$$

şi apoi perpendiculara MP *pe* AC.

Să se arate că avem $\overline{BD} = 2 . \overline{OP}$.

N. ALDEA.

1. *Soluţie* dată de D-nii: M. M. CIOC, V. I. CRIVĂŢ şi I. PARREPEANU. Patrulaterul dat fiind inscriptibil şi având unghiurile opuse B şi D egale, rezultă că diagonala AC e un diametru al cercului.

Ducem raza punctului B şi scoborâm perpendiculara ON pe cealaltă diagonală BD a patrulaterului.

Rezultă imediat

$$DN = NB$$

$\sphericalangle DBC = \sphericalangle DAC$, ca înscrise în acelaş segment de cerc

$\sphericalangle OBC = \sphericalangle ACB$, triunghiul BOC, fiind isoscel.

Din figură se deduce

$$\sphericalangle NBO = \sphericalangle DBC - \sphericalangle OBC = \sphericalangle DAC - \sphericalangle ACB = \sphericalangle MOC$$

triunghiurile dreptunghice ONB şi OPM având ipotenuzele egale şi câte un unghiu ascuţit egal, sunt egale.

Deci

$$\overline{OP} = \overline{BN} = \tfrac{1}{2}\,\overline{BD}$$

$$\therefore \quad BD = 2 . \overline{OP}.$$

2. *Soluţie* dată de D-nii: C. N. AVRAM, I. C. CUPŞA, P. I. GHIŞOIU şi L. M. A. NEGREA.

Notăm

$$\sphericalangle DAC = \alpha,\ \sphericalangle ACB = \beta,\ \sphericalangle MOC = \gamma.$$

Avem

$$\alpha - \beta = \gamma. \qquad (1)$$

Patrulaterul fiind inscriptibil, teorema lui PTOLOMEU dă:

$$\overline{AB} \cdot \overline{DC} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} = \overline{AC} \cdot \overline{BD} \qquad (2)$$

cum B şi D sunt egale şi suplimentare, avem $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 90^0$.

Triunghiurile dreptunghice ADC şi ABC dau

$$\overline{AD} = \overline{AC}\cos\alpha \qquad \overline{AB} = \overline{AC}\sin\beta$$

$$\overline{DC} = \overline{AC}\sin\alpha \qquad \overline{BC} = \overline{AC}\cos\beta$$

introducând aceste valori în (2), simplificând şi ţinând seama de (1), se obţine

$$\overline{BD} = \overline{AC}\ (\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta) = \overline{AC}\cos(\alpha-\beta) = \overline{AC}\cos\gamma \qquad (3)$$

triunghiul dreptunghic MOP dă

$$\overline{OP} = \overline{OM}\cos\gamma$$

$$\therefore\ 2\overline{OP} = 2 \cdot \overline{OM}\cos\gamma = \overline{AC}\cos\gamma. \qquad (4)$$

Comparând (3) cu (4) deducem

$$\overline{BD} = 2 \cdot \overline{OP}$$

c. c. t. d.

3. Alte soluţii date de D-nii: A. B. BĂDESCU, I. DEAC, E. MEREUŢĂ şi I. PAREPEANU.

I. S. A.

*EXERCIŢII

11. Care sunt patratele de 6 cifre la care primele trei cifre formează un patrat?

MIHAIL I. G. UNGHEANU.

R. Se ia un patrat de trei cifre de exemplu 100 şi se caută a se extrage rădăcina lui patrată, după ce îi pune trei cifre *a, b, c* la dreapta. Prima cifră e sigură, deseori şi a doua, iar a treia cere uneori încercări. Se găsesc astfel soluţiile: 100489, 121104, 121801, 144400, 169744, 196249, 225625, 256036, 289444, 324900, 361201, 400689, 484416, 529984, 576081, 625681, 729316, 784996, 900601.

12. Se cer patratele *dmszu* în care *sm* e cubul lui *d*.

D. ŞERBAN-ULMENI.

R. Primele trei cifre sunt 372 sau 446. Deci patratele sunt $372zu$ sau $446zu$. Căutăm a scoate rădăcina patrată şi găsim numai soluţia $37249 = 193^2$.

13. Se cer patratele *ababcd* în care *a, b, c, d* sunt diferite.

ION C. VOICU.

R. Formăm numere de tipul dat de exemplu $2525cd$ şi căutăm să-i extragem rădăcina patrată. Se găsesc soluţiunile: 161604, 363609, 474721, 595984, 868624. Cu cifre egale mai avem: 232324, 646416, 999296.

14. Să se rezolve ecuaţia

$$x^3 - \frac{p^2 + 4Rr + r^2}{2R} x^2 + \frac{8S^2 p}{abc} x - \frac{8S^3}{abc} = 0$$

când are o rădăcină triplă, (notaţiile obişnuite într'un triunghiu ABC).

I. C PAREPEANU.

R. Ţinând seamă de relaţiile dintre rădăcini şi coeficienţi, precum şi de relaţiile cunoscute

$$h_a + h_b + h_c = \frac{p^2 + 4Rr + r^2}{2R}$$

$$h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a = \frac{8S^2 p}{abc}$$

$$h_a h_b h_c = \frac{8s^3}{abc}$$

se deduce că rădăcinile sunt înălțimele h_a , h_b , h_c , cari sunt egale în cazul triunghiului echilateral.

15. Să se rezolve sistemul

$$\cos x + \cos y = 1$$

$$\cos^2 x + \cos^2 y - \cos x = 0.$$

I. C. Savin.

R. Inlocuind pe $\cos x$ din întâia în a 2-a din ecuații, se obține

$$\cos y\,(2\cos y - 1) = 0.$$

De unde

$\cos y = 0 \;\therefore\; y = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$, precum și $\cos x = 1 \;\therefore\; x = 2k\pi$

și

$\cos y = \frac{1}{2} \;\therefore\; y = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ precum și $\cos x = \frac{1}{2} \;\therefore\; x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$.

16. In orice triunghiu. avem:

$$S = \frac{R(r_b\, r_c \sin A + r_c\, r_a \sin B + r_a\, r_b \sin C)}{r_a + r_b + r_c}$$

notațiile referindu-se la elementele unui triunghiu.

Ioan Gh. Popa.

R. Inlocuind $\Sigma r_a = 4R + r$, $r_a = \frac{S}{p-a}$, etc., $\sin A = \frac{a}{2R}$, etc., membrul al doilea devine:

$$\frac{R\,\Sigma r_b\, r_c \sin A}{\Sigma r_a} = \frac{a r_b\, r_c + b r_c\, r_a + c r_a\, r_b}{2(4R + r)} = \frac{p[a(p-a) + b(p-b) + c(p-c)]}{2(4R + r)} =$$

$$= \frac{p[2p^2 - (a^2 + b^2 + c^2)]}{2(4R + r)} = \frac{2pr(4R + r)}{2(4R + r)} = S.$$

PROBLEME PROPUSE

3941. Se cer două numere a căror sumă de patrate este 18720 şi cel mai mare comun divizor 12.

I. Ionescu.

*3942. Admiţând că suma şi produsul a două numere este respectiv mai mare ca un acelaş număr dat, în ce caz fiecare din acele numere este mai mare decât numărul dat?

Căpitan I. Linteş.

3943. Se cer patratele de patru cifre la care ştergând cifrele extreme ne rămâne un patrat de două cifre.

P. N. Vasilescu.

*3944. Să se arate că există un punct din care cercurile BCD, CDA, DAB, ABC se văd sub acelaş unghiu.

D. Barbilian.

*3945. Să se construiască un triunghiu ABC, care să fie înscris într'un cerc dat O, să aibă unghiul BAC egal cu un unghiu dat α şi astfel ca laturile lui $\overline{BA}$ şi $\overline{BC}$ să treacă respectiv prin două puncte date A_1 şi C_1.

Să se discute problema în legătură cu poziţiunile punctelor date A_1 şi C_1 deducându-se:

a) Cazurile în care problema are o singură soluţiune;

b) Cazurile în care problema este imposibilă.

O. N. Ţino.

3946. Fie A', B', C' punctele unde înălţimile triunghiului ABC intersectează a doua oară cercul O, circumscris acestui triunghiu şi fie A_1, B_1, C_1 punctele diametral opuse punctelor A', B', C'. Notăm cu A_2, B_2, C_2 respectiv intersecţiile perechilor de drepte (BB_1, CC_1), (CC_1, AA_1), (AA_1, BB_1). Să se demonstreze că:

1°. O este centrul cercului lui Euler al triunghiului $A_2B_2C_2$.

2°. Triunghiurile A'B'C' şi $A_2B_2C_2$ sunt ortologice.

C. Ciorănescu.

*3947. Se dă ecuaţia

$$3m^2x^2 - (m-3)\,x + m^2 = 0.$$

Ce valori trebue să dăm lui m pentru ca o rădăcină să fie de trei ori mai mică ca cealaltă.

COLONEL G. I. LITEANU.

3948. Să se simplifice expresiunea

$$E = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} + \frac{\sqrt{2\sqrt{3}+3} + \sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2\sqrt{3}-3}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}$$

şi să i se calculeze valoarea cu patru zecimale exacte,

ION S. ANTONIU.

3949. Să se găsească limita sumei

$$\frac{\sin a \sin 2a}{\sin 3a} + \frac{\sin\frac{a}{3}\sin\frac{2a}{3}}{3\sin a} + \frac{\sin\frac{a}{9}\sin\frac{2a}{9}}{9\sin\frac{a}{3}} + \ldots + \frac{\sin\frac{a}{3^n}\sin\frac{2a}{3^n}}{3^n\sin\frac{a}{3^{n-1}}} + \ldots$$

când n creşte nemărginit.

V. DÂNGĂ.

3950. Să se arate că avem o egalitate de forma

$$\int_0^a e^{x^2}\,dx = \frac{\theta}{a}\left(e^{a^2}-1\right)$$

pentru $a \geqslant 0$ şi $\frac{1}{2} \leqslant \theta \leqslant 1$.

A. ANGELESCU.

BIBLIOTECA CENTRALĂ a „ASOCIAŢIUNII" SIBIIU

Articolele, notele şi problemele însemnate cu * se referă la matematicile elementare (cursul de liceu).

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Antonescu N. (3685, 813, 95); *Antoniu Eleonora* (3868, 69, 84, 86, 929, 30); *Avram N. C.* (3903, 25, 27); *Boian C. I.* (2461, 3059, 450, 718, 826, 86, 88, 89, 95, 901, 07, 10, 25, 27, 28, 29, P); *Burlacu N. E.* (N, P); *Cioc M. Marius* (3925, 28, 29); *Constantinescu-Buzău* (3928, 29, 30); *Crivăţ I. Vl.* (3886, 922, 26, P, R); *Deac Iuliu* (3923, 25, 28, 29, 30); *Donciu N.* (3579, P); *Faţe Mărgărit* (3826, 929, R); *Florescu B. I.* (914, 1092, 379, 637, 733, 2529, N); *Geară T. I.* (3903); *Gheorghiu C. Ad.* (3867); *Goormaghtigh R.* (A, N, P); *Ionescu-Biss P. Har.* (3365, 792, 837, 87, 92, 928, P); *Ionescu S. Victor* (3928); *Lupescu Gh. C.* (3922, 25, 28, 29, 30, P); *Marcu A. T.* (3923); *Mărgărit Tănase* (3819); *Mendel B.* (E); *Mereuţă Em.* (3795, 895, 901, 25, 28, 29); *Mihăileanu N. N.* (3895, 99, 922, 26, 27, 28, 29, R); *Millea G. E.* (3837, 83); *Negrea A. M. Leonte* (3925, 28, 29, 30); *Nicolicescu N. Gh.* (3819, 902); *Novacu Valeriu* (P); *Parepeanu C. I.* (3895, 903, 11); *Popa Gh. Ioan* (3554, 668, 768, 92, 98, 868, 79, 902, 03, 22, 23, E, N, P); *Popescu C. Virgil* (E, N, P, R); *Popescu N. Corneliu* (3867); *Radu Fl.* (3923, 25, 28); *Savin C. Ioan* (3747, 840, 60, 68, 69, 77, 79, 86, 88, 902, 03, 25, 27, 28, 29, P); *Şerban-Ulmeni D.* (3792, 862, 902, R); *Şova C. I.* (3823, 922, 28); *Stan I. A.* (3650, 837, P); *Thèbault V.* (A, P); *Ungheanu M.* (E); *Velea Mihail* (3248, 87, 819, 49, 902, 22, 23, 25, 27, 28, 29, 30, N, P); *Zamfirescu G. I.* (3895, 903, 14, 25 26).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie**, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie. Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă*, împreună cu figurile respective, care se fac deasemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală*, iar scrisul se va face pe dimensiunea cea mică, ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

„Gazeta Matematică“ vinde ani completi broşaţi, cu preţul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX şi XXI care se vând cu preţul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV şi XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecţiuni de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediţia IV revăzută şi adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de Geometrie analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).

Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II) Lei 150,—

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamaţiunile şi cererile pentru cărţi din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Regiei Publice Comerciale „Monitorul Oficial şi Imprimeriile Statului“, B-dul Elisabeta 29, Bucureşti I.

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii şi orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie şi expediţie, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, Bucureşti 4.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXVI.

NUMĂRUL 3. — NOEMVRIE 1930.

SUMARUL

1. Sur une affinité complexe et sur quelques propriétés du triangle . . . . . *R. Goormaghtigh.*
2. Théorèmes de Ptolémée . . . . . *V. Thébault.*
3. Asupra numărului indicatorilor unui număr dat . . . . . *T. Popoviciu.*
4. Concursul Gazetei Matematice.
5. Note matematice: 11 — 13.
6. Chestiuni de examen.
7. Bibliografie.
8. Cereri: 197 — 198.
9. Probleme rezolvate: 1364, 3685, 3718, 3761, 3786, 3923.
10. Exerciţii: 17 — 19.
11. Probleme propuse: 3951 — 3960.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

REGIA M. O., IMPRIMERIA NAŢIONALĂ

1930

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXXVI se compune din D-nii: Colonel **Gh. I. Liteanu** dela Marele Stat Major al Armatei; **G. A. Nichifor**, Doctor în Matematici, Conferenţiar la Universitatea din Bucureşti; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Regiei Publice Comerciale «Monitorul Oficial şi Imprimeriile Statului», Cassier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui GH. ILIESCU, Inginer, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela „*Gazeta Matematică*" („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 62, 78, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 310, 33, 55, 64, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 82, 553, 87, 650, 79, 711, 29, 53, 64, 807, 76, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 233, 338, 53, 82, 92, 405, 08, 14, 22, 30, 39, 56, 66, 77, 502, 03, 45, 56, 77, 80, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 58, 65, 84, 92, 95, 709, 13, 17, 35, 58, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 56, 3005, 45, 69, 81, 127, 50, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 07, 08, 09, 10, 16, 18, 20, 50, 61, 79, 405, 24, 25, 72, 89, 91, 95, 509, 22, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 20, 22, 27, 32, 47, 57, 65, 79, 81, 94, 99, 700, 03, 20, 22, 33, 36, 80, 84, 93, 99, 804, 08, 10, 29, 35, 36, 44, 45, 48, 50, 53, 64, 70, 80, 96, 98, 908, 09, 13, 15, 16, 20, 21, 24, 32, 33, 34, 35, 37, 40, 42, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I—XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procură dela „*Gazeta Matematică*" („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

SUR UNE AFFINITÉ COMPLEXE ET SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DU TRIANGLE

1. Soit (F_1) une figure plane rapportée aux axes rectangulaires Ox, Oy, et désignons par (x_1, y_1) les coordonées d'un point quelconque de (F_1); faisons correspondre à (F_1) une figure (F) par une affinité ayant Ox pour axe, établissant entre les coordonées (x, y) des points de la nouvelle figure et celles des points correspondants de l'ancienne, les relations

$$x = x_1 \quad , \quad y = y_1 \sqrt{-1}.$$

A deux directions perpendiculaires dans la figure (F_1) et déterminant, par conséquent, sur la droite de l'infini une division harmonique avec les points cycliques, correspondent dans la figure (F) deux directions symétriques par rapport aux bissectrices des axes Ox, Oy.

2. Ceci posé, considérons dans la figure (F_1) un triangle $A_1B_1C_1$ et la droite de SIMSON Δ_1 d'un point M_1 du cercle $A_1B_1C_1$. On sait que Δ_1 est perpendiculaire à sa transversale réciproque Δ'_1 dans le triangle $A_1B_1C_1$. Si l'on dispose la figure de façon que Δ_1 coïncide avec l'axe d'affinité, les transformées de Δ_1 et Δ'_1 coïncideront avec ces mêmes droites, et, les droites de SIMSON d'un triangle étant les seules droites perpendiculaires à leurs transversales réciproques, les transformées Δ et Δ' de Δ_1 et Δ'_1 (on a ici $\Delta \equiv \Delta_1$, $\Delta' \equiv \Delta'_1$) sont encore des droites de SIMSON dans le triangle ABC transformé du triangle ABC :

Si l'on prend comme axe d'affinité la droite de SIMSON *d'un point du cercle circonscrit à un triangle* $A_1B_1C_1$ *dans la figure* (F_1), *cet axe est encore droite de* SIMSON *dans le triangle transformé de* $A_1B_1C_1$ *dans la figure* (F) [1]).

3. Déterminons le transformé M de M_1. Aux perpendiculaires abaissées de M_1 sur les côtés du triangle $A_1B_1C_1$ correspondent dans le triangle ABC, d'après la remarque du $n^0 1$, les symétriques par rapport à Δ des perpendiculaires élevées sur les côtés de ABC en leurs intersections avec Δ.

1) Cette propriété est générale pour le cas d'un rapport d'affinité quelconque.

Le point M_1 *dont* Δ_1 *est droite de* SIMSON *dans le triangle* $A_1B_1C_1$ *a pour transformé, dans le triangle* ABC, *le symétrique* M, *par rapport à* Δ, *du point* P *du cercle* ABC *dont* Δ *est droite de* SIMSON.

4. Dans (F_1) la symétrique, par rapport à Δ_1, de la parallèle à Δ_1 menée par M_1 passe par l'orthocentre H_1 de $A_1B_1C_1$. Comme toutes les hyperboles équilatères circonscrites à $A_1B_1C_1$ passent par H_1 et que le cercle ABC est la transformée d'une de ces hyperboles, on a donc cette proposition :

L'orthocentre du triangle $A_1B_1C_1$ *a pour transformé le point où le cercle* ABC *est recoupé par la parallèle menée par le point* P *à la droite de* SIMSON *de ce point.*

5. On peut dès lors déduire des propriétés de l'orthocentre du triangle $A_1B_1C_1$ un grand nombre de propriétés du triangle ABC ; nous n'en indiquerons que quelques-unes.

On sait que deux droites rectangulaires menées par l'orthocentre d'un triangle déterminent sur les côtés trois segments dont les milieux sont en ligne droite [1]).

Cette droite enveloppe la conique inscrite au triangle et ayant pour foyers l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit [2]) ; par conséquent, sa transversale réciproque pivote autour du centre du cercle circonscrit.

Utilisant les développements qui précèdent, on en deduit immédiatement ce théorème :

Si par les extremités P, P′ *d'un diamètre du cercle circonscrit à un triangle on mène des parallèles* δ, δ' *aux droites de* SIMSON *respectives* Δ, Δ' *de ces points, ces parallèles déterminent sur les côtés du triangle trois segments dont les milieux sont sur une ligne droite.*

La transversale réciproque de cette droite passe par le complémentaire de l'intersection Q *de* δ, δ'.

6. Appliquant remarque du $n^0 1$, on montre aisément que ce dernier théorème est encore vrai lorsqu'on remplace, δ, δ' par deux droites isogonales dans l'angle (δ, δ').

1) Théorème de DROZ-FARNY (voir *Gazeta Matematica,* R. GOORMAGHTIGH, *Sur l'orthopôle et sur des théorèmes de* DROZ-FARNY *et* NEUBERG, XXXV, pag. 202 ; V. THÉBAULT, *sur un théorème de* DROZ-FARNY, XXXV, pag. 441).

2) NEUBERG, *Mathesis,* 1913, pag. 262.

7. D'autre part, la polaire trilinéaire de H_1 par rapport au triangle $A_1B_1C_1$, est perpendiculaire à la droite d'EULER de ce triangle. D'où ce théorème :

Si la parallèle menée par un point P *du cercle circonscrit à un triangle* ABC *à la droite de* SIMSON Δ *de ce point recoupe ce cercle en* Q, *les bissectrices de l'angle formé par la polaire trilinéaire de* Q *et par la droite qui joint* Q *au centre de gravité du triangle* ABC *sont inclinées à* 45^0 *sur* Δ.

8. Le cercle conjugué à $A_1B_1C_1$ a pour centre H_1. On a dès lors cette propriété :

Le point Q *est le centre de l'hyperbole équilatère conjugué au triangle* ABC *et dont les axes sont parallèles à* Δ, Δ'.

Bruges (Belgique). R. GOORMAGHTIGH.

THÉORÈMES DE PTOLÉMÉE

M. AD. MINEUR vient de donner une démonstration fort intéressante des théorèmes classiques de PTOLÉMÉE sur le quadrilatère inscrit en invoquant la théorie des aires et la relation d'égalité $bc = 2Rh$, entre le produit de deux côtés d'un triangle ABC et celui de la hauteur relative au troisième côté et du diamètre du cercle circonscrit [1]).

En voici une autre qui nous parait assez simple, obtenue à l'aide seulement de la relation $bc = 2Rh$.

1. Soit un quadrilatère ABCD, d'aire S, inscrit dans un cercle (O) de rayon R; posons $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = x$, $BD = y$.

Par le sommet A, par exemple, traçons la parallèle à la diagonale BD, qui coupe en A' la circonférence (O). Soient β, δ les projections orthogonales de B, D sur CA'; P l'extrémité du diamètre CO; Q l'intersation de A'C et BD.

$$DA' = a \quad , \quad A'B = d \quad , \quad CA' = z.$$

On a

$$BC \cdot A'B = bd = 2R \cdot B\beta$$

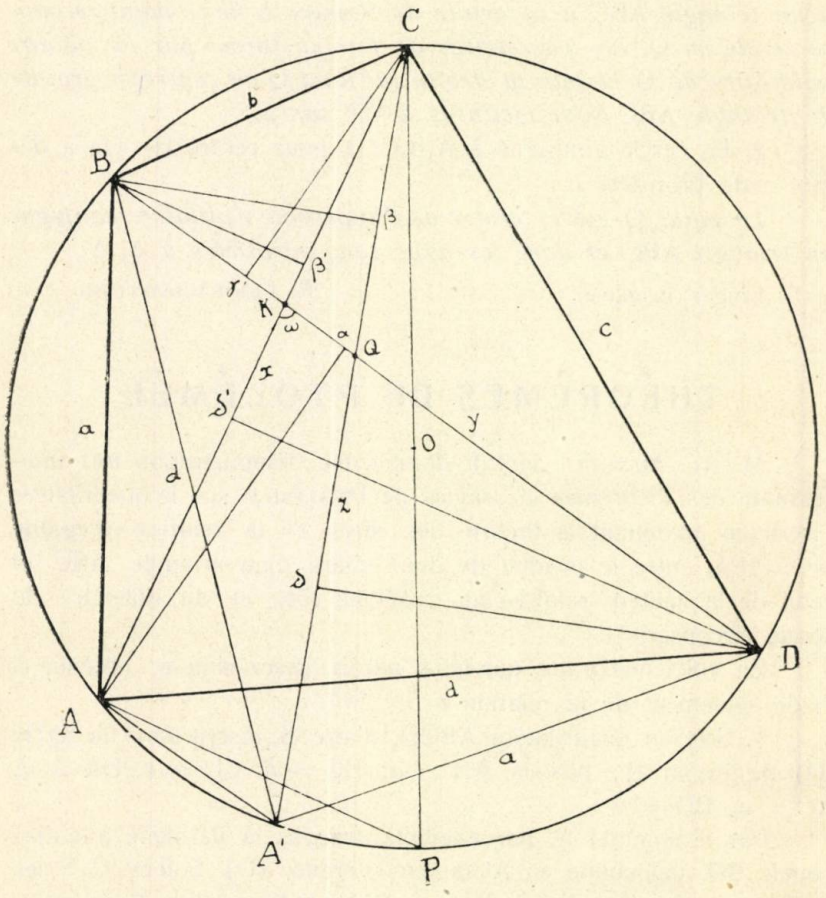
$$DC \cdot A'D = ac = 2R \cdot D\delta,$$

soit

$$ac + bd = 2R\,(B\beta + D\delta).$$

1) *Mathesis*, 1930 — 177.

Les triangles rectangles BQβ, DQδ, APC qui ont un angle aigu égal sont semblables. En effet les arcs BC et A'D, BC et AB sont soustendus par des cordes égales b et a.



Il s'ensuit que

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{AC}}{2R} = \frac{\overline{B\beta}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{D\delta}}{\overline{DQ}} = \frac{\overline{B\beta} + \overline{D\delta}}{\overline{BD}},$$

d'où

$$ac + bd = AC \,.\, BD = xy.$$

Dans tout quadrilatère inscrit, le produit des diagonales égale la somme des produits des côtés opposés.

C'est le premier théorème de PTOLÉMÉE.

2. Soient α' et γ', β' et δ', les projections orthogonales de A et C sur BD, de B et D sur AC; K l'intersection de AC et BD.

Les triangles rectangles $A\alpha'K$, $B\beta'K$, $C\gamma'K$. $D\delta'K$ sont semblables, et

$$\frac{\overline{A\alpha'}}{\overline{AK}} = \frac{\overline{C\gamma'}}{\overline{CK}} = \frac{\overline{A\alpha'} + \overline{C\gamma'}}{\overline{AC}},$$

$$\frac{\overline{B\beta'}}{\overline{BK}} = \frac{\overline{D\delta'}}{\overline{DK}} = \frac{\overline{B\beta'} + \overline{D\delta'}}{\overline{BD}};$$

d'où

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{A\alpha'} + \overline{C\gamma'}}{\overline{B\beta'} + \overline{D\delta'}} = \frac{ad + bc}{ab + cd},$$

puisque

$$ad + bc = 2R\,(\overline{A\alpha'} + \overline{C\gamma'}) \quad ; \quad ab + cd = 2R\,(\overline{B\beta'} + \overline{D\delta'}).$$

Le rapport des diagonales d'un quadrilatère inscriptible convexe est égal au rapport de la somme des produits des côtés qui aboutissent à leurs extrémités. Tel est le second théorème de PTOLÉMÉE.

3. En permutant les côtés *a, b, c, d* du quadrilatère ABCD de toutes les façons possibles, on obtient des quadrilatères inscrits puisque la somme des arcs qui ont pour cordes les côtés est toujours égale à la circonférence (O).

Comme *a,* par exemple, peut être opposé à *b, c, d,* on a ainsi trois quadrilatères distincts (Q_1), (Q_2), (Q_3).

Ces quadrilatères ont même surface S, égale à celle du cercle (O) diminué de la somme des surfaces des quatre segments de ce cercle limités par des cordes de longueurs *a, b, c, d.* En outre, ils n'ont que trois longueurs *x, y, z* de diagonales qui sont les troisièmes côtés de trois triangles inscrits dans le cercle dont les deux autres côtés sont respectivement *a* et *d, a* et *c, a* et *b.*

Dans la figure envisagée au paragraphe 1, ACDA′ est l'un de ces quadrilatères dans lequel $BD = y$, $CA' = z$.

L'aire du quadrilatère ABCD peut s'exprimer

$$2S = AC \cdot BD \sin\omega = xy \sin\omega,$$

ω étant l'angle des diagonales AC et BD.

Or, l'angle A'PC, qui a pour mesure la moitié de celle des arcs sous-tendus par des cordes b et d, égale celui ω des diagonales AC et BD.

Alors

$$z = CA' = 2R \sin\omega, \quad \text{et} \quad xyz = 4RS.$$

Ainsi se trouve établie *directement* une vieille formule due à ALBERT GIRARD, 1626.

Le Mans (France). V. THÉBAULT.

ASUPRA NUMĂRULUI INDICATORILOR UNUI NUMĂR DAT

Fie N un număr întreg şi pozitiv. Numărul numerelor mai mici ca N şi prime cu el se numeşte *indicatorul lui* N şi se notează prin $\varphi(N)$. Avem inegalitatea

$$(1) \qquad \varphi(N) \leqslant N - 1$$

egalitatea nefiind posibilă decât când N e prim. Să considerăm acum numerele obţinute prin iteraţia operaţiei φ

$$\varphi_2(N) = \varphi[\varphi(N)], \quad \varphi_3(N) = \varphi[\varphi_2(N)], \ldots \text{etc.} \qquad \varphi_1(N) = \varphi(N)$$

atunci

$$\varphi_1(N), \ \varphi_2(N), \ \varphi_3(N) \ldots \text{etc.}$$

sunt *indicatorii de diferite ordine* a lui N.

In virtutea inegalităţii (1) e evident că există un număr $n < N$ astfel ca $\varphi_{n+1}, \varphi_{n+2}, \ldots$ etc. să nu mai existe. Cum toţi indicatorii sunt *pari* e evident că vom aveà

$$\varphi_{n-1}(N) = 2$$

$$\varphi_n \ (N) = 1.$$

In articolul de faţă ne propunem a calculà numărul n, cunoscând pe N.

Să introducem o funcție numerică, adică o funcție definită, pentru valorile întregi și pozitive ale variabilei, $I(x)$ verificând următoarele relații:

1^0 $\quad I(1) = 0\,,\ I(2) = 1$

2^0 $\quad I(x\,.\,y) = I(x) + I(y)$

3^0 $\quad I(x) = I(x-1)$ $\qquad$ când x este prim.

Cele trei condiții definesc complet pe $I(x)$ și permit calcularea lui. Fie spre exemplu

$$x = 2\,.\,3^7\,.\,29^5$$

Avem

$$I(2\,.\,3^7\,.\,29^5) = I(2) + I(3^7) + I(29^5)$$

dar din 2^0 deducem și

$$I(x^\alpha) = \alpha\, I(x). \qquad (\alpha \text{ întreg pozitiv}).$$

deci

$$I(2\,.\,3^7\,.\,29^5) = I(2) + 7\, I(3) + 5\, I(29)$$

apoi

$I(2) = 1$

$I(3) = I(2) = 1$

$I(29) = I(28) = I(2^2\,.\,7) = 2\, I(2) + I(7) = 2 + I(6) = 2 + I(2) + I(3) = 4,$

deci

$$I(2\,.\,3^7\,.\,29^5) = 28.$$

Ne propunem a da câteva proprietăți simple a lui $I(x)$.

Proprietatea A. Dacă

$$x < 2^k$$

atunci

$$I(x) < k.$$

Vom demonstră prin inducție completă. Vom presupune că numerele sunt descompuse în factori primi și fiecare factor prim îl considerăm cu ordinul său de multiplicitate.

Dacă

$$x = a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma \ldots$$

x are $\alpha + \beta + \gamma + \ldots$ factori primi.

E evident că

$$I(x) = \Sigma I(a)$$

suma, fiind extinsă la toți factorii primi a lui x.

Să presupunem deci că avem

$$I(x) < i$$

dacă

$$2^{i-1} \leqslant x < 2^i$$

$$i = 1, 2, \ldots k - 1$$

și să arătăm că aceeaș relație are loc pentru $i = k$. Fie un număr x astfel ca

$$2^{k-1} \leqslant x < 2^k \tag{2}$$

și să presupunem că nu e prim. x are factori primi p_i astfel ca

$$2^{i-1} \leqslant p_i < 2^i$$

și fie q_i numărul lor. Aci $i = 2, 3, \ldots k - 1$.

Inegalitatea (2) ne arată că

$$\sum_{i=2}^{k-1} q_i (i-1) < k.$$

Se vede însă că membrul întâi este tocmai cea mai mare valoare ce poate lua $I(x)$. Proprietatea e deci demonstrată. Dacă x e prim considerăm pe $x - 1$ care verifică (2) pentru $k > 2$ deoarece 2^{k-1} nu e prim decât dacă $k = 2$. Pentru ca inducția să fie completă este destul a verifica proprietatea pentru $k = 1, 2$, ceeace se vede din tabloul:

(3)

x	1	2	3
$I(x)$	0	1	1

Observație: Cel mai mic număr x pentru care $I(x) = k$ este 2^k.

Proprietatea B. Dacă

$$x > 3^k$$

avem

$$I(x) > k.$$

E destul a demonstră proprietatea pentru numerile x a căror toți factori primi sunt mai mici ca 3^k sau dacă x e prim $x - 1$ se bucură de aceeaș proprietate. Dacă x nu verifică această condiție

proprietatea va fi *a fortiori* adevărată din cauza relației 2^0 verificată de $I(x)$.

Aplicăm acum metoda precedentă. Presupunem că dacă

$$3^i \geqslant x > 3^{i-1}$$

avem

$$I(x) > i-1$$

$$i = 1, 2, \ldots k.$$

Fie încă p_i factori primi a lui x în intervalul

$$3^i \geqslant p_i > 3^{i-1}$$

și q_i numărul lor, $i = 1, 2, \ldots k$. Trebue să avem

$$\sum_{i=1}^{k} i\, q_i > k$$

Și membrul întâi este tocmai cea mai mică valoare a lui $I(x)$. Dacă x e prim procedăm la fel pentru $x-1$ observând că 3^k+1 nu e prim decât dacă $k=0$. Proprietatea e deci demonstrată cum arată tabloul (3).

Observație. Cel mai mare număr pentru care $I(x) = k$ este 3^k. Fie un număr x avem

$$3^{k_1+2} \geqslant x > 3^{k_1}$$

$$2^{k_2-1} \leqslant x < 2^{k_2}$$

și atunci

$$k_1 < I(x) < k_2$$

sau

$$\frac{\log x}{\log 3} - 1 < I(x) < \frac{\log x}{\log 2} + 1$$

prin urmare:

Teoremă. *Numărul x tinzând spre infinit avem relația*

$$I(x) = O(\log x)\ ^1).$$

1) $\varphi(x)$, $\psi(x)$ fiind două funcții tinzând la ∞ pentru $x \to x_0$, notația $\varphi(x) = O[\psi(\varphi)]$ însemnează că raportul $\left|\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right|$ rămâne limitat. Se zice că $\varphi(x)$ *este de ordinul lui* $\psi(x)$ (notația D-lui LANDAU).

Să revenim acum la indicatori. Dacă

$$N = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots \qquad a < b < c.$$

$a, b, c, \ldots$ fiind factori primi a lui N, şi

$$\varphi(N) = a^{\alpha-1} b^{\beta-1} c^{\gamma-1} \ldots \qquad (a-1)\ (b-1)\ (c-1) \ldots$$

Dacă N este par avem

$$I[\varphi(N)] = I(N) - 1$$

deoarece în acest caz $a = 2$ şi

$$I(a) = I, \qquad I(a-1) = 0$$
$$I(b) = I(b-1)$$
$$I(c) = I(c-1)$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Dacă N este impar

$$\varphi(2N) = \varphi(N)$$

deci

$$I[\varphi(N)] = I(2N) - 1.$$

Dacă observăm acum că toţi indicatorii sunt pozitivi (afară de ultimul) deducem uşor:

Avem egalitatea

$$\varphi_{I(N)}(N) = 1$$

dacă N *este par şi*

$$\varphi_{I(2N)}(N) = 1$$

dacă N *este impar* > 1.

Observaţie: Din proprietăţile stabilite pentru $I(x)$ rezultă că avem

$$n \geqslant \alpha + \beta + \gamma + \ldots$$

unde

$$\varphi_n(N) = 1$$

egalitatea nefiind adevărată decât pentru numerele 2^{α} şi $2^{\alpha} 3^{\beta}$.

T. Popoviciu.

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE“

In vacanța Paștelui anului 1931, și anume în zilele de 16, 17 și 18 Aprilie se va ține un Concurs general de matematici în București, între corespondenții «*Gazetei Matematice*», elevi ai claselor IV, V, VI și VII ale Liceelor din țară, și ai anilor pregătitori depe lângă Facultățile de Științe, sau depe lângă Școlile speciale.

Cererile de înscriere se vor trimite *direct de candidați*, iar nu de profesori, părinți, corespondenți sau intermediari, D-lui Ion Ionescu, Inginer, strada Călușei 23, București IV, în plicuri recomandate sau înmânate direct D-sale. Cererile se primesc *numai* până la 1 Fevruarie 1931 și vor arătà neapărat, în ordinea aci arătată și numerotată:

1) Numele și pronumele elevului, scrise lizibil.

2) Liceul și clasa, sau Anul pregătitor în care urmează candidatul. Pentru cei ce se pregătesc în particular se va arătà școlile în care au urmat anul precedent sau la care au depus examenul de fine de an pentru clasa precedentă.

3) Adresa în timpul școalei și în timpul vacanței Paștelui pentru a li se puteà face comunicările și înștiințările necesare.

4) Dacă dispune de mijloace de a veni în București; dacă are unde fi găzduit și întreținut aci în timpul concursului, sau dacă unul din aceste mijloace ar urmà să fie procurate de Societatea «*Gazeta Matematică*». Dacă are nevoie de plata drumului, va indicà și gara de unde va luà trenul pentru a veni la Concurs și gara la care se va reîntoarce după Concurs.

5) Materia de matematici, din clasa în care urmează, la care voiește să treacă proba teoretică în scris și o altă materie la care voiește să treacă o probă practică în scris. Ambele probe sunt obligatorii. Proba teoretică se va da în dimineața zilei de 16 la ora $8\frac{1}{2}$, iar cea practică în aceiași zi la ora $14\frac{1}{2}$.

La proba teoretică candidații vor aduce numai tocurile de scris și nu vor aveà nici cărți, nici hârtie, aceasta dându-li-se la Concurs. La proba practică, se vor cere calcule numerice și logaritmice, construcțiuni grafice, epure și prin urmare elevii vor aduce cu dânșii tabele, instrumente de desemn, compasuri, și vor puteà consultà cursuri sau cărți.

Sunt cu totul interzise comunicările între candidați la probele

teoretice şi practice înainte de predarea lucrărilor sau eşirea din săli, până ce nu se face predarea lor definitivă.

Se atrage atenţiunea că toate condiţiunile pentru înscriere şi ţinerea concursului trebuiesc respectate cu toată atenţiunea şi exactitatea inerentă ştiinţelor matematice. Sunt cu totul interzise intervenţiunile de orice natură.

Numărul candidaţilor admişi la Concurs va depinde de mijloacele de transport, de găzduire şi de întreţinere de care vom puteà dispune. Alegerea se va face dintre corespondenţii care au o activitate mai îndelungată şi au arătat, prin lucrările ce au trimes la această Revistă, o pricepere mai bună a ştiinţelor matematice. Se va căuta apoi ca să se aleagă elevi de prin cât mai multe licee, de prin toate clasele, de prin toţi Anii preparatori, şi atât de prin şcolile civile, cât şi militare.

Candidaţii înscrişi, care vor fi admişi la concurs, vor primì o înştiinţare în luna Fevruarie, în care li se va arătà materiile care urmează să le pregătească, iar mai târziu o alta în care li se va arătà locul unde se va ţine concursul, programul lui pentru probele scrise şi orale, locul unde vor fi găzduiţi şi ospătaţi cei lipsiţi de mijloace, iar în vacanţa Paştelui vor primì biletele sau banii pentru drum. Cei care din diferite pricini nu ar mai puteà venì la Concurs trebuie să ne încunoştiinţeze din vreme spre a pune pe alţi candidaţi eventual în locul lor. Înştiinţarea se va trimite înainte de vacanţa Paştelui.

Comisiunea examinatoare se va compune din membri ai Societăţii «*Gazeta Matematică*» care nu vor aveà rude printre candidaţii admişi la Concurs.

Rezultatul Concursului se va publicà în Nr. 9, Mai 1931. Candidaţii care vor reuşì la concurs vor primì ulterior diplome, recompense, premii sau menţiuni. Primul reuşit la Concurs dintre elevii Anului Preparator depe lângă Şcoala Politecnică din Bucureşti va primì premiul «ANGHEL SALIGNY» de 1000 lei, oferit de un membru al Societăţii noastre. Primul reuşit la Concurs va primì premiul LT.-COL. G. TĂNĂSESCU în cărţi, conform înştiinţării făcute în Nr. 1.

Delegaţia Societăţii:
AL. BUNESCU, COL. GH. I. LITEANU
şi G. A. NICHIFOR.

NOTE MATEMATICE

11. *Sur une quartique remarquable.* — M. le Col. Gh. Buicliu a étudié, G. M., XXXV, p. 442, une quartique remarquable, qui est un antihyperbolisme de cercle:

Soient A un point d'un cercle de centre C et BB_1 une corde parallèle à la tangente Ay au cercle en A; une sécante quelconque menée par A coupe la corde en M; si la parallèle à AC menée par M coupe le cercle en P, la quartique est le lieu de l'intersection Q de AM avec la perpendiculaire menée de P à AC.

La construction de la tangente à la quartique donnée par M. Buicliu, (*Gazeta Matematica* XXXV, pag. 444) est un cas particulier de la construction donnée par M. d'Ocagne pour la tangente à l'antihyperbolisme d'une courbe quelconque (*Calcul graphique et Nomographie,* pag. 67).

Dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 1915, pag. 412, nous avons indiqué une construction pour le centre de courbure de l'hyperbolisme d'une courbe quelconque. On en déduit la construction suivante pour la centre de courbure de la quartique en Q:

La tangente en M *au cercle donné coupe* Ay *en un point* Q *dont le symétrique, par rapport à* M *est* N. *La perpendiculaire en* Q *sur* Ay *coupe* CM *en un point* Q' *dont le symétrique, par rapport à* C, *est* N'. *La perpendiculaire élevée en* N *sur* N'N *coupe* AC *en* E. *La parallèle à* Ay *menée par le milieu de* CE *coupe la normale à la quartique en* γ''; *la perpendiculaire à* $Q\gamma''$ *en* γ'' *coupe en* γ' *la parallèle à* Ay *menée par* Q. *La parallèle menée par* γ' *à* CA *passe alors par le centre de courbure cherché.*

R. Goormaghtigh.

12. *Centre de courbure de la développée d'une conique.* — M. E. Arghiriadi a donné dans la *Gazeta Matematica* XXXV, p. 447 une construction du centre de courbure C' de la développée correspondant au centre de courbure C au point M d'une conique.

La construction suivante, plus simple, est due à Mac-Laurin:

Si la perpendiculaire élevée en C *sur* MC *coupe en* C_1 *le diamètre de la conique passant par* M, *le point* C' *s'obtient en prolongeant* C_1C *de trois fois sa longueur.*

On peut la déduire très simplement de la formule qui a servi à M. Arghiriadi pour établir la construction qu'il indique: si φ est l'anomalie excentrique de M, cette formule s'écrit

$$(1) \qquad \frac{CC'}{MC} = 3\,\frac{c^2}{ab}\sin\varphi\cos\varphi.$$

Or si θ est l'angle de MC avec le grand axe et ψ l'angle de cet axe avec le diamètre passant par M, on a

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{a}{b}\operatorname{tg}\varphi, \qquad \operatorname{tg}\psi = \frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi.$$

Dès lors

$$\frac{C_1C}{MC} = \operatorname{tg}C_1MC = \operatorname{tg}(\theta - \psi) = \frac{a^2 - b^2}{ab}\,\frac{\operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{c}{ab}\sin\varphi\cos\varphi.$$

ce qui, rapproché de la relation (1), démontre le théorème.

R. Goormaghtigh.

13. *Asupra Problemei 3742.*

Soluția acestei probleme publicată la pag. 111. vol XXXV, ar fi fost mult mai simplă și chiar mai elegantă dacă s'ar fi ținut seama de următoarele:

1. Suma a 2 numere de câte 5 cifre în care să intre toate cifrele o singură dată este multiplu de 9, deoarece suma cifrelor este 45; deci în condițiile problemei nu puteà fi decât 72333.

2. Din

$$\begin{array}{r} a\ b\ c\ d\ e\ + \\ f\ g\ h\ i\ j \\ \hline 7\ 2\ 3\ 3\ 3 \end{array}$$

se deduce:

$$e + j = 10\alpha + 3\ ;\ d + i + \alpha = 10\beta + 3\ ;\ c + h + \beta = 10\gamma + 3$$

$$b + g + \gamma = 10\delta + 2 \qquad a + f + \delta = 7$$

(α, β, γ, δ nu pot fi decât 0 sau 1).

Adunând, parte cu parte, se găseşte

$$a+b+c+d+e+f+g+h+i+j=9(\alpha+\beta+\gamma+\delta)+18$$

sau

$$45=9(\alpha+\beta+\gamma+\delta)+18$$

$$\therefore \quad \alpha+\beta+\gamma+\delta=3.$$

Prin urmare unul din aceste numere trebuie să fie 0, ceilalţi trei fiind egali cu 1. Ţinând seama de aceasta se obţin următoarele 4 posibilităţi:

(1) $a+f=7$; $b+g=1$; $c+h=12$; $d+i=12$; $e+j=13$

(2) $a+f=6$; $b+g=12$; $c+h=2$; $d+i=12$; $e+j=13$

(3) $a+f=6$; $b+g=11$; $c+h=13$; $d+i=2$; $e+j=13$

(4) $a+f=6$; $b+g=11$; $c+h=12$; $d+i=13$; $e+j=3$

3. Considerăm ca o soluţie principală pe acela în care

$$a>f \; ; \; b>g \; ; \; c>h \; ; \; d>i \; ; \; e>j.$$

Schimbând cifrele pe coloane, numerile obţinute sunt deasemenea soluţiuni ale problemei. Schimbând cifrele pe o coloană în toate modurile posibile se obţin 5 soluţiuni noi. Schimbând pe 2 coloane în toate modurile posibile se obţin alte 10 soluţiuni noi. Schimbând cifrele pe 3, pe 4 sau pe toate coloanele nu se mai obţin alte soluţiuni noi ci cele deja obţinute însă numerile sunt invers aşezate. Deci dintr'o soluţie principală se deduc $1+5+10=16$ soluţiuni noi.

4. Soluţiile principale se deduc ca la pag. 115 vol. XXXV şi sunt următoarele:

$$51987+20346=51897+20436=59287+13046=72333$$

$$58297+14036=58927+13406=58729+13604=72333$$

$$59873+12460=67982+04351=68792+03541=72333$$

Problema are în total, cum s'a găsit şi acolo, pe o cale mult mai lungă, $9 \times 16 = 144$ soluţiuni.

I. B. F.

CHESTIUNI DE EXAMEN*)

FACULTATEA DE ŞTIINŢE DIN BUCUREŞTI

Sesiunea Iunie 1930

ANUL I

GEOMETRIE ANALITICĂ

Se dau două axe rectangulare Ox şi Oy şi dreapta $x + 1 = 0$. Prin origine se duc dreptele $y - mx = 0$, $y + \frac{1}{m} x = 0$ cari tae dreapta $x + 1 = 0$ în punctele A şi B. Se cere:

1°. Să se scrie ecuaţia generală a conicelor tangente în origină la axul Ox şi cari trec prin punctele A şi B şi să se arate că toate aceste conice sunt hiperbole echilatere.

2°. Să se găsească locul centrelor acestor hiperbole şi să se construiască.

3°. Să se scrie ecuaţia aceleia din hiperbole care trece prin punctul C (0, 1) şi să se scrie ecuaţia tangentei în punctul C.

ANUL II

MECANICA RAŢIONALĂ

1°. Se dau patru puncte de aceiaş masă, situate într'un acelaş plan şi legate între ele prin patru bare materiale, rigide şi de lungimi egale cu o cantitate l. Sistemul fiind presupus sustras de la orice acţiune exterioară, se cere să se studieze mişcarea sistemului.

2°. Să se determine centrul de greutate al unui segment de parabolă.

ANUL II

ANALIZA INFINITESIMALĂ

1°. Să se integreze ecuaţia diferenţială

$$(x^2 + y^2)\,(1 + y'^2) = 2\,(x + yy')^2.$$

2°. Se consideră curba din spaţiu

$$x = \alpha e^t \cos t, \quad y = \alpha e^t \sin t, \quad z = \beta - 2\log\alpha - 2t,$$

unde α şi β sunt două cantităţi constante. Eliminând parametrul t, se obţine ecuaţia, în coordonate cartesiene, a suprafeţii pe care este situată curba. Să se arate că planul tangent suprafeţii într'un punct al curbei coincide cu planul osculator la curbă în acel punct. Să se găsiască cele două familii de linii asimptotice şi să se arate că curba dată face parte din una din ele.

*) Soluţiile chestiunilor de examen se publică în *Revista Universitară Matematică.*

ANUL II

TEORIA FUNCȚIILOR

1°. Se dă funcția de variabilă complexă

$$f(z) = \frac{1}{(3z-1)(1-2\cos\pi z)}.$$

Să se găsiască o altă funcție $\varphi(z)$, care să se anuleze pentru $z = \infty$ și așa fel ca diferența $f(z) - \varphi(z)$ să fie olomorfă în interiorul cercului de rază 2, cu centrul în origine.

2°. Să se calculeze, cu ajutorul reziduurilor, integrala

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2-a^2)\sqrt{x(1-x)}},$$

unde a este real și $|a| > 1$.

ANUL III

TEORIA FUNCȚIILOR

1°. Să se calculeze integrala

$$\int \frac{x^2+ax+1}{(x^2-1)\sqrt{x^3-x}}\,dx.$$

Să se determine parametrul a pentru ca integrala să fie algebrică.

2°. Se dă curba

$$y(x-1)^2 + 4x(y^2-x^2) = 0.$$

Se cere să se exprime coordonatele x, y în funcții eliptice de un parametru.

ȘCOLILE MILITARE, PREGĂTITOARE ȘI SPECIALE ALE AERONAUTICEI «REGELE AVIATOR CAROL II»

Examenul de admitere din August 1930

SECȚIA MECANICI

ALGEBRĂ

I. Să se simplifice produsul efectuându-se calculele pentru a avea un singur radical:

$$\sqrt[3]{ab^2}.\ \sqrt[4]{a^2b^3}.\ \sqrt[6]{a\,b^5}.$$

II. Să se rezolve ecuația

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}} = a.$$

III. Se dă ecuaţia

$$x^2 - 2\,(m-2)\,x + 25 = 0.$$

Ce valori are m când:

a) rădăcinile sunt egale şi de acelaş semn,

b) „ „ „ „ „ semne contrare.

TRIGONOMETRIE

I. Să se exprime sin$a$ şi cos$a$ in funcţie de cotg$a$

Aplicaţie pentru $a = 45^0$.

II. Dacă A, B şi C sunt unghiurile unui triunghiu, atunci avem

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C.$$

GEOMETRIE

I. Se dă un cilindru drept plin de înălţime h şi având diametrul bazei egal cu $2r$. Se consideră conul având aceiaşi bază ca şi cilindrul, iar vârful conului în centrul celeilalte baze a cilindrului. Scoţând conul din cilindru se cere să se calculeze suprafaţa totală a corpului solid rămas.

Aplicaţie pentru $r = 10$ cm. şi $h = 0{,}50$ m.

II. Se dă un cerc O şi un diametru AB. Se descrie un alt cerc cu centrul în punctul C de pe cercul cel dintâi şi tangent la diametrul AB.

Să se arate că tangentele AT_1 şi BT_2 duse din punctele A şi B la cercul cu centrul în C sunt paralele.

Timp de lucru 4 ore.

SECŢIA NAVIGANŢI — ANUL I-iu

ALGEBRĂ

1. Se dă ecuaţiunea

$$mx^2 - 2\,(8-m)\,x + 16 = 0$$

a) Să se afle valorile lui m pentru cari una din rădăcini este de două ori mai mare ca cealaltă.

b) Pentru acele valori ale lui m să se afle rădăcinile ecuaţiei date.

2. Să se afle adevărata valoare a expresiunei

$$E = A - \frac{3x+1}{4x^4 - 2x^3 + 3x - 1}$$

pentru $x = \infty$.

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAŢIUNII" SIBIIU

III. Să se calculeze derivata funcţiei

$$y = (2x^2)^6\,(a^2 - x^2)^{1/2}.$$

TRIGONOMETRIE

I. Cari sunt valorile liniilor trigonometrice ale arcului de — 2820°.

II. Să se calculeze valorile lui sin$a$, cos$a$, sin2a, cos2a, sin$\frac{a}{2}$, cos$\frac{a}{2}$ în funcţie de tg$a$. Aplicaţie pentru $a = 30°$.

III. Care este forma generală a arcelor x ce satisfac ecuaţiunea : $\sin 2x = {}^1/_2$.

GEOMETRIE

I. Se dă o prismă dreaptă plină de înălţime h, având ca bază un exagon de latură l. Se consideră piramida având aceiaşi bază ca şi prisma, iar vârful în centrul celeilalte baze a prismei.

Scoţând piramida din prismă se cere să se calculeze suprafaţa totală şi volumul corpului solid rămas.

Aplicaţie pentru $l = 20$ cm. şi $h = 0^m,50$.

II. Se dă un cerc cu centrul O şi de rază r. Se duc 2 diametri perpendiculari ce taie cercul unul în A şi B, şi altul în C şi D. Se uneşte A cu punctul M, mijlocul razei OC şi se prelungeşte AM până întâlneşte cercul în punctul T. In punctul A şi T se duc tangentele la cerc, ce se întretaie în I, iar dreapta IT întâlneşte diametrul AB în punctul K.

Se cere să se calculeze în funcţie de raza r, lungimile AT, AI şi OK (Se va însemna mijlocul segmentului AT cu N).

Timp de lucru 4 ore.

BIBLIOGRAFIE

Revista Matematică din Timişoara. Anul X. No. 8. Octomvrie 1930. Timişoara. Asupra variaţiunii funcţiunilor goniometrice, de Ion Mărgineanu.

Mathesis. Tomul XLIV. No. 8. Octomvrie 1930. Gembloux. Asupra unei transformări cuadratice corelative, de J. Dieudonné. Asupra numerilor prime impare, de G. Lambert. Elice trasată pe o cuadrică de rotaţiune şi al cărui cilindru director e paralel cu axa de rotaţie, de R. Deaux. Asupra unor generalizări a triunghiurilor isologice, de V. Thébault. Asupra homografii spaţiului neavând decât două drepte unite, de M. Nisoli.

Cl. Servais. *Sur la géométrie du tétraèdre.* Extras din *Bulletin de l'Académie royale de Bélgique.* Supliment la *Mathesis.*

Nicolas Lusin. *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications.* Cu o notă de Sierpinski şi o prefaţă de Henri Lebesgue. Apărută în Colecţiunea de monografii asupra teoriei funcţiunilor de sub direcţiunea lui Emile Borel. Paris. Gauthier Villars et C-nie. Editeurs. Quai des Grands-Augustins 55. Paris. 1930.

Universidad National de la Plata. *Anuario por el Ano 1930.* No. 20. Publicaţie a Facultăţii fisico-matematice. La Plata. 1930.

Journal des Mathematiques Elementaires, publié par H. VUIBERT Anul 55. No. 1. Octomvrie 1930. Paris.

Idem, publié par H. VUIBERT. Anul 55. No. 2. Octomvrie 1930. Paris.

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Tomul CX. Fascicola 3. Septemvrie 1930. Buenos-Aires, Coordonate tetracirculare şi pentasferice, de G. C. DASSEN.

Boletin del Seminario Matematico, publicado por J. REY PASTOR. Seria B. Vol. VII. Ianuarie 1930. Buenos-Aires. Bibliografii.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XXXVI. No. 8. August. 1930. New York. Metode in variante în geometria diferenţială, de V. C. GRAUSTEIN. Raţionalitatea unor curbe continui, de G. T. WHYBURN. Notă asupra suprafeţelor rostogolitoare şi desfăşuratele lor, de A. F. CARPENTER. Asupra sumabilităţii uniforme a sequenţelor de funcţiuni continui, de R. F. AGNEW. Asupra unor hipersurprafeţe rostogolitoare de ordin (k—1) în spaţiul *r*, de B. C. WONG. O condiţiune necesară şi suficientă pentru neechivalenţa a ori căror doi cuaternioni generalizaţi raţionali în algebra diviziunii, de A. A. ALBERT. Coordonate geodezice de ordinul *r*, de A. D. MICHAL. Asupra suprafeţelor algebrice cu invariant în o anume clasă de grupuri finite de colineaţiune, de A. EMCH. Noi criterii asociate cu ultima teoremă a lui FERMAT, de J. MACDONNELL. Soluţiunea ecuaţiunilor lui EULER pentru cele mai înalte derivative ale lor, de H. V. CRAIG. O notă asupra unui sistem de ecuaţii cu un număr infinit de mare de necunoscute, de L. W. COHEN. Exemple de transformări de suprafeţe, de P. A. SMITH. O soluţie a unei ecuaţii funcţionale simple ca bază pentru a obţine uşor unele formule fundamentale din teoria funcţiunilor eliptice, de G. W. STARCHER. Despre formele canonice ale ecuaţiilor diferenţiale, de V. G. GROVE. Teoremă asupra congruienţelor inversate şi rotate, de M FOSTER.

A. ROSEBBLATT. *Sur certains mouvements stationnaires plans des liquides visqueux incompressibles.* Publicaţie a Seminarului matematic al Facultăţii de ştiinţe exacte, fizice şi naturale din Buenos-Aires. 1930.

J. BABINI. *Sobre los ceros de las funciones ciclicas.* Publicaţiune a Seminarului matematic al Facultăţii de ştiinţe exacte, fizice şi naturale din Buenos-Aires. 1930.

J. BABONI. *Representacion de las funciones ciclicas de terce orden.* Publicaţiune a Seminarului matematic al Facultăţii de ştiinţe exacte, fizice şi naturale din Buenos-Aires. 1930.

PAUL APPEL & EDOUARD GOURSAT. Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales. Deuxième édition, revue et augmentée par P. FATU. 2 Vol. Paris, Gauthier Villars et C-nie. Paris. 1930.

Maurice d'Ocagne. *Hommes & choses de science. Propos familiers.* Paris. Librairie *Vuibert.* 1910.

Intr'un volum mic, 305 pagini, autorul a adunat mai multe articole şi conferinţe ţinute în diferite ocaziuni asupra oamenilor care se ocupă cu ştiinţa, în special matematica, şi cu chestiuni de natură ştiinţifică. Chestiunile sunt expuse pentru a fi pricepute de cititorii ziarelor, revistelor de popularizare şi pentru auditorii obişnuiţi ai conferinţelor cu caracter ştiinţific elementar. Din această cauză cartea se poate citi cu mare folos de liceenii noştrii şi de cei care au cultura secundară; ei nu se vor căi niciodată de timpul consacrat unor asemenea lecturi care îi vor pune în curent cu multe fapte şi cunoştinţe ştiinţifice şi tecnice fără mai nici o sforţare pentru deplina lor înţelegere.

După o prefaţă în care autorul explică ce l'a condus să scrie această carte, şi un istoric al ştiinţelor după Picard, e un prim articol asupra *Marilor matematiciani francezi.* In capitole speciale vorbeşte de matematicianii Viete, Fermat, Pascal, Lagrange, Laplace, Monge, cei doi Carnot, Cauchy, Poncelet, Chasles. Un capitol tratează despre *calculatorii şi matematicianii,* şi altul despre *maşinile de calcul ale lui* Pascal *şi* Torres Quevedo. Un capitol tratează despre *matematicianii precoci* şi în special de Galois. Un articol e consacrat *fondatorilor balisticei* şi altul *femeilor care se ocupă cu ştiinţa.* Articole speciale sunt consacrate inginerilor Choisy, Séjourné, Caquot, şi *drumurilor de fer subterane din Paris.* Un articol arată opera fizicianului Borda, şi altele lui Napoleon *ca geometru* şi lui Focu ca academician. *Fluxul şi refluxul mărilor* e arătat în patru articole. Ultimul articol este o conferinţă pe care autorul a ţinut-o cu ocazia *centenarului naşterii lui* Jules Verne ca unul care în tinereţele lui a cunoscut de aproape, în casa tatălui său, pe acest celebru romancier.

Din faptele povestite ale acestor iluştri oameni de ştiinţă şi din celelalte articole care se referă la opere ştiinţifice şi tecnice, se pot scoate de tineri învăţăminte folositoare de cum ei trebuie să se comporte în viaţă şi în societate şi cum că chiar oamenii cei mai mari ai omenirii nu pot lăsă numele posterităţii fără studiu şi muncă intensă în timpul vieţii lor.

I. Ionescu.

Victor Vâlcovici. *Şcoala Politecnică din Timişoara. Zece ani de existenţă.* (Octomvrie 1920—Octomvrie 1930). Timişoara 1930.

Volumul conţine notiţe istorice asupra înfiinţării Şcoalei având ca anexe actele privitoare la constituire, precum şi Decretul-Lege pentru înfiinţarea şcoalelor politecnice în România, decretat în 10 Iunie 1920. Se arată împărţirea şcoalei în secţiuni, care au fost organele de conducere, corpul ei didactic, laboratoarele, colecţiunile, atelierele, muzeele, seminarele, biblioteca, localurile, căminele elevilor şi profesorilor. Se vorbeşte de educaţia fizică, de conferinţele ţinute elevilor, de societăţile studenţeşti, de activitatea extraşcolară, de mijloacele financiare. Ultima parte e consacrată absolvenţilor unde se dă şi lista diplomaţilor eşiţi din Şcoală. În volum se găsesc numeroase fotografii ale localurilor, instalaţiunilor, etc.

I. I.

RODOLPHE RACLIȘ. *Solution principale de l'équation linéaire aux differences finies.* Extras din *Acta Mathematica,* Vol. 55. Stockholm 1930.

American Mathematical Society. List of officers and members. 1919—1930. October 1930. NewYork.

CERERI

197. Unde se poate găsi o biografie a inginerului ELIE ANGELESCU, profesor de matematici și autor de cărți didactice de matematici in a doua jumătate a secolului trecut?

I. I.

198. Posedând următoarele numere din publicațiile matematice notate mai jos, rog să mi se comunice de unde mi-aș puteà procurà numerele lipsă:

1. Ziarul Matematica, Revistă lunară pentru uzul școalelor secundare, vol. I, No. 1, 1926.
2. Buletinul „Asociației Matematice" a Liceului „C. Alimănișteanu" din Oltenița, vol. I, 1928—29.
3. Revista Matematica Bârlădeană, vol. I, 1926.
4. Anuarul Societății Matematice Bârlădene, 1921—22.
5. Curierul Matematic, București 1925—27.
6. Jurnal Matematic, 1924—25.
7. Note matematice și științifice, Buletinul oficial al Societății Matematice dela Liceul „Carol I" din Craiova.
8. Foaia Matematică, Chișinău, 1924—26.
9. Insemnări Matematice, 1925.
10. Buletinul Societății Studenților in Matematici, 1925—1927.
11. Buletinul Asociației de Matematici pure și aplicate, vol. II, No. 1—7, 9, 10, 1922—23; vol. III, No. 1, 2, 6.

RODOLPHE RACLIȘ
Alea Vulpache 21, București 3.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1364. *Să se găsească numai cu compasul diametrul unei bare cilindrice circulare cu capetele rupte neregulat.*

I. IONESCU.

Luăm un punct pe suprafața laterală a barei, și către mijlocul ei, și cu vârful compasului în acest punct descrim curba de intretăiere dintre suprafața cilindrică și o sferă cu centrul în punctul luat. Fie respectiv A și (A) centrul sferei și curba de întretăiere.

Pe o foaie de hârtie descrim apoi un cerc cu aceiași deschidere de compas și ducem în acest cerc două diametre perpendiculare. Suprapunem foaia de hârtie, pe care o alegem să fie cât mai transparentă, peste suprafața cilindrică în așa fel ca centrul sferei A și al cercului de pe hârtie să coincidă. Cele două curbe nu au decât două puncte comune și anume cele ce se găsesc pe aceiași generatoare cu A. Invârtim hârtia in jurul lui A până când aceste două puncte de contact se găsesc pe unul din cele două diametre. Fie D și D' intersecțiile celuilalt diametru cu curba (A). Punctele A, D, D' determină o secțiune normală a suprafeței cilindrice. Măsurăm cu compasul, lungimea coardei D, D'. Construim în fine, alături, pe o altă foaie de hârtie, triunghiul ADD' căruia îi cunoaștem laturile AD = AD' egale cu raza sferei și pe DD'.

Diametrul cercului circumscris acestui triunghiu este diametrul barei.

Ion B. Florescu.

Am dat publicității această soluțiune practică a problemei 1364 deși nu rezolvă chestiunea numai cu compasul ci și cu calcul, care de fapt joacă aci rolul de un nou instrument, *cerc pliabil*. Ea este însă una din soluțiunile ingenioase la care recurg inginerii în practica lor, când știința nu le dă soluțiuni matematice perfecte. Metoda dată aci, de altfel, prezintă puțină preciziune de oarece intersecția cercului de pe calc cu curba de pe cilindru se face tangențial. Problema rămâne încă nerezolvată.

I. I.

PROBLEMA 3685. *Fie* P *punctul de intersecțiune al cercurilor adjointe* (CA) *și* (BA) *ale unui triunghiu* ABC. *Se cere să se construiască triunghiul* ABC *cunoscându-se latura* $\overline{AB} = c$, *raza* ρ — a *cercului adjunct* (BA) *și distanța* d *dela vârful* A *la* P.

Th. Gh. Cocea.

Să presupunem (ca în orice problemă de construcțiune) problema rezolvată. Fie deci ABC triunghiul pe care vrem să-l construim. Cercul «adjoint» (BA) trece prin vârfurile B și A și este tangent la latura AC; asemenea cercul «adjoint» (CA) trece prin vârfurile C și A și este tangent la latura AB. Fie A_1 punctul unde AP taie a doua oară cercul ABC. Se cunoaște proprietatea că AA_1 *este simediana vârfului* A *în triunghiul* BAC și că $\overline{AP} = \overline{PA_1}$. De altă parte, având $\sphericalangle BAP = \sphericalangle PCA$ și $\sphericalangle CAP = \sphericalangle PBA$, rezultă că $\sphericalangle BPA_1 = \sphericalangle CPA_1$, adică PA_1 *este bisectoarea unghiului* BPC.

De aci urmează următoarea construcțiune:

Luăm un segment de dreaptă $\overline{AB}$, de lungime dată c și, apoi, cu ajutorul a două cercuri de centre A și B și de rază ρ, determinăm centrele α și α' ale cercurilor ce pot reprezentă cercul «adjoint» (BA). Să considerăm, de exemplu, pe α și să tragem cercul de centru α trecând prin A (el trece neapărat prin B). Apoi tăiem cercul α, cu un alt cerc de centru A și cu raza cât d, în punctele P și P'. Fie B' simetricul lui B în raport cu dreapta AP. Punctul unde dreapta B'P taie tangenta în A la cercul α este al treilea vârf, C, al triunghiului cerut.

Deasemenea luând simetricul B_1 al lui B în raport cu AP', intersecțiunea dreptei B_1P' cu tangenta în A la cercul α determină punctul C' pentru al treilea vârf al triunghiului cerut

Așa dar, atunci când este posibilă, problema admite, în general, două soluțiuni.

Pentru ca problema să fie posibilă trebuie ca între datele problemei să avem îndeplinite condițiunile $c < 2\rho$ și $d < 2\rho$. Dacă $c = 2\rho$ și $d < 2\rho$, cele două triunghiuri soluțiuni sunt simetrice în raport cu AB, deci, de fapt, în acest caz avem o singură soluțiune.

Dacă $d = c < 2\rho$, avem de asemenea o singură soluțiune, unul din triunghiuri reducându-se la o dreaptă.

Observări. I. În locul intersecțiunii tangentei în punctul A la cercul α, putem luă *intersecțiunea cercului* ABA_1 *cu dreapta* PB'.

II. Asemenea punctul C poate fi determinat de intersecțiunea tangentei la cercul α cu cercul ABA_1, sau cu cercul tangent în A la AB trecând prin P; sau, în fine, luând intersecțiunea a doua a acestor două cercuri din urmă.

Au rezolvat problema D-nii: P. I. Ghișoiu, Gheorghe C. Sprinceană, Justin N. Vâlceanu, Cezar Coșniță, Gh. I. Balaban, Panaite N. Theodor, H. P. Ionescu-Biss.

D-l Gh. Th. Gheorghiu a rezolvat problema socotind date cercurile adjuncte (AC) şi (AB).

D-l Justin N. Vâlceanu rezolvă problema în toate cazurile când cercurile date sunt două din cercurile adjuncte (CA), (BA), (AC), (AB) relative unul la coarda $\overline{AB}$ şi celalt la coarda $\overline{AC}$.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 3718. *Să se rezolve sistemul*

$$(1)\qquad \begin{aligned} x + y\operatorname{tg}\alpha + z\operatorname{tg}2\alpha &= \sin 2\alpha \\ x + y\operatorname{tg}\beta + z\operatorname{tg}2\beta &= \sin 2\beta \\ x + y\operatorname{tg}\gamma + z\operatorname{tg}2\gamma &= \sin 2\gamma \end{aligned}$$

α, β, γ fiind unghiurile unui triunghiu oarecare.

Cezar Coşniţă.

Observăm dela început că sistemul fiind simetric în raport cu α, β, γ vom puteà reprezentà determinanţii care intervin în rezolvarea sistemului numai prin elementele primei linii.

Natura sistemului (1) depinde de determinantul lui

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \operatorname{tg}\alpha & \operatorname{tg}2\alpha \end{vmatrix},$$

deci vom calculà în primul rând valoarea acestui determinant ţinând seamă de faptul că α, β, γ sunt unghiurile unui triunghiu oarecare.

Inlocuind în Δ pe $\operatorname{tg}2\alpha$, $\operatorname{tg}2\beta$, $\operatorname{tg}2\gamma$ respectiv în funcţiune de $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}\gamma$ obţinem:

$$\Delta = -\frac{2}{\pi(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}\left[\begin{vmatrix} 1 & \operatorname{tg}^3\alpha & \operatorname{tg}\alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \operatorname{tg}^3\alpha & \operatorname{tg}^2\alpha & \operatorname{tg}\alpha \end{vmatrix}\right].$$

Dar

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} \operatorname{tg}^3\alpha & \operatorname{tg}^2\alpha & \operatorname{tg}\alpha \end{vmatrix} = -\operatorname{tg}\alpha\,.\operatorname{tg}\beta\,.\operatorname{tg}\gamma\,(\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha)(\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha)(\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\beta)$$

şi

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} 1 & \operatorname{tg}^3\alpha & \operatorname{tg}\alpha \end{vmatrix} = -\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\,(\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha)(\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha)(\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\beta);$$

prin urmare avem:

$$(4)\qquad \Delta = \frac{4\operatorname{tg}\alpha\,.\operatorname{tg}\beta\,.\operatorname{tg}\gamma\,(\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha)(\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha)(\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\beta)}{(1-\operatorname{tg}^2\alpha)(1-\operatorname{tg}^2\beta)(1-\operatorname{tg}^2\gamma)}.$$

Pentru ca sistemul (1) să aibă coeficienți finiți trebuie ca triunghiul să nu aibă un unghiu drept sau unul de măsură $\frac{\pi}{4}$; de altă parte α, β, γ fiind unghiurile unui triunghiu, nu sunt de măsură *zero* sau π. Așa dar, dacă mai presupunem că triunghiul nu este isoscel ($\alpha \neq \beta$, $\beta \neq \gamma$, $\gamma \neq \alpha$), determinantul Δ al sistemului este *finit* și *diferit de zero,* deci x, y, z, soluțiunile sistemului (1) sunt finite și bine determinate.

Pentru a găsi efectiv aceste soluțiuni să calculăm determinanții corespunzători:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \sin 2\alpha & \operatorname{tg}\alpha & \operatorname{tg}2\alpha \end{vmatrix} ; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & \sin 2\alpha & \operatorname{tg}2\alpha \end{vmatrix} ; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & \operatorname{tg}\alpha & \sin 2\alpha \end{vmatrix} .$$

Inlocuind pe $\sin 2\alpha$, $\sin 2\beta$, $\sin 2\gamma$, $\operatorname{tg}2\alpha$, $\operatorname{tg}2\beta$, $\operatorname{tg}2\gamma$ în funcțiune de $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}\gamma$, avem

$$(5)\quad \Delta_x = \frac{8 \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma \,(\operatorname{tg}^2\beta - \operatorname{tg}^2\alpha)\,(\operatorname{tg}^2\gamma - \operatorname{tg}^2\alpha)\,(\operatorname{tg}^2\gamma - \operatorname{tg}^2\beta)}{(1 - \operatorname{tg}^4\alpha)\,(1 - \operatorname{tg}^4\beta)\,(1 - \operatorname{tg}^4\gamma)}$$

$$(6)\quad \Delta_y = \frac{8 \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma\,(\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha)\,(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha)\,(\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\beta)\,(1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma)}{(1 - \operatorname{tg}^4\alpha)\,(1 - \operatorname{tg}^4\beta)\,(1 - \operatorname{tg}^4\gamma)}$$

$$(7)\quad \Delta_z = \frac{2}{\pi\,(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)} \cdot \begin{vmatrix} 1 + \operatorname{tg}^2\alpha & \operatorname{tg}^3\alpha & \operatorname{tg}\alpha \end{vmatrix} = 0.$$

Așa dar, în ipotezele făcute, sistemul (1) este satisfăcut de următorul sistem de soluțiuni:

$$(8)\quad \begin{cases} x = \dfrac{2\,(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)\,(\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma)\,(\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\alpha)}{(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)\,(1 + \operatorname{tg}^2\beta)\,(1 + \operatorname{tg}^2\gamma)} \\ y = \dfrac{2\,[1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma]}{(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)\,(1 + \operatorname{tg}^2\beta)\,(1 + \operatorname{tg}^2\gamma)} \\ z = 0. \end{cases}$$

Inlocuind în sistemul (8), tangentele în funcțiune de sinusuri și cosinusuri, el devine:

$$(8')\quad \begin{cases} x = 2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma\,, \; y = -\,2\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma \\ z = 0. \end{cases}$$

In cazul când triunghiul este isoscel, sistemul (1) se reduce la două ecuaţiuni şi este nedeterminat. Asemenea dacă $\alpha = \beta = \gamma$ sistemul se reduce la o singură ecuaţiune cu trei necunoscute şi deci este nedeterminat.

Observare. Din cauza formei pe care o are sistemul (1) am fost nevoiţi să excludem triunghiurile care au un unghiu de măsură $\frac{\pi}{2}$ sau $\frac{\pi}{4}$. Dacă considerăm sistemul:

$$(1') \quad \begin{aligned} x\cos\alpha\cos 2\alpha + y\sin\alpha\cos 2\alpha + z\cos\alpha\sin 2\alpha &= \sin 2\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha \\ x\cos\beta\cos 2\beta + y\sin\beta\cos 2\beta + z\cos\beta\sin 2\beta &= \sin 2\beta\cos\beta\cos 2\beta \\ x\cos\gamma\cos 2\gamma + y\sin\gamma\cos 2\gamma + z\cos\gamma\sin 2\gamma &= \sin 2\gamma\cos\gamma\cos 2\gamma \end{aligned}$$

observăm că, dacă α, β, γ sunt de măsuri diferite de $\frac{\pi}{2}$ sau $\frac{\pi}{4}$, putem trece dela sistemul (1') la sistemul (1) şi reciproc. Dacă $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$ avem şi $\gamma = \frac{\pi}{4}$, deci sistemul (1') devine: $|\ y = 0,\ z = 0$, care nu prezintă nici un interes. Dacă $\alpha = \frac{\pi}{2}$, iar $\beta,\ \gamma \neq \frac{\pi}{4}$ sistemul devine:

$$(1'') \qquad y = 0\ ,\quad x + z\operatorname{tg}2\beta = \sin 2\beta\ ,\quad x + z\operatorname{tg}2\gamma = \sin 2\gamma.$$

In cazul când $\alpha = \frac{\pi}{4}$, iar $\beta,\ \gamma \neq \frac{\pi}{2}$, sistemul devine:

$$(1''') \qquad z = 0\ ,\quad x = y\operatorname{tg}\beta = \sin 2\beta\ ,\quad x + y\operatorname{tg}\gamma = \sin 2\gamma$$

ale cărui soluţiuni se deduc din ale sistemului (1).

Au rezolvat problema D-nii: Gh. Th. Gheorghiu-Gladiş (Student Bucureşti), N. O. Zaharia (Liceul Constanţa), Corneliu I. Drăgan, Adrian C. Gheorghiu.

D-l Justin N. Vâlceanu a folosit in rezolvare faptul că z are valoarea *zero*, reducând astfel sistemul la unul de trei ecuaţiuni cu două necunoscute compatibil.

D-nii: N. O. Zaharia şi Gh. Th. Gheorghiu-Gladiş arată că verificarea soluţiunilor aflate conduc la stabilirea unor identităţi trigonometrice. Din această observare rezultă un procedeu pentru construirea unor identităţi trigonometrice.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 3761. *Să se găsească patru numere de câte două cifre, având ca sumă un număr de trei cifre, iar acestea adunate să dea ca sumă 9. Cifrele celor patru numere cerute sunt toate diferite şi diferite de 9.*

I. C. SAVIN.

Fie *ab*, *cd*, *ef*, *gh*, cele 4 numere cerute iar *xyz* suma lor, astfel că

$$x + y + z = 9.$$

Cifrele, diferite, ale celor 4 numere pot fi 8 numere diferite din şirul:

(1) 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8.

Dar din relaţiunea

$$10(a + c + e + g) + b + d + f + h = 100\ x + 10\,y + z$$

$$\therefore \quad 9(a+c+e+g)+a+c+e+g+b+d+f+h=100x+10y+z$$

se deduce

$$a + b + c + d + e + f + g + h = 9\ \text{m}$$

căci *xyz* având suma cifrelor egală cu 9, se divide cu 9.

Insă suma a 8 din numerele şirului (1) este divizibilă cu 9 numai dacă se consideră valorile semnificative, şi atunci

(2) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$

Deci cele 4 numere căutate au ca cifre numai valori cuprinse între 1 şi 8 inclusiv.

Cea mai mică şi cea mai mare valoare a lui *xyz*, va corespunde celor mai mici şi celor mai mari numere *ab*, *cd*, *ef*, *gh* formate cu cifrele membrului I al egalităţii (2) şi anume:

$$18 + 27 + 36 + 45 = 126$$

$$51 + 62 + 73 + 84 = 270$$

$$\therefore \quad 126 \leqslant xyz \leqslant 270 \qquad (3)$$

Este uşor de format următorul tabel (4), care cuprinde toate numerele *xyz*, începând cu 126, în care suma cifrelor este 9:

(4) $\begin{cases} 126; 135; 144; 153; 162; 171; 180; \\ 207; 216; 225; 234; 243; 252; 261; 270. \end{cases}$

Fie soluția

$$ab + cd + ef + gh = xyz$$

Se vede că cifrele a, c, e, g sau b, d, f, h se pot schimba, respectiv, între ele în toate modurile posibile fără ca xyz să se schimbe. Din aceste schimbări rezultă că unui sistem de cifre îi corespund

$$(4!)^2 = 576$$

sisteme de numere, cu cifrele diferite, având ca sumă un xyz dat.

Se va nota, în cele ce urmează numai soluțiile în care a, c, e, g, și b, d, f, h sunt în ordinea crescândă, pe care le vom numi soluții principale, spre deosebire de celelalte soluții pe care le numim soluții derivate.

Luăm pe rând pe fiecare număr xyz din tabelul (4) și căutăm soluțiile principale corespunzătoare.

Pentru $xyz = 126$, avem la efectuarea adunării

$$\begin{array}{l} ab \\ cd \\ ef \\ gh \\ \hline 126 \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{lll} b+d+f+h = 6 & ; 16 \text{ sau } 26 \\ a+c+e+g = 12 & ; 11 \text{ „ } 10 \\ S = 18 & ; 27 \text{ „ } 36 \end{array}$$

unde $$S = a + b + c + d + e + f + g + h$$

Ținând seamă de (2), rezultă că nu se poate avea la această adunare de cât numai

$$a + c + e + g = 10 \text{ și } b + d + f + h = 26$$

Se ia din șirul (2) toate sistemele de 4 cifre a căror sumă e 10, restul de 4 cifre vor avea ca sumă 26. Se găsește numai

$$\begin{array}{l} a + c + e + g = 10 = 1 + 2 + 3 + 4 \\ b + d + f + h = 26 = 5 + 6 + 7 + 8 \end{array}$$

Rezultă că lui 126 îi corespunde o singură soluție principală și anume

$$15 + 26 + 37 + 48 = 126$$

Se procedează la fel și pentru celelalte numere din (4) și se găsesc rezultatele centralizate în următorul tabel :

xyz	$a+c+e+g$	$b+d+f+h$	$ab+cd+ef+gh$	Nr. de soluţii principale
126	1+2+3+4	5+6+7+8	15+26+37+48	1
135	1+2+3+5	4+6+7+8	14+26+37+58	1
144	1+2+3+6 1+2+4+5	4+5+7+8 3+6+7+8	14+25+37+68 13+26+47+58	2
153	1+2+3+7 1+2+4+6 1+3+4+5	4+5+6+8 3+5+7+8 2+6+7+8	14+25+36+78 13+25+47+68 12+36+47+58	3
162	1+2+3+8 1+2+4+7 1+2+5+6 1+3+4+6 2+3+4+5	4+5+6+7 3+5+6+8 3+4+7+8 2+5+7+8 1+6+7+8	14+25+36+87 13+25+46+78 13+24+57+68 12+35+47+68 21+36+47+58	5
171	1+2+4+8 1+2+5+7 1+3+4+7 1+3+5+6 2+3+4+6	3+5+6+7 3+4+6+8 2+5+6+8 2+4+7+8 1+5+7+8	13+25+46+87 13+24+56+78 12+35+46+78 12+34+57+68 21+35+47+68	5
180	1+2+5+8 1+2+6+7 1+3+4+8 1+3+5+7 1+4+5+6 2+3+4+7 2+3+5+6	3+4+6+7 3+4+5+8 2+5+6+7 2+4+6+8 2+3+7+8 1+5+6+8 1+4+7+8	13+24+56+87 13+24+65+78 12+35+46+87 12+34+56+78 12+43+57+68 21+35+46+78 21+34+57+68	7
20	1+3+7+8 1+4+6+8 1+5+6+7 2+3+6+8 2+4+5+8 2+4+6+7 3+4+5+7	2+4+5+6 2+3+5+7 2+3+4+8 1+4+5+7 1+3+6+7 1+3+5+8 1+2+6+8	12+34+75+86 12+43+65+87 12+53+64+78 21+34+65+87 21+43+56+87 21+43+65+78 31+42+56+78	7

xyz	$a+c+e+g$	$b+d+f+h$	$ab+cd+ef+gh$	Nr. de soluții principale
216	1+4+7+8	2+3+5+6	12+43+75+86	7
	1+5+6+8	2+3+4+7	12+53+64+87	
	2+3+7+8	1+4+5+6	21+34+75+86	
	2+4+6+8	1+3+5+7	21+43+65+87	
	2+5+6+7	1+3+4+8	21+53+64+78	
	3+4+5+8	1+2+6+7	31+42+56+87	
	3+4+6+7	1+2+5+8	31+42+65+78	
225	1+5+7+8	2+3+4+6	12+53+74+86	5
	2+4+7+8	1+3+5+6	21+43+75+86	
	2+5+6+8	1+3+4+7	21+53+64+87	
	3+4+6+8	1+2+5+7	31+42+65+87	
	3+5+6+7	1+2+4+8	31+52+64+78	
234	1+6+7+8	2+3+4+5	12+63+74+85	5
	2+5+7+8	1+3+4+6	21+53+74+86	
	3+4+7+8	1+2+5+6	31+42+75+86	
	3+5+6+8	1+2+4+7	31+52+64+87	
	4+5+6+7	1+2+3+8	41+52+63+78	
243	2+6+7+8	1+3+4+5	21+63+74+85	3
	3+5+7+8	1+2+4+6	31+52+74+86	
	4+5+6+8	1+2+3+7	41+52+63+87	
252	3+6+7+8	1+2+4+5	31+62+74+85	2
	4+5+7+8	1+2+3+6	41+52+73+86	
261	4+6+7+8	1+2+3+5	41+62+73+85	1
270	5+6+7+8	1+2+3+4	51+62+73+84	1
Total, soluții principale				55

Problema are deci un număr de

$$55 \times 576 = 31680$$

soluții diferite.

Este de observat că în facerea tabelului de mai sus al soluțiunilor principale, nu s'au căutat decât soluțiunile până la

$$x > z = 207$$

inclusiv, căci de aci înainte $a + c + e + g$ are valorile pe care le avusese $b + d + f + h$ înainte de 207. Deci după 207 s'au scris ca soluțiuni numerele *ba, dc, fe, ha.*

Observațiuni: 1°. D-l I. C. Boian (Lc. militar, Tg.-Mureș) este singurul care a găsit numărul exact de soluțiuni.

2°. Au dat numărul de soluțiuni înscris în paranteză în urma numelui după cum urmează : P. I. Ghișoiu (21312) ; C. D. Ionescu.-Țiu (1608) ; E. N. Burlacu (912) ; H. P Ionescu (552) ; D. Șerban-Ulmeni (390) ; I. Gh. Popa (240) ; Gh. P. Boerescu (225) ; Gh. O. Zamfirescu (171) ; A. C. Raicu (38) ; I. N. Aliman (25) ; A. D. ghițescu (25) ; M. G. Ungheanu (16) ; F. Dinoci-Argeș (16) ; G. M. Păun (14) ; N. I. Radoveneanu (14) ; N. G. Voicu (12) ; I. C. Voicu (7) ; I. Alexandrescu (2) ; V. I. Crivăț (2).

PROBLEMA 3786. *Fie* S_1 *aria triunghiului podar al centrului de greutate al triunghiului* ABC *de arie* S. *Să se demonstreze în aceste condițiuni relațiunea*

$$S_1 = \frac{1}{9} S (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C).$$

Cezar Coșniță.

Soluție dată de D-nii : Mircea-Leonte, A. Negrea, Gheorghe Th. Gheorghiu-Gladiș (Studenți București), Justin N. Vâlceanu, C. D. Ionescu-Țiu, Adrian Gheorghiu, Cristian I. Râmniceanu, Petre I. Ghișoiu, Ioan C. Boian, Corneliu N. Popescu.

Fie A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$; A', B', C' picioarele înălțimilor $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$; G, G_a, G_b, G_c centrul de greutate al triunghiului ABC și proiecțiunile lui pe laturile acestui triunghiu.

Observăm că

$$\sphericalangle G_a G G_b = \pi - \sphericalangle C, \text{ etc.}$$

și că

$$(1)\quad S_1 = \text{supr. } G_a G G_b + \text{supr. } G_b G G_c + \text{supr. } G_c G G_a .$$

Insă avem:

$$\text{supr. } G_a G G_b = \frac{1}{2} \overline{G_a G} \cdot \overline{G_b G} \sin C$$

şi analoagele ei, iar din asemănarea triunghiurilor $G_a G A_1$ şi $A'AA_1$ avem relaţiunea:

$$(3) \qquad \overline{G_a G} = \overline{AA'} \cdot \frac{\overline{A_1 G}}{\overline{A_1 A}} = \frac{1}{3} \overline{AA'} = \frac{1}{3} h_a$$

şi în acelaş fel:

$$(3') \qquad \overline{G_b G} = \frac{1}{3} h_b \; ; \; \overline{G_c G} = \frac{1}{3} h_c .$$

Ţinând seamă de (3) şi (3') relaţiunea (1) devine;

$$(4) \quad S_1 = \frac{1}{18} [h_a h_b \sin C + h_b h_c \sin A + h_c h_a \sin B].$$

Observăm acum că putem exprimă suprafaţa triunghiului ABC în funcţiune de două înălţimi şi sinusul unghiului lor.

Având

$$S = \frac{1}{2} a h_a \quad \text{şi} \quad a = \frac{h_b}{\sin C},$$

rezultă imediat că:

$$(5) \qquad S = \frac{h_a h_b}{2 \sin C} .$$

In acelaş fel avem analoagele relaţiunii (5); deci putem scrie;

$$(6) \qquad S = \frac{h_a h_b}{2 \sin C} = \frac{h_b h_c}{2 \sin A} = \frac{h_c h_a}{2 \sin B} .$$

Folosind relaţiunile (6), relaţiunea (4) devine relaţiunea cerută:

$$(7) \qquad S_1 = \frac{1}{9} S [\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C].$$

Observarea I. Relaţiunii (7) putem să-i dăm şi alte forme interesante. De exemplu, folosind relaţiunile

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

(R raza cercului ABC), obţinem:

(8) $$S_1 = \frac{S}{36\,R^2}(a^2 + b^2 + c^2)$$

şi folosind încă relaţiunea

$$S = \frac{abc}{4R},$$

obţinem

(9) $$S_1 = \frac{4}{9}\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2b^2c^2}\right) S^2$$

relaţiune cunoscută (Ex. de Géometrie F. G. M.).

Relaţiunea (9) permite să exprimăm pe S_1 numai în funcţiune de laturile triunghiului dat ABC.

II. Dacă ne propunem să găsim o reciprocă a proprietăţii date în enunţul problemei, observăm în primul rând că un punct în plan este perfect determinat dacă se cunosc două din cele trei distanţe ale lui, (x, y, z), la laturile BC, CA, AB ale triunghiului. (Aceste distanţe sunt luate cu semn astfel că un punct I interior triunghiului are toate distanţele pozitive).

Observând că x, y, z sunt legate în orice triunghiu prin relaţiunea

(10) $$\frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c} = +1\ ^*).$$

Prin urmare, pentru a determină un punct al cărui triunghiu podar să aibă aria dată de relaţiunea (7), mai trebuie dată încă o condiţiune geometrică. Vom presupune deci că *voim să determinăm un punct I de mediana* CC_1 *(de exemplu) al cărui triunghiu podar are aria* S_1 *dată de relaţiunea* (7).

Punând pentru prescurtare $\frac{x}{h_a} = \lambda$, $\frac{y}{h_b} = \mu$, $\frac{z}{h_c} = \nu$ (11) raportarele λ, μ, ν sunt un sistem de soluţiuni ale sistemului de ecuaţiuni:

(12) $$\begin{cases} \lambda = \mu\ ,\ \lambda + \mu + \nu = +1, \\ a^2\mu\nu + b^2\lambda\nu + c^2\lambda\mu = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{9}\ . \end{cases}$$

Se obţin două sisteme de soluţiuni:

$$\lambda' = \mu' = \nu' = \frac{1}{3},$$

care dă centrul de greutate al triunghiului ABC şi un al doilea sistem:

$$\lambda' = \mu' = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3\,(2a^2 + 2b^2 - c^2)}\ ,\ \nu' = \frac{4a^2 + 4b^2 - 5c^2}{3\,(2a^2 + 2b^2 - c^2)},$$

prin urmare pe mediana CC_1, în afară de centrul de greutate G, mai există un punct pentru care aria triunghiului podar satisface relaţiunii (7).

Dacă $c^2 > \frac{4}{5}(a^2 + b^2)$, se poate enunţă o proprietate reciprocă pentru un punct interior triunghiului. In cazul triunghiului echilateral ambele puncte sunt confundate în centrul de greutate al triunghiului considerat.

O. N. Ţ.

*) Culegerea de probleme de geometrie de D-l prof. G. Ţiţeica, (cap. IV, Prob. 10) anul 1929 (Biblioteca *G. M.*).

*PROBLEMA 3923. *Care sunt numerele de trei cifre care se divid cu suma cifrelor lor şi dau la cât un număr întreg cu două cifre identice?*

I. IONESCU.

Câtul nu poate aveà mai mult de trei cifre, câte are deîmpărţitul, şi atunci el se poate pune sub formele *mmn, mnm, nmm*. Să vedem în ce caz câtul poate fi de trei cifre. Fie *szu* numărul căutat. Va trebuì să avem:

$$\frac{100s + 10z + u}{s + z + u} \geqslant 100$$

$$\therefore \qquad 0 \geqslant 10z + 99u$$

care nu e posibilă decât dacă $z = u = 0$, în care caz s poate fi orice cifră. De acì soluţiile: *100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900.*

Afară de aceste soluţii nu mai putem aveà decât soluţii în care câtul e de două cifre identice, adică de forma *nn*, adică $11 \times n$, în care $n \leqslant 9$. Avem dar:

$$\frac{100s + 10z + u}{s + z + u} = 11n.$$

$$\therefore \qquad 100s + 10z + u = 11n\,(s + z + u). \qquad (1)$$

Se vede de acì că numărul $szu = \mathcal{M}11$, şi deci trebuie să avem $s + u - z = 0$, sau $s + u - z = 11$. Să examinăm aceste două cazuri.

I. Fie

$$s + u - z = 0,$$

adică

$$z = s + u.$$

Inlocuind în (1) avem:

$$110s + 11u = 11n\,(2s + 2u),$$

$$\therefore \qquad 10s + u = 2n\,(s + u).$$

Se vede imediat că u e pereche. Punem $u = 2u'$, cu $u' \leqslant 4$, căci $u \leqslant 9$.

Găsim :

$$s = \frac{u'(2n-1)}{5-n} .$$

Cum $s \geqslant 1$ reese $n \leqslant 5$. Dacă luăm $n = 5$ trebuie să luăm $u' = 0$.

Deci $u = 0$ și reese $s = z$. De aci soluțiile *110, 220, 330, 440, 550, 660, 770, 880, 990.*

Pentru celelalte valori ale lui n avem :

$n = 1$	,	2	,	3	,	4.
$s = u'/4$	,	u'	,	$5u'/2$	,	$7u'$.

Prima dă $u' = 4$, deci $u = 8$, $s = 1$, $z = 9$, de unde soluția *198.*

A doua dă $u' = 1$, $u = 2$, $s = 1$, $z = 3$; sau $u' = 2$, $u = 4$, $s = 2$, $z = 6$, sau $u' = 3$, $u = 6$, $s = 3$, $z = 9$. Valoarea $u' = 4$ dă $z > 9$. De aci soluțiile *132, 264, 396.*

A treia dă $u' = 2$, $u = 4$, $s = 5$, $z = 9$, de unde soluția *594.*

A patra dă $u' = 1$, $u = 2$, $s = 7$, $z = 9$, de unde soluția *792.*

II. $s + u - z = 11$, adică $z = s + u - 11$. Formula (1) devine:

$$110s + 11u - 110 = 11n(2s + 2u - 11),$$

$$\therefore \quad 10s + u - 10 = n(2s + 2u - 11),$$

$$\therefore \quad u = 5 + \frac{(2s-1)(5-n)}{2n-1} .$$

De aci se vede că dacă $n = 5$, $u = 5$, iar s e indiferent. Deci $s = 1$, $z = 6$; sau $s = 2$, $z = 7$; $s = 3$, $z = 8$; $s = 4$, $z = 9$, de unde soluțiile *605, 715, 825, 935.*

Pentru alte valori ale lui n avem :

$$\begin{cases} n = 1 & 2 & 3 & , & 4 & , & 6 & 7 & , \\ u = 4(2s+1), & 2s+4, & 5+\dfrac{2(2s-1)}{5}, & & 5+\dfrac{2s-1}{7}, & & 5-\dfrac{2s-1}{11}, & 5-\dfrac{2s-1}{13}, & \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = 8 & 9 \\ s = 5 - \dfrac{2s-1}{5}, & 5 - \dfrac{4(2s-1)}{17} \end{cases}$$

Observând că $s + u \geqslant 11$, găsim:

$n = 1$, $s = 1$, dă $u = 9$, şi $s + u < 11$, iar $s = 2$ dă $u > 9$.

$n = 2$, $s = 1$, 2 dă $u = 6{,}8$ şi $s + u < 11$, iar $s = 3$ dă $u > 9$.

$n = 3$, cere pentru u întreg $s = 3$, 8 care dau $u = 7$, $u > 9$. Apoi $s + u < 11$, în primul caz.

$n = 4$, cere $s = 4$ pentru u întreg, şi dă $u = 6$, dar $s + u < 11$.

$n = 6$, cere $s = 6$ pentru u întreg, şi deci $u = u$. Dar $s + u < 11$.

$n = 7$, cere $s = 7$ pentru u întreg, şi deci $u = 3$. Dar $s + u < 11$.

$n = 8$, cere $s = 3$ sau 8 pentru u întreg, care dau $u = 4{,}3$. Dar $s + u < 11$.

$n = 9$, cere $s = 9$ pentru u întreg, care dă $u = 1$. Dar $s + u < 11$.

Problema are dar 30 soluţii, găsite mai sus.

I. I.

D-l M. Velea a dat 15 soluţii, I. Deac 19 soluţii, I. G. Popa 27 soluţii, T. Marcu 9 soluţii.

*EXERCIŢII

17. Există pătrate perfecte de forma *abcdba* la care $dc = ba + 4$ şi $ab = k^2$?

Panaite N. Teodor.

R. Grupul *ab* poate avea valorile 16, 25, 36, 49, 64 şi 81. Dintre răsturnatele *ba* ale acestor numere, singur 61 poate fi terminaţie de pătrat perfect, aşa că numărul cerut va fi de forma 16 *cd* 61.

Cum însă $dc = ba + 4 = 61 + 4 = 65$, rezultă că $cd = 56$. Numărul căutat este 165661, care însă nu este pătrat perfect, aşa că nu există nici o soluţie răspunzând enunţului.

18 Să se afle pătratele $N^2 = abcde$, la care media pătratică a ultimelor două cifre este egală cu produsul dintre media contraarmonică şi media aritmetică a cifrelor extreme ale rădăcinii.

Ioan C. Savin.

R. Fie $N = xzy$. Conform enunţului, trebuieşte să avem:

$$\sqrt{\frac{d^2 + e^2}{2}} = \frac{x^2 + y^2}{x + y} \cdot \frac{x + y}{2} = \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

Ţinând seama de ultimile două cifre ale unui pătrat perfect şi de faptul că expresiunea din primul membru al relaţiunii precedente trebuie să fie raţională, deducem că singurile soluţiuni sunt pentru $d = e = 0$ sau 4. Valoarea 0 nu dă soluţiuni şi rămâne $d = e = 4$, din care deducem

$$x^2 + y^2 = 8 \quad \therefore \quad x = y = 2.$$

Urmează că $N = 2z2$. Formând toate numerile de acest tip şi ridicându-le la pătrat, alegem numai pe cele terminate cu 44, $44944 = 212^2$ şi $68644 = 262^2$ care satisfac enunţul.

19. Să se găsiască numărul întreg şi pozitiv N care satisface următoarea relaţie:

$$4 + 7 + 10 + 13 + \ldots + (N^6 - N^3 + 224) = 13206.$$

L. F. Haim.

R. Relaţia din enunţ fiind o progresie aritmetică, termenul general va fi $4 + 3(n - 1) = 3n + 1$. Înlocuind valoarea aceasta în membrul întâiu şi făcând suma progresiei, obţinem ecuaţia:

$$3n^2 + 5n - 26412 = 0 \quad \therefore \quad n = 93.$$

Termenul general al progresiei va fi deci:

$$N^6 - N^3 + 224 = 3 \times 93 + 1.$$

sau

$$N^6 - N^3 - 56 = 0.$$

Punând

$$N^3 = Z,$$

obţinem ecuaţia:

$$Z^2 - Z - 56 = 0 \quad \therefore \quad Z = 8 \text{ şi } N = 2.$$

PROBLEME PROPUSE

*3951. Înmulţindu-se un număr cu 29,364 s'a găsit la produs 154073,84064. Proba însă nu reuşeşte. Verificându-se calculele se constată că produsele parţiale au fost bine calculate, că primul, al doilea şi ultimul produs parţial au fost bine puse la locul lor, dar că, din eroare, produsele parţiale date de cifrele 3 şi 9 au fost scrise unul sub altul.

Se cere deînmulţitul şi produsul exact. Să se sporiască apoi cât se poate de puţin produsul falş dat 154073,84064 aşa ca problema să fie posibilă, dar să nu mai fie certă.

I. Ionescu.

*3952. Trouver un entier de quatre chiffres sachant qu'il est égal à m fois le produit des deux nombres formés par ses deux chiffres à gauche et par ses deux chiffres à droites, m étant un nombre entier.

V. Thébault.

*3953. Fie patru puncte A, B, C, D. Se duc cercurile circumscrise la fiecare din triunghiurile formate de aceste puncte luate câte trei şi se înseamnă cu O_a , O_b , O_c , O_d centrele lor. Să se arate că perechile de puncte A, O_a ; B, O_b ; C, O_c ; D, O_d sunt isogonale respectiv faţă de triunghiurile $O_b O_c O_d$, $O_c O_d O_a$, $O_d O_a O_b$, $O_a O_b O_c$.

D. BARBILIAN.

*3954. Fiind date două puncte M şi N pe cercul O să se găsească locul punctelor de intersecţiune ale dreptelor lui SIMSON a acestor puncte în raport cu triunghiurile înscrise în cercul O, şi care au ca ortocentru un acelaş punct H.

TH. GH. COCEA.

*3955. Să se rezolve ecuaţia :

$$\sqrt[3]{(x+2)(x+12)} + \sqrt{(x+1)(x+13)} = 7.$$

CĂPITAN I. LINTEŞ.

*3956. Cu notaţiunile obişnuite, în orice triunghiu avem relaţiunea

$$4R\Sigma \frac{1}{a} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A = \Sigma \frac{ab}{r_a r_b} .$$

ION S. ANTONIU.

*3957. Să se rezolve ecuaţia

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0.$$

IOAN CURCHI.

3958. Pe latura BC a unui triunghiu ABC, se ia punctul P, care împarte pe BC în segmentele PB şi PC al căror raport este egal cu puterea m a raportului b/c a laturilor AC şi AB. Fie N intersecţia lui AP cu cercul ABC iar D şi D' intersecţiile acestui cerc cu diametrul perpendicular pe BC. Dacă M şi M' sunt intersecţiile lui BC respectiv cu ND şi ND', să se demonstreze că aceste puncte, M şi M' împart latura BC în segmente al căror raport este egal cu puterea $m + 1$ a raportului b/c. Să se demonstreze apoi că puterea lui A faţă de cercul MNM' este dată de raportul

$$\frac{b^{2(m+2)} - c^{2(m+2)}}{b^{2(m+1)} - c^{2(m+1)}} .$$

In cazul când m este egal cu unitatea, iar H este ortocentrul lui ABC, dreapta HD sau HD' este tangentă cercului MNM', punctul de tangență T fiind chiar intersecția acestui cerc cu AN. Să se deducă locul lui T când unghiul A rămâne constant iar vârfurile B și C sunt fixe.

COL. GH. BUICLIU.

*3959. Les côtés d'un angle droit AMB pivotant autour d'un point M d'une conique recoupent celle-ci en A et B; la droite menée par M et ayant une direction symétrique de celle de MB par rapport aux axes de la conique recoupe celle-ci en BO. Démontrer que la droite AB' tourne autour d'un point fixe.

R. GOORMAGHTIGH.

3960. Să se afle derivata funcției:

$$y = \operatorname{arc\,tg} \frac{2x^2 + \sqrt{1 - x^2} - 1}{x\left(2\sqrt{1 - x^2} - 1\right)}$$

și să se explice rezultatul.

N. CIORĂNESCU.

ERATĂ. La problema 3921, aproximația ce se cere e de 0,10 iar nu 0,01.

M. P. CHIȚU.

In volumul XXIV pag. 226 se va rectifică patratul lui 599 cu 353801.

V. POPESCU.

La nota 9 din Volumul XXXIV s'a omis la paragraful *(e)* dela pagina 134 numărul 83.

V. I. CRIVĂȚ.

La nota 31 din Volumul XXXIV pag. 341 să se înlocuiască 4^2 prin 2^2.

I. N. ALIMAN.

La pag. 53 din Volumul XXXV să se scrie patratul lui 384 exact: 147456.

I. N. ALIMAN.

La exercițiul 8 din Volumul XXXV pag. 118 a patra soluție e 25609.

M. UNGHEANU.

La exercițiul 48 din Volumul XXXV pag. 438 condițiile enunțului sunt $sm = d^2$ și $s + m = u$.

M. UNGHEANU.

Articolele, notele şi problemele însemnate cu * se referă la matematicile elementare (cursul de liceu).

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Chiţu P. Marin (3925); *Coşniţă Cezar* (3646, 49, 740, 97, 900, 36, 3636, N, P); *Curchi I.* (3928); *Deac I.* (3922, P); *Donciu N.* (P); *Dobrogeanu A. N.* (3818, 88); *Gheorghiu A.* (3900); *Ghişoiu I. Petre* (3878, 900, 19, 25, 30, 41, 3928); *Grossu I. Aurel* (3925); *Halperin N. Al.* (3941); *Heytmanek C.* (3813, 26, 67, 68, 92, 3869); *Iacob Şt. Eug.* (3947); *Mărgărit F.* (3931, 41, P, R); *Mereuţă Em.* (3894, 923, 39, 41, 43, 3947, P); *Mihăileanu N. N.* (3863, 92, 923, 25, 31, 39, 41, 43, 3947, E); *Motoc D. Mircea* (3892, 941, 43, 3947); *Murăroiu I.* (3882, N); *Popa Gh. Ioan* (3827, 72, 3912, 41, 3928, C); *Popescu N. C.* (3900); *Ştefănescu Z. C.* (3923); *Truţescu C. Ştefania* (3936); *Vasu Vasile* (3867, 68, 82, 89, 3869); *Velea M.* (3884); *Velicescu N. N.* (3813, 17, 19, 24, 68, 78, 89, 92, 95, 99, 925, 39, 41, 3739, 58, 818, 39, 69, 79, 928, 47, E); *Vissarion I. V.* (3938).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor trată mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac deasemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani completi broșați cu prețul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX și XXI care se vând cu prețul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV și XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecțiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția IV revăzută și adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu și G. Țițeica,** *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu și Șt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediția II revăzută și adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicațiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediția III-a revăzută și îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Țițeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* (Ediția II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Regiei Publice Comerciale «Monitorul Oficial și Imprimeriile Statului», B-dul Elisabeta 29, București I.

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călușei 23, București 4.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

BIBLIOTECA CENTRALĂ
SIBIU

ANUL XXXVI.

NUMĂRUL 4. — DECEMVRIE 1930.

SUMARUL

1. Généralisation d'une proposition du livre des lemmes . . . . . *V. Thébault.*
2. Asupra unei teoreme a D-lui D. Pompeiu . *D. V. Ionescu.*
3. O problemă de trigonometrie . . . . . *Col. Gh. Buicliu.*
4. Note matematice: 14 — 17.
5. Chestiuni de examen.
6. Bibliografie.
7. Cereri: 199.
8. Diverse.
9. Probleme rezolvate: 1733, 3670, 3722, 3858, 3865, 3869, 3903, 3931, 3941.
10. Exerciţii: 20 — 24.
11. Probleme propuse: 3961 — 3970.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

REGIA M. O., IMPRIMERIA NAŢIONALĂ

1930

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXXVI se compune din D-nii: Colonel **Gh. I. Liteanu** dela Marele Stat Major al Armatei; **G. A. Nichifor**, Doctor în Matematici, Conferenţiar la Universitatea din Bucureşti; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Regiei Publice Comerciale «Monitorul Oficial şi Imprimeriile Statului», Cassier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui GH. ILIESCU, Inginer, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 62, 78, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 310, 33, 55, 64, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 82, 553, 87, 650, 79, 711, 29, 53, 64, 807, 76, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 233, 338, 53, 82, 92, 405, 14, 22, 30, 39, 56, 66, 77, 502, 03, 45, 56, 77, 80, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 65, 84, 92, 95, 709, 13, 17, 35, 58, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 56, 3005, 45, 69, 81, 127, 50, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 07, 08, 09, 10, 16, 18, 20, 50, 61, 79, 405, 24, 25, 72, 89, 91, 95, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 20, 22, 27, 32, 47, 57, 65, 79, 81, 94, 99, 700, 03, 20, 33, 36, 80, 84, 93, 99, 804, 08, 10, 29, 35, 36, 44, 45, 48, 50, 53, 64, 70, 80, 96, 98, 908, 09, 13, 15, 16, 20, 21, 24, 33, 34, 35, 37, 40, 44, 48, 49, 50, 51, 53, 54, 55, 56, 59, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70.

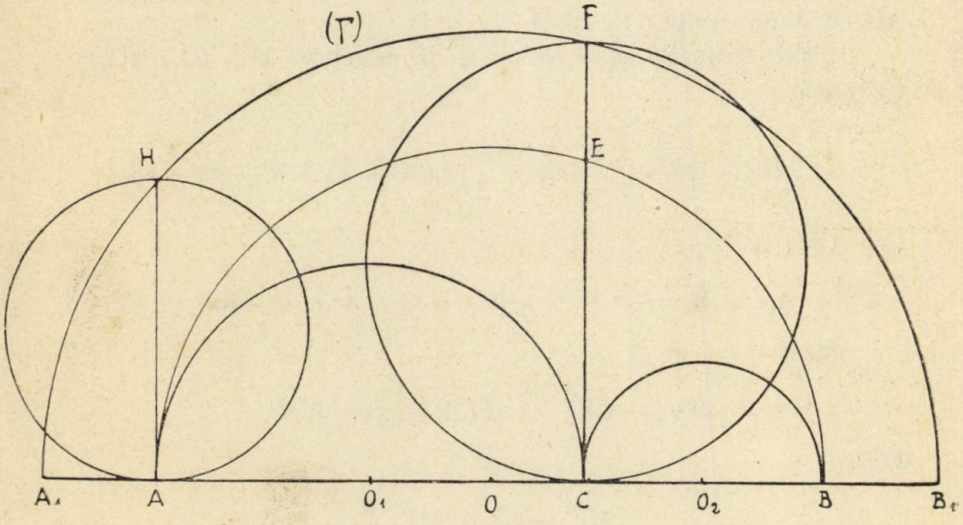
Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I—XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

GÉNÉRALISATION D'UNE PROPOSITION DU LIVRE DES LEMMES

ARCHIMÈDE a réuni dans son *livre des lemmes* de jolies propositions où s'affirment la puissance de ses méthodes synthétiques et la rigueur ou la séduction de ses démonstrations originales.

Nous avons repris, après beaucoup d'autres, les principales *Propositions* du géometre grec [1]). Il y a sans doute encore beaucoup à dire.

Voici une généralisation de la *Proposition* IV qui est probablement inédite [2]).



1. **Proposition IV.** — *Soient un demi-cercle* (O) *de diamètre* AB = 2R, C *un point de ce diamètre situé entre* A *et* B. *Décrivons deux demi-cercles* (O_1), (O_2), *de diamètres* AC = $2r_1$, CB = $2r_2$, *du même côte que* (O), *et élevons la perpendiculaire* CE *sur* AB. *On détermine ainsi une figure qu'*ARCHIMÈDE *appelle*

1) *Education mathématique :* 29-e année — 105 ; 30-e année — 105 *Mathesis.* — 1928 — 199 ; 1930 — 131 et 303.

2) Nous en publierons ailleurs une autre prochainement (V. T.).

ARBELON [1]), *dont l'aire comprise entre l'arc du plus grand demi-cercle et les deux circonférences des petits demi-cercles équivaut au cercle dont le diamètre est la perpendiculaire* CE.

En effet, l'aire cherchée s'exprime

$$\frac{\pi}{8}(\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 - \overline{CB}^2) = \frac{\pi}{8}(\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 + 2AC.CB - \overline{AC}^2 - \overline{CB}^2)$$

$$= \frac{\pi}{4} AC \,.\, CB = \pi \frac{\overline{CE}^2}{4} \,.$$

2. Considérons la même figure et traçons en plus un demi-cercle (Γ), *concentrique* au cercle (O).

Soient $A_1B_1 = 2(R + x)$ son diamètre qui, pour fixer les idées, est supposé plus grand que 2R. La perpendiculaire CE rencontre le cercle (Γ) en F. Traçons aussi la perpendiculaire à AB en A qui coupe (Γ) en H.

L'aire comprise entre les trois demi-cercles (Γ), (O_1), (O_2), s'exprime

$$S = \frac{\pi}{2}[(R + x)^2 - r_1^2 - r_2^2] = \frac{\pi}{2}[x(2R + x) + R^2 - r_1^2 - r_2^2].$$

Or

$$\overline{CF}^2 = A_1C \,.\, CB_1 = (x + 2r_1)(2r_2 + x) = 4r_1r_2 + x(2R + x).$$

Mais

$$4r_1r_2 = \overline{CE}^2 \quad ; \quad x(2R + x) = \overline{AH}^2 ;$$

d'où

$$\overline{CF}^2 = \overline{CE} + \overline{AH}^2.$$

Comme l'on a

$$R = r_1 + r_2 \quad , \quad R^2 - r_1^2 - r_2^2 = 2r_1r_2 = \frac{\overline{CE}^2}{2} \,.$$

1) Tranchet de cordonnier.

Finalement il vient

$$S = \pi\left(\frac{\overline{AH}^2}{2} + \frac{\overline{CE}^2}{4}\right),$$

soit

$$S - \pi\frac{\overline{AH}^2}{4} = \left(\frac{\overline{CE}^2}{4} + \frac{\overline{AH}^2}{4}\right) = \pi\frac{\overline{CF}^2}{4},$$

et

$$S = \pi\frac{\overline{CF}^2}{4} + \pi\frac{\overline{AH}^2}{4}.$$

L'aire comprise entre les demi-cercles (Γ), (O_1), (O_2), *équivaut à la somme des cercles dont les diamètres sont les perpendiculaires* CF *et* AH.

Lorsque $x = 0$, AH = 0, CF = CE, et l'on retrouve la *Proposition* IV du *livre des lemmes.*

Note. — Nous ne saurions trop engager les jeunes à la lecture de l'excellente traduction française des *Oeuvres complètes d'*Archimède de M. Paul Ver Eecke [1]). Ils y trouveront dans le *livre des lemmes* des propositions toutes séduisantes, dont les démonstrations du géomètre grec se rapprochent assez de nos démonstrations modernes, au point que l'on s'étonne de ne pas les voir figurer dans nos manuels classiques de géométrie élémentaire.

Personnellement, nous nous proposons de réunir en un petit livre ce qui a été dit sur les principales *Propositions* du *livre des lemmes.*

V. Thébault
Le Mans (France).

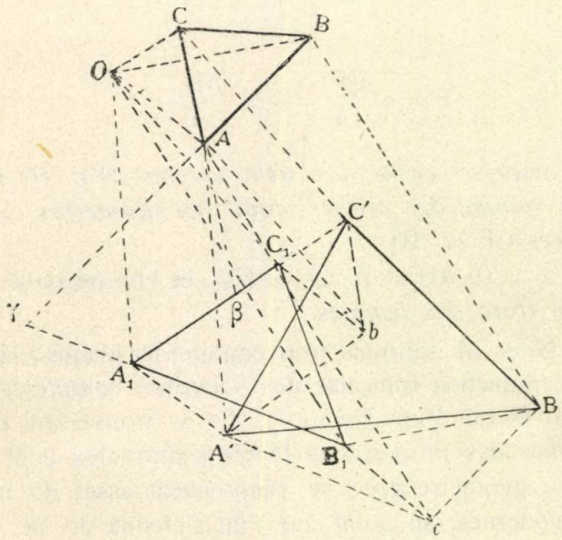
1) Paris, Librairie Gauthier-Villars. Bruxelles, Librairie Desclée — De Brouwer, 1921. Un volume grand in — 8° de LX et 553 pages.

ASUPRA UNEI TEOREME A D-LUI D. POMPEIU

D-l D. Pompeiu [1]) a stabilit o teoremă de geometrie foarte interesantă şi anume:

Dacă ABC, $A_1B_1C_1$ *sunt două triunghiuri direct asemenea şi* O *fiind un punct arbitrar în planul triunghiurilor, iar* A′ *al patrulea vârf al paralelogramului care are trei vârfuri* O, A *şi* A_1, B′ *şi* C′ *având semnificări analoage, triunghiul* A′B′C′ *este asemenea cu* ABC *şi cu* $A_1B_1C_1$.

In acest articol vreau să dau o demonstraţie geometrică a acestei teoreme.



Prin punctul A mai duc

$$Ab = \parallel OC_1 \quad , \quad Ac = \parallel OB_1.$$

Rezultă imediat că

$$A'b = \parallel A_1C_1 \quad , \quad C'b = \parallel CA$$

şi că

$$A'c = \parallel A_1B_1 \quad , \quad B'c = \parallel AB.$$

1) Bulletin de l'Ecole Polytechnique de Bucarest 1930, page 161.

Fie β şi γ intersecţiile lui AC cu A_1C_1 şi a lui AB cu A_1B_1. Deoarece unghiurile BAC, $B_1A_1C_1$ sunt egale, rezultă că patrulaterul $A\gamma A_1\beta$ este inscriptibil şi că prin urmare vom avea :

$$\sphericalangle A'cB' = \sphericalangle A'bC'.$$

Triunghiurile ABC, $A_1B_1C_1$ fiind asemenea, vom avea:

$$\frac{A'c}{B'c} = \frac{A'b}{C'b}.$$

Aceste ultime egalităţi dovedesc că triunghiurile $A'cB'$, $A'bC'$ sunt asemenea. Din asemănarea acestor triunghiuri rezultă că unghiurile $cA'B'$, $bA'C'$ sunt egale, adică

$$\sphericalangle cA'b = \sphericalangle B'A'C'.$$

Insă unghiurile $bA'c$ şi $B_1A_1C_1$ sunt egale şi deci am dovedit că :

$$(1) \qquad \sphericalangle B'A'C' = \sphericalangle B_1A_1C_1.$$

Deasemenea din asemănarea triunghiurilor $cA'B'$, $bA'C'$, avem

$$(2) \qquad \frac{cA'}{bA'} = \frac{A'B'}{A'C'} = \frac{A_1B_1}{A_1C_1}.$$

Egalităţile (1) şi (2) dovedesc că triunghiurile $A_1B_1C_1$ şi $A'B'C'$ sunt asemenea şi deci teorema este demonstrată.

D. V. Ionescu.

O PROBLEMĂ DE TRIGONOMETRIE

I. La 21 Mai 1922 am trimis regretatului V. Cristescu un articol cu acest titlu, spre a fi publicat în *Gazeta Matematică*. Prin acel articol îmi propuneam să arăt viciul de demonstraţie sau de interpretare, date unei probleme redijată de V. Cristescu. A urmat o corespondenţă între noi; dânsul vroiă să-mi arate că nici soluţia mea nu rezolvă riguros problema. A rămas ca la o întâlnire să discutăm asupra acelei probleme şi apoi să se publice articolul meu aşa cum l-am trimis la 21 Mai 1922, urmat de răspunsul său.

Imprejurările au vroit să nu ne putem întâlni, iar acum după moartea sa mi s'au repartizat parte din manuscrisele rămase dela V. Cristescu pentru a le redijă şi publică în gazetă. In aceste

manuscrise găsesc articolul meu pe care-l public aşa cum a fost redijat atunci, şi care va fi urmat de răspunsul lui V. CRISTESCU, răspuns care erà şi el redijat în lucrările pe care le-a lăsat.

Iată acel articol:

II. La pagina 284 din *Gazeta Matematică* Volumul XXVII s'a publicat de D-l V. CRISTESCU [1]) soluţia problemei 2403 propusă de decedatul E. N. BARISIEN, fost ofiţer în armata franceză. Enunţul problemei 2403 este:

«*Se cunosc următoarele relaţiuni între cosinusurile şi sinusurile unghiurilor unui triunghiu* ABC:

1) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C = 1$

(2) $\sin^4 A + \sin^4 B + \sin^4 C - 2\sin^2 A \sin^2 B - 2\sin^2 B \sin^2 C - 2\sin^2 C \sin^2 A + 4\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C = 0$.

«*Să se deducă, înlocuind sinusurile şi cosinusurile în funcţie de tangentele trigonometrice, relaţia*

(3) $$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$$».

In soluţia dată problemei 2403, ea nu este rezolvată direct, aşà cum o cere propunătorul, înlocuindu-se cosinusurile şi sinusurile în funcţie de tangentă, ci se face uz de alte relaţiuni trigonometrice între unghiurile unui triunghiu, şi anume se face uz de relaţiunile

(4) $$\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} C \operatorname{tg} A = 1 + \frac{1}{\cos A \cos B \cos C}$$

(5) $$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A \cos B \cos C$$

demonstrate în *Culegere de Probleme, Trigonometrie* XVII, 12 şi 3.

Fac următoarele notaţii, aşa cum sunt indicate în soluţia problemei 2403 la pagina 284 vol. XXVII

$$\operatorname{tg} A = x \quad , \quad \operatorname{tg} B = y \quad , \quad \operatorname{tg} C = z$$

(6) $$\begin{cases} x + y + z = u \\ xy + yz + zx = v \\ xyz = w \end{cases}$$

In soluţia dela pagina 284 vol. XXVII, plecând dela relaţia (4) în care se înlocueşte cosinusul în funcţie de tangentă şi se ridică la patrat, se ajunge la

(7) $$(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2) = (v - 1)^2.$$

1) Aceste cuvinte sunt adăugate, în manuscrisul meu, cu creionul de V. CRISTESCU.

Apoi se înlocueşte în (1) cosinusurile în funcţie de tangentă iar produsul $(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)$ prin $(v-1)^2$ în virtutea relaţiunei (7).

Această înlocuire este însă un viciu de demonstraţie căci pentru a demonstrà pe (3) se face uz de (7) care este tocmai (3) pus sub altă formă. In adevăr (7) este tot una cu

$$(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2) = (xy+yz+zx-1)^2$$

care, după efectuarea calculelelor, dă succesiv:

$$1+x^2+y^2+z^2+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2z^2 = 1+x^2y^2$$
$$+y^2z^2+z^2x^2+2xy^2z+2xyz^2+2x^2yz-2xy-2yz-2zx$$
$$\therefore\quad x^2+y^2+z^2+x^2y^2z^2 = 2xyz(x+y+z)-2xy-2yz-2zx$$
$$\therefore\quad (x+y+z)^2-2xyz(x+y+z)+x^2y^2z^2 = 0$$
$$\therefore\quad (x+y+z-xyz)^2 = 0$$

adică tocmai (3).

Pentru partea a doua a problemei se procedează la fel.

III. Iată în cele ce urmează soluţia pe care o cred directă şi prin care dovedesc că se poate deduce (3) *numai* înlocuind în (1) şi (2) cosinusurile şi sinusurile în funcţie de tangentă, fără a trece prin alte relaţiuni trigonometrice între unghiurile triunghiului, de natura relaţiunilor (4) , (5) sau altfel.

De altfel cred că şi propunătorul problemei 2403 cere prin enunţ această cale directă.

Din (6) se deduce cu uşurinţă

(8) $x^2+y^2+z^2=u^2-2v$; $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=v^2-2uw$; $x^2y^2z^2=w^2$.

Ţinând seamă de

$$\cos A = \frac{1}{\Sigma\sqrt{1+x^2}}\ ,\quad \cos B = \frac{1}{\Sigma\sqrt{1+y^2}}\ ,\quad \cos C = \frac{1}{\Sigma\sqrt{1+z^2}}$$

devine după înlocuire

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2}+\frac{2}{\Sigma\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}} = 1$$

$$\therefore\ (1+y^2)(1+z^2)+(1+z^2)(1+x^2)+(1+x^2)(1+y^2)+2\Sigma\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}$$
$$= (1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)$$

$$\therefore\quad 2+x^2+y^2+z^2-x^2y^2z^2 = -2\Sigma\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}$$

$$\therefore\ (9)\quad (2+x^2+y^2+z^2-x^2y^2z^2)^2 = 4(1+x^2+y^2+z^2+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2z^2).$$

Făcând în (9) înlocuirile conform cu relaţiile (6) se găseşte

$$(2+u^2-2v-w^2)^2=4(1+u^2-2v+v^2-2uw+w^2)$$

$$\therefore \quad [(u^2-w^2)-2(v-1)]^2=4[(u-w)^2+(v-1)^2]$$

$$\therefore \quad (u^2-w^2)^2+4(v-1)^2-4(v-1)(u^2-w^2)=4(u-w)^2+4(v-1)^2$$

$$\therefore \quad (u^2-w^2)(u^2-w^2-4v+4)-4(u-w)^2=0$$

$$\therefore \text{ (10) } (u-w)[(u+w)(u^2-w^2-4v)+8w]=0.$$

Deci relaţiunea (1) se reduce la (10) după înlocuirea cosinusurilor în funcţie de tangentă.

Să fac acum şi transformarea relaţiunei (2), pe care o pot scrie sub forma

$$(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C)^2-4(\sin^2A\sin^2B+\sin^2B\sin^2C+\sin^2C\sin^2A)+4\sin^2A\sin^2B\sin^2C=0.$$

Ţinând seamă de

$$\sin A=\frac{x}{\Sigma\sqrt{1+x^2}}\ ;\ \sin B=\frac{y}{\Sigma\sqrt{1+y^2}}\ ;\ \sin C=\frac{z}{\Sigma\sqrt{1+z^2}}$$

relaţiunea (2), devine după înlocuire

$$\left[\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{y^2}{1+y^2}+\frac{z^2}{1+z^2}\right]^2-4\left(\frac{x^2y^2}{(1+x^2)(1+y^2)}+\frac{y^2z^2}{(1+y^2)(1+z^2)}+\frac{z^2y^2}{(1+z^2)(1+y^2)}\right)+4\frac{x^2y^2z^2}{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}=0$$

$$\therefore \quad [x^2+y^2+z^2+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+3x^2y^2z^2]^2$$

$$-4[1+x^2+y^2+z^2+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2z^2][x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2x^2y^2z^2]=0$$

sau ţinând seamă de (6)

$$(u^2-2v+2v^2-4uw+3w^2)^2-4(1+u^2-2v+v^2-2uw+w^2)(v^2-2uw+2w^2)=0$$

$$\therefore \quad [(u-w)^2-2w(u-w)+2v(v-1)]^2-4[(u-w)^2+(v-1)^2][v^2-2w(u-w)]=0$$

$$\therefore \quad (u-w)[(u+w)(u-w^2-4v)+8w]=0$$

adică tot relaţiunea (10).

Prin urmare dacă în (1) şi (2), în care A, B, C *sunt unghiurile unui triunghiu,* se înlocuesc cosinusurile şi sinusurile în funcţie de tangente, se deduce relaţiunea (10), adică una din relaţiunile

$$(11) \qquad u-w=0$$

(12) $$(u + w)(u^2 - w^2 - 4v) + 8w = 0$$

sau simultan ambele aceste relaţiuni.

Rămâne acum de văzut care din relaţiunile (11) şi (12) subzistă în cazul când A, B, C *sunt unghiurile unui triunghiu*, observând în prealabil că (11) este tocmai relaţiunea (3), de demonstrat.

Deoarece A, B, C *sunt unghiurile unui triunghiu*, după cum se spune în enunţul problemei 2403, avem

$$A + B + C = \pi$$

$$\therefore \quad C = \pi - (A + B)$$

$$\therefore \quad \operatorname{tg} C = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B - 1}$$

sau ţinând seamă de notaţiile admise

$$z = \frac{x + y}{xy - 1} \qquad \therefore \qquad x + y + z = xyz$$

adică tocmai (11) sau (3).

Până aici am demonstrat deci direct, *numai înlocuind în (1) şi (2) cosinusurile şi sinusurile în funcţie de tangente, că din (1) şi (2) se deduc relaţiunile (11) [adică (3)], şi (12);* apoi ţinând seamă că A, B, C sunt unghiurile unui triunghiu, am dovedit că (11) deci (3) este adevărată.

Rămâne acum de văzut dacă nu cumva şi relaţiunea (12) este adevărată, în care caz (1) şi (2) ar conduce şi la (3) şi la (12).

Deoarece am dovedit că (11) este adevărată în caz când A, B, C *sunt unghiurile unui triunghiu*, urmează că în cele ce urmează pot face uz de (11). Ţinând deci seamă de (11) relaţiunea (12) devine

$$8w(v - 1) = 0$$

care dă

$$w = 0$$

ceeace este imposibil căci nici una din cantităţile x, y, z nu este nulă. De asemeni ar trebui să avem

$$v - 1 = 0$$

sau

(13) $$xy + yz + zx = 1.$$

Dacă (13) ar fi adevărată, ar trebui ca valoarea lui z, de exemplu scoasă din (13) să fie egală cu valoarea aceluiaşi z

scoasă din (11) pe care am dovedit-o că e adevărată. Dar din (11) şi (12) se scoate respectiv

$$z = \frac{x+y}{xy-1} \quad \text{şi} \quad -\frac{1}{z} = \frac{x+y}{xy-1}$$

$$\therefore \qquad z + \frac{1}{z} = 0$$

imposibilă în numere reale. Prin urmare (13) şi deci nici (12) nu poate avea loc, atunci când A, B, C *sunt unghiurile unui triunghiu.*

Rămâne deci că din (1) şi (2) se deduce numai (11).

Cu aceasta cred că problema a fost rezolvată în spiritul propunătorului ei.

IV. Cu ocazia rezolvărei acestei probleme pe această cale, s'a văzut că atât (1) cât şi (2) se reduc la relaţiunea (10) după înlocuirea cosinusurilor şi sinusurilor în funcţie de tangente.

Această coincidenţă trebuie să aibă o explicare, adică trebuie să fie o apropiere între sumele din membrii I ai relaţiunilor (1) şi (2). Pentru a găsi acea apropiere înlocuesc în (1) cosinusurile în funcţie de sinusuri şi găsesc

$$2 - \sin^2 A - \sin^2 B - \sin^2 C = -2\sqrt{(1-\sin^2 A)(1-\sin^2 B)(1-\sin^2 C)}$$

ridicând la patrat, ordonând şi reducând termenii asemeni se ajunge tocmai la (2). Deci (2) este patratul relaţiunei (1).

V. Cu IV se încheie articolul trimis lui V. Cristescu în 1922. In unul din numerile viitoare se va publică răspunsul pe care-l avea dânsul redijat. Din confruntarea acestor două articole şi a problemei 2403 corespondenţii *Gazetei Matematice* vor puteà găsi material de meditat şi poate că se va găsi cineva care să reià studiul problemei 2403, care după cum se vede e un exerciţiu destul de subtil. Am de adăugat că la răspunsul lui V. Cristescu aşi aveà de făcut unele observaţiuni dacă împrejurările nu ar impune să-i las lui ultimul cuvânt.

Din corespondenţa la care, prilejul problemei 2403, a dat naştere între V. Cristescu şi mine, corespondenţii *Gazetei Matematice* mai pot aprecià şi spiritul care domneşte la această revistă şi anume membrii ei după ce propun şi rezolvă chestiuni, nu le dau uitărei, ci le reiau şi se frământă cu ele până cred că ajung la ultimele concluzii posibile. Şi vor mai deduce, că membrii *Gazetei Matematice* când primesc *Gazeta* o citesc şi recitesc cu atenţia cea mai mare şi cu interesul cel mai... dezinteresat, pe care numai ştiinţa abstractă îl poate aveà.

Col. Gh. Buicliu

NOTE MATEMATICE

*14. *Asupra problemei No. 3628.* Această problemă a fost rezolvată la pag. 71.

Îmi propun să determin condițiile *a)* și *b)* dela acea problemă, în cazul când suma rădăcinilor este egală cu suma coeficienților. Dacă x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației, avem

$$(1) \quad x_1 + x_2 = p + q + 1 \quad \therefore \quad (2) \quad 2p + q + 1 = 0.$$

Chestiunea a). Se procedează în mod analog ca la problema 3628 și se află condiția ca ecuația dată să aibă rădăcini reale:

$$(3) \qquad p \geqslant 2(-2 \pm \sqrt{3}) \quad \text{și} \quad q \leqslant (-2 \pm \sqrt{3})^2.$$

Chestiunea b). Rădăcinile ecuației sunt:

$$x_{1,2} = \frac{-\pm \sqrt{p^2 - 4q^2}}{2}.$$

Ca să avem rădăcini întregi trebuie să avem:

$$(4) \qquad p^2 - 4q^2 = m^2 \quad \therefore \quad 2 = \frac{p^2 - m^2}{4}$$

p, m, numeri întregi și de aceeași paritate.

Ținând seama de (2), avem:

$$p^2 + 8p + 4 - m^2 = 0 \quad \therefore \quad p = -4 \pm \sqrt{12 + m^2}$$

și din (4), avem

$$q = 7 + 2\sqrt{12 + m^2}.$$

Ca să avem p și q întregi, trebue să avem relația

$$12 + m^2 = n^2$$

n, un număr întreg. De unde

$$(5) \qquad n^2 - m^2 = 12 \quad \text{și} \quad \therefore \quad n + m = \frac{12}{n - m}.$$

Deci $(n - m)$ e un divizor a lui 12, adică poate fi $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6$ și $(n + m)$ poate fi $\pm 12, \pm 6, \pm 4, \pm 3, \pm 2$.

Din acestea avem numai relația

$$(\pm 4 \pm 2) = \frac{12}{\pm 4 \mp 2}.$$

Deci singurele valori pe care le pot luà n şi m sunt respectiv ± 4 şi ± 2.

Pentru aceste valori avem

$$p = -4 \pm 4 \quad , \quad q = 7 + 8.$$

Ecuaţia dată se poate rezolvà în numere întregi, în cazurile:

1°. $p = 0 \; , \; 2 = -1$, şi ecuaţia este:

$$x^2 - 1 = 0 \qquad \therefore \qquad x_{1,2} = \pm 1.$$

2°. $p = -8 \; , \; 2 = 15$ şi ecuaţia e

$$x^2 - 8x + 15 = 0 \; \therefore \; x_1 = 3; \; x_2 = 5.$$

Ion Măţieş.

15. *Asupra exerciţiului 48 „G. M.“ — XXXV — 318.*

Ştiind că:

$$p^\alpha \operatorname{tg}^\alpha \tfrac{1}{2}A = r_a^\alpha$$

şi că

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

avem:

$$1^0 \qquad \frac{a^n r_a^m}{r_c^m \sin^n A} = \frac{b^n r_b^m}{r_b^m \sin^n B} = \frac{c^n r_c^m}{r_a^m \sin^n C} = 2^n R^n$$

sau

$$\frac{a^n r_a^m}{\operatorname{tg}^m \tfrac{1}{2}A \sin^n A} = \frac{b^n r_b^m}{\operatorname{tg}^m \tfrac{1}{2}B \sin^n B} = \frac{c^n r_c^m}{\operatorname{tg}^m \tfrac{1}{2}C \sin^n C} = 2^n R^n p^m.$$

La fel avem:

$$2^0 \; . \quad \frac{a^{n'} r_b^{m'}}{\operatorname{tg}^m \tfrac{1}{2}B \sin^{n'} A} = \frac{b^{n'} r_c^{m'}}{\operatorname{tg}^{m'} \tfrac{1}{2}C \sin^{n'} B} = \frac{c^{n'} r_a^{m'}}{\operatorname{tg}^m \tfrac{1}{2}A \sin^{n'} C} = 2^{n'} R^{n'} p^{m'}$$

$$3^0 \; . \quad \frac{a^{n''} r_c^{m''}}{\operatorname{tg}^{m''} \tfrac{1}{2}C \sin^{n''} A} = \frac{b^{n''} r_a^{m''}}{\operatorname{tg}^{m''} \tfrac{1}{2}A \sin^{n''} B} = \frac{c^{n''} r_b^{m''}}{\operatorname{tg}^{m''} \tfrac{1}{2}B \sin^{n''} C} = 2^{n''} R^{n''} p^{m''}$$

sau aplicând o cunoscută proprietate avem:

$$(1^0) \quad \frac{\Sigma a^n . r_a^m}{\Sigma \operatorname{tg}^m \tfrac{1}{2}A \sin^n A} = 2^n R^n p^m \; ; \; (2^0) \quad \frac{\Sigma a^{n'} . r_b^{m'}}{\Sigma \operatorname{tg}^m \tfrac{1}{2}B \sin^{n'} A} = 2^{n'} R^{n'} p^{m'} \; ;$$

$$(3^0) \quad \frac{\Sigma a^{n''} . r_c^{m''}}{\Sigma \operatorname{tg}^{m''} \tfrac{1}{2}C \sin^{n''} A} = 2^{n''} R^{n''} p^{m''}.$$

BIBLIOTECA CENTRALĂ a „ASOCIAŢIUNII“ SIBIIU

Formula (1⁰) pentru $2n = m = 2$ dă exercițiul citat.

Pentru:

$$n = n' = n'' \quad , \quad m = m' = m''$$

avem:

$$\frac{\Sigma a^n \cdot r_c^m}{\Sigma \operatorname{tg}^m \tfrac{1}{2}A \cdot \sin^n A} = \frac{\Sigma a^n \cdot r_b^m}{\Sigma \operatorname{tg}^m \tfrac{1}{2}B \cdot \sin^n A} = \frac{\Sigma a^n \cdot r_a^m}{\Sigma \operatorname{tg}^m \tfrac{1}{2}C \cdot \sin^n A} = 2^n R^n p^m.$$

HARALAMB P. IONESCU-BISS.

16. *Generalizarea problemei 3380.*

In cele următoare voiu da o generalizare a problemei 3380, rezolvată în «G. M.». — XXXV — 187.

Avem:

$$(\sin\tfrac{1}{2}B + \sin\tfrac{1}{2}C + \cos\tfrac{1}{2}A)^n = 4^n \sin^n \frac{B+C}{4} \cos^n \frac{B}{4} \cos^n \frac{C}{4}$$

$$(\sin\tfrac{1}{2}B + \sin\tfrac{1}{2}C - \cos\tfrac{1}{2}A)^n = 4^n \sin^n \frac{B+C}{4} \sin^n \frac{B}{4} \sin^n \frac{C}{4}$$

$$(\cos\tfrac{1}{2}A + \sin\tfrac{1}{2}B - \sin\tfrac{1}{2}C)^n = 4^n \cos^n \frac{B+C}{4} \sin^n \frac{B}{4} \cos^n \frac{C}{4}$$

$$(\cos\tfrac{1}{2}A + \sin\tfrac{1}{2}C - \sin\tfrac{1}{2}B)^n = 4^n \cos^n \frac{B+C}{4} \sin^n \frac{C}{4} \cos^n \frac{B}{4}$$

sau:

$$\Sigma \sin^{2n}\tfrac{1}{2}A \sqrt{(\sin\tfrac{1}{2}B + \sin\tfrac{1}{2}C + \cos\tfrac{1}{2}A)^n \cdot (\sin\tfrac{1}{2}B + \sin\tfrac{1}{2}C - \cos\tfrac{1}{2}A)^n \cdot (\cos\tfrac{1}{2}A + \sin\tfrac{1}{2}B - \sin\tfrac{1}{2}C)^n \cdot (\cos\tfrac{1}{2}A + \sin\tfrac{1}{2}C - \sin\tfrac{1}{2}B)^n} =$$

$$\Sigma\, 4^{2n} \sin^{2n}\tfrac{1}{2}A \sin^n \frac{B+C}{4} \sin^n \frac{B}{4} \cos^n \frac{B+C}{4} \cos^n \frac{B}{4} \sin^n \frac{C}{4} \cos^n \frac{C}{4}$$

$$= 2^n \Sigma \sin^{2n}\tfrac{1}{2}A \sin^n \frac{B+C}{2} \sin^n \frac{B}{2} \sin^n \frac{C}{2}$$

$$= \Sigma \sin^n A \sin^n \tfrac{1}{2}A \sin^n \tfrac{1}{2}B \sin^n \tfrac{1}{2}C$$

$$= \sin^n \tfrac{1}{2}A \sin^n \tfrac{1}{2}B \sin^n \tfrac{1}{2}C \, \Sigma \sin^n A.$$

HARALAMB P. IONESCU-BISS.
Oltenița.

Calea urmată corespunde exact cu soluția a II-a, dată la pag. 188 „G. M." XXXV, la rezolvarea problemei 3380, unde $n = 1$.

LT.-COL. LITEANU.

17. *O generalizare.* In R. M. T. se află propusă următoarea problemă :

Să se afle maximul expresiei

$$E = \text{arc tg}x_1 \cdot \text{arc tg}x_2$$

x_1 , x_2 *fiind rădăcinile ecuației*

$$x^2 - px + (p - i) = 0.$$

In rândurile următoare voi generaliză această problemă.

Fie :

$$x_1 , x_2 \ldots x_m$$

rădăcinile ecuației :

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots A_m = 0$$

între coeficienții căreia există relația :

$$A_0 + a A_1 - A_2 - a A_3 + A_4 + a A_5 - \ldots = 0$$

a fiind o constantă reală îmi propun să găsesc maximul expresiei :

$$E = \text{arc tg}x_1 , \text{arc tg}x_2 \ldots \text{arc tg}x_m .$$

Formând suma factorilor avem

$$A = \text{arc tg}x_1 + \text{arc tg}x_2 + \ldots \text{arc tg}x_m$$

sau

$$\text{tgA} = \text{tg}(x_1 + x_2 + \ldots x_m) = \frac{T_1 - T_3 + T_5 - T_7 \ldots}{1 - T_2 + T_4 - T_6 \ldots} = \frac{S_1 - S_3 + S_5 - S_7 + \ldots}{1 - S_2 + S_4 - S_6 + \ldots}$$

Tk însemnând suma produselor tangentelor câte k, iar Sk suma produselor rădăcinelor $x, \ldots x_m$ câte k.

Inlocuind S_1 , $S_2 \ldots S_m$ prin $-\frac{A_1}{A_0}$, $\frac{A_2}{A_0}$ etc. găsim

$$A_0 + \text{tgA} \cdot A_1 - A_2 - \text{tgA} \cdot A_3 + A_4 + \ldots = 0 \quad \therefore \quad \text{tgA} = a.$$

Deci suma factorilor e constantă şi produsul e maxim când factorii sunt egali, când

$$\text{arc tg}x_1 = \text{arc tg}x_2 = \ldots \text{arc tg}x_m$$

deci

$$x_1 = x_2 \ldots = x_m .$$

Ecuația e :

$$A_0 (x - k_1)^m = 0 \quad \therefore \quad x_1 = -\frac{A_1}{mA_0} .$$

Maximul expresiei e deci:

$$E_{max} = \left(\text{arc tg } (-\frac{A_1}{mA_0})\right)^m$$

cu condiția ca:

$$A_0\left(x + \frac{A_1}{mA_0}\right)^m \equiv A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots A_m .$$

In particular dacă ecuația:

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} - A_2 x^{m-2} - A_3 x^{m-3} + A_4 x^{m-4} + \ldots = 0$$

admite ca rădăcină pe

$$x = 1$$

sau dacă ecuația:

$$A_0 x^m - A_1 x^{m-1} - A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} + A_4 x^{m-4} \ldots = 0$$

admite ca rădăcină pe $x = -1$, E admite un maxim când rădăcinele ecuației

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} \ldots = 0 \text{ sunt egale.}$$

C. Popovici.

CHESTIUNI DE EXAMEN

ȘCOALA POLITECNICĂ DIN BUCUREȘTI

Examenul de admitere în Anul Preparator (Octomvrie 1930)

ARITMETICA

1) Inmulțindu-se un număr cu 29,364 s'a găsit la produs 154073,84064. Proba însă nu reușește. Verificându-se calculele se constată că produsele parțiale au fost bine calculate, că primul, al doilea și ultimul produs parțial au fost bine puse la locul lor, dar că, din eroare, produsele parțiale date de cifrele 3 și 9 au fost scrise unul sub altul.

Se cere deînmulțitul și produsul exact. Să se sporească apoi cât se poate de puțin produsul falș dat 154073,84064 așa ca problema să fie posibilă, dar să nu mai fie certă.

2) Se dă fracția $\frac{12}{25}$. Să se mai scrie o cifră după 12 și una după 25, așa ca noua fracțiune cu trei cifre la numărător și trei cifre la numitor să se transforme exact în fracție zecimală.

3) Un funcţionar depune la o bancă sumele pe care le are disponibile şi poliţele pe care le are de încasat, şi împrumută de acolo sumele de care are nevoie.

Pentru sumele pe care le depune la bancă i se dă o dobândă de 8%, însă numai cu începere dela aceiaşi zi a lunii următoare şi numai pentru miile de lei întregi pe care le are depuse. Pentru sumele ce împrumută dela bancă, i se socoteşte 16% dobândă la suma întreagă cu începere chiar din ziua în care rămâne dator băncii. Acelaşi procent de 16% se aplică şi la sconturi. Dobânzile nu se adaogă la capitaluri de cât la încheere de conturi sau la finele anului.

La 1 Ianuarie 1930 funcţionarul avea depusă, de mai multe luni, suma de 3000 lei pentru care şi-a luat dobânzile cuvenite până atunci. La 2 Fevruarie depune la bancă, pentru încasare, o poliţă de 8100 lei cu scadenţa la 2 Iulie 1930. La 20 Martie ia dela bancă 15000 lei pentru a-şi plăti chiria. La 19 Aprilie depune la bancă 8040 lei.

Se cere situaţia contului la 1 Iunie 1930.

Toate chestiunile sunt obligatorii.

Timpul acordat: 4 ore.

GEOMETRIE ELEMENTARĂ

I.

Pe un cerc dat avem un punct fix A şi un punct mobil M. Să se găsească locul simetricului punctului A faţă de M, precum şi locul simetricului punctului M faţă de A.

II.

Prin vârfurile A, B, C, D, ale unui patrulater convex P se duc bisectoarele exterioare ale unghiurilor acelui patrulater.

1) Să se arate că aceste bisectoare formează un patrulater P' inscriptibil.

2) In ce caz patrulaterul P' e un trapez sau dreptunghiu?

III.

In piramida triunghiulară OABC, muchiile OA, OB, OC sunt perpendiculare două câte două. Presupunând că se dau lungimile $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, să se găsească aria triunghiului ABC, precum şi depărtarea dela vârful O la faţa ABC.

22 Octomvrie 1930. Timpul acordat: 4 ore.

ALGEBRĂ

(Toate chestiunile sunt obligatorii)

I. Se dau ecuaţiunile:

$$\begin{aligned} mx - y &= 6m - 3 \\ mx + y &= 6m + 3 \end{aligned} \qquad (1)$$

şi se cere:

1) Să se rezolve sistemul format de aceste două ecuaţiuni.

2) In cazul $m = 1$, să se reprezinte grafic, în raport cu două axe rectangulare Ox, Oy — ecuaţiunile (1); să se explice pe cale geometrică pentruce soluţia sistemului (1) este aceeaşi oricare ar fi valoarea lui m.

II. Se consideră polinomul:

$$(2) \qquad y(x) = -(x-4)^2 + 4(x-4) - \frac{8}{3}$$

şi se înseamnă pentru prescurtare, cu $y(a)$ rezultatul înlocuirii în polinomul $y(x)$. a lui x prin cătimea a; se cere:

1) Să se arate că avem relaţia:

$$y(4) + 4 \cdot y(6) + y(8) = 0.$$

2) Să se reprezinte grafic, în raport cu două axe rectangulare Ox, Oy funcţiunea $y(x)$, când x variază între 4 şi 8.

III. Să se demonstreze că ecuaţia:

$$(x-a)^2 - (b-a)(x-a) + \frac{(b-a)^2}{6} = 0$$

în care a şi b sunt numere oarecare, pozitive sau negative, are totdeauna rădăcinile reale şi cuprinse între a şi b.

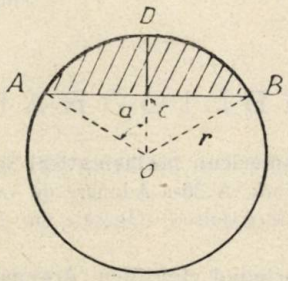
Timpul acordat: 3 — 7.

TRIGONOMETRIE

1) Să se calculeze cea mai mică valoare a unghiului x dat de relaţia:

$$\cos^2 x = \frac{0{,}34 \operatorname{tg}^2 15^\circ 42' 30''}{1 + \sin 27^\circ}.$$

2) Să se stabilească formula care dă aria unui segment circular ADB, în care cunoaştem coarda $AB = 2a$ şi înălţimea segmentului $CD = i$. Să se aplice această formulă la calculul volumului unui lăturoiu (o scândură tăiată



din marginea unui buştean cilindric de lemn); lăturoiul are ca secţiune segmentul precedent, în care $2a = 28$ cm. (lăţimea scândurii), $i = 3$ cm. (grosimea scândurii la mijloc), iar lungimea lăturoiului este de 4 m.

3) Să se rezolve ecuaţia:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = m;$$

să se găsească valorile lui x pentru cazurile când: *a)* $m=1$; *b)* $m=2$; *c)* $m=4$.

FIZICO-CHIMICE ŞI ŞTIINŢE NATURALE

Cărbunele în natură (geneza şi aplicaţiile lui).

Concursul de admitere în Anul I (Septemvrie 1930)

ALGEBRĂ SUPERIOARĂ

I. Se consideră expresia:

$$y = \frac{4\sin 3\theta + 5\sin 5\theta + \sin 7\theta}{3\sin 3\theta + \sin 5\theta}.$$

Să se afle ce devine y când se ia ca nouă variabilă $x = 4\cos^2\theta$.

II. Fie funcţiunea:

$$y = 2\sqrt{-x^4 + 8x^2 - 15} + \operatorname{arc\,sin}(x^2 - 4).$$

1) În ce interval trebue să se găsească x pentru ca y să fie real?

2) Să se studieze în acest caz variaţia funcţiunii y (determinarea intervalelor în care creşte, descreşte, precum şi valorile maxime sau minime).

III. Fiind dată ecuaţia:

$$x^3 - 3x^2 - 5x + 3 = 0$$

se cere:

1) Să se arate că ecuaţia are toate rădăcinile reale;

2) Să se separe aceste rădăcini.

3) Să se calculeze cea mai mare rădăcină cu o eroare mai mică de o miime.

Timpul acordat: 4 ore.

BIBLIOGRAFIE

Bulletin of the American mathematical Society. Anul XXXVI. No. 9. Septembrie 1930. New-York. A 36-a Adunare de vară a Societăţii Matematice americane, de R. G. D. Richardson. Operele lui Dedekind, de E. T. Bell.

Anales de la Sociedad cientifica Argentina. Tomul CX. Fascicola IV. Octombrie 1930. Buenos-Aires. Metodă sintetică pentru determinarea azimutului, orei locale şi latitudinii prin mijlocul unei singure observaţiuni, de E. V. Gualano. Compilaţiune de câteva note relative la geometria analitică, de C. C. Dassen.

Boletin Matematico. Ano III. No. 8 August—Octombrie 1930. Buenos-Aires. Asupra unei ecuaţii diferenţiale speciale de al doilea ordin, de W. LEWICKY. Notă asupra dreptei lui SIMPSON, de V. THÉBAULT. (Articol reprodus din *Gazeta Matematică*, Anul XXXV, pag. 205). Asupra demonstraţiei teoremei lui BÉZOUT, de J. TSCHLEK. † Profesorul TRAIAN DORDEA, necrolog.

Journal de mathématiques élèmentaires, publié par H. VUIBERT. Anul 55. No. 3. Noembrie 1930. Paris.

Revista matematică din Timişoara. Anul X No. 9. Noembrie 1930. Timişoara. Câteva probleme deduse cu ajutorul progresiunilor aritmetice, de CĂP. G. I. LINTEŞ.

FEDERIGO ENRIQUES. Leçons de Géométrie projective. Paris 1930. Gauthier-Villars et C-ie. Editeurs.

Acest volum de 430 pagini este traducerea din limba italiană a Geometrii proiective publicată de D-l F. ENRIQUES, profesor la Universitatea din Roma, şi tradus de P. LABÉRENNE. Tratatul acesta este unul din cele mai apreciate în acest domeniu de către geometrii moderni.

După o scurtă introducere urmează capitolele: Propoziţiuni fundamentale ale formelor fundamentale; dreaptă punctuală, fascicol de plane, plan punctual, plan riglat, fascicol de raze, stea de raze, stea de plane, spaţiu punctual, spaţiu de plane, şi unde se vorbeşte de elementele improprii, proiecţiuni, secţiuni, dispoziţiuni circulare. Cap. II tratează dualitatea. Cap. III se ocupă cu grupele armonice. Cap. IV se ocupă de postulatul continuităţii şi aplicaţiuni. Cap. V conţine teorema fundamentală a proiectivităţii. Cap. VI proiectivitatea dintre forme de prima speţă. Cap. VII, involuţia între acele forme. Cap. VIII proiectivitatea între forme de a doua speţă. Cu Cap. IX se începe studiul conicelor. Cap. X conţine proiectivitatea dintre conice. Cap. XI probleme. Cap. XII proprietăţi focale. Cap. XIII proprietăţi metrice ale conicelor. Cap. XIV se ocupă cu cuadrice riglate şi curbe în spaţiu de al treilea ordin. Cap. XV tratează despre proiectivitatea formelor de a treia speţă. La fine e un apendice care conţine grupele de proiectivitate, geometria abstractă, transformări, coordonate proiective, elemente imaginare şi o privire istorică asupra desvoltării geometriei proiective.

I. I.

N. ABRAMESCU. *Lecţiuni de geometrie pură infinitezimală.* Cluj 1930. Preţul 220 lei.

D-l N. ABRAMESCU, harnicul profesor de matematici dela Facultatea de ştiinţe din Cluj, a îmbogăţit literatura matematică română cu o carte care lipsea complect, şi anume despre geometria infinitezimală tratată sintetic, şi în care se publică un curs făcut de D-sa la Universitatea din Cluj.

Cartea începe cu o prefaţă scrisă de D-l MAURICE D'OCAGNE care a publicat lucrări şi tratate interesante în acest domeniu şi care a profesat geo-

metria infinitezimală pură la Şcoala de Poduri şi Şosele din Paris şi la Şcoala Politecnică de acolo. Prefaţa se încheie cu o urare ca opera D-lui N. ABRAMESCU să aibă tot succesul, pe care-l merită, urare la care ne asociem şi noi, căci cartea este scrisă cu competinţă, cu claritate, tipărită fără cusur, şi va face cinste matematicii române.

După o introducere istorică şi o tratare pe scurt a infiniţilor mici, se studiază pe rând curbura curbelor plane, curbele înfăşurătoare, noţiuni de geometrie cinematică plană, curbele în spaţiu, curbe sferice, curbura şi torsiunea în spaţiu, suprafeţe desfăşurabile şi riglate, curbele trasate pe suprafeţe, complexe şi congruienţe de drepte, noţiuni de geometrie cinematică în spaţiu. La fiecare chestiune se studiază propietăţi interesante şi se dau aplicaţiuni numeroase.

I. IONESCU.

N. ABRAMESCU. Lecţiuni de Trigonometrie plană, pentru clasa VI. Bucureşti 1930. Preţul 83 lei.

In un volum de 64 pagini autorul dă cunoştinţele de trigonometrie cerute de programele actuale de liceu, cu complectările necesare pentru cei ce vor să-şi desvolte cunoştinţele matematice. Materia este cea obişnuită în asemenea tratate, afară de 2 pagini cu o introducere istorică şi o ordine puţin diferită în tratarea chestiunilor. Astfel la început nu se consideră decât unghiurile ascuţite, table naturale şi logaritmice, triunghiurile dreptunghice, apoi unghiurile din primele două cadrane, triunghiuri oarecare, unghiuri oarecare, ecuaţii trigonometrice, patrulatere şi probleme practice. Se dau numeroase aplicaţiuni şi vre 150 exerciţii cu rezultatele lor. Cartea e scrisă de un profesor cu multă experienţă în învăţământul matematicilor şi va aduce servicii mari celor ce vor să înveţe bine matematicile în starea actuală a reducerii programelor.

Autorul roagă ca să i se comunice eventualele erori de calcul sau observaţiunile ce se vor găsi de făcut. Din acest punct de vedere aşi dori să se complecteze cartea cu noţiuni despre funcţiunile trigonometrice inverse, pentru ca elevii să poată tratà chestiuni referitoare ce le întâlnesc prin reviste, şi cu studiul unor neegalităţi trigonometrice. In privinţa celor afirmate la pagina 147 că nu ar există *tetragonometrii* pot spune că eu posed o carte intitulată: *Applications de la tétragonométrie aux plans parcéllaires* par BONNEVIE, Paris 1878. La chestiunea No. 93 trebuie specificat că punctele A, B, C, D sunt coplanare.

I. IONESCU.

AL. MANICATIDE. *Curs complimentar de Algebră.* Fosta Algebră de clasa V reală. Revăzută şi adăogită de N. ABRAMESCU. Bucureşti 1930. Ediţia X.

N. ABRAMESCU. *Lecţiuni elementare de Astronomie.* Ediţia IX revăzută şi adăogită. Bucureşti 1930. Preţul 108 lei.

CERERI

199. La Liceul din Constanţa a apărut prin 1920 o revistă intitulată «*Auxiliar Matematic*». Cât timp a durat apariţiunea ei?

I. G. POPA.

DIVERSE

Societatea Română de Matematici şi-a reluat activitatea în seara zilei de 3 Noemvrie. După ce D-l Preşedinte I. IONESCU a anunţat moartea ilustrului matematician francez PAUL APELL, D-l G. ŢIŢEICA face o comunicare asupra deplasării solidelor în spaţiu şi o generalizare în hiperspaţiu.

In şedinţa dela 17 Noemvrie D-l D. POMPEIU a vorbit despre viaţa şi opera lui PAUL APELL. D-l LUCA TEODORIU a făcut o comunicare asupra zerorilor derivatei unui polinom oarecare şi D-l GR. MOISIL despre principiul celei mai mici acţiuni în mecanica undelor.

D-l RODOLPHE RACLIŞ a fost numit asistent la cursul de analiză, profesat de D-l G. ŢIŢEICA la Şcoala Politecnică din Bucureşti.

Profesorul FLORIAN CAJORI dela Universitatea din California, unul dintre cei mai meritoşi istoriografi ai matematicilor, a murit la 14 August 1830.

W. J. GREENSTREET, redactorul Revistei *The Mathematical Gazette* din Anglia, a încetat din viaţă în luna Iunie, în etate de 69 ani.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1733. *Pentru repartizarea beneficiilor unei Societăţi de tramvaie, se prescrie următoarele: „Beneficiile exploatării, după ce se vor deduce cheltuielile, amortizările şi dobânda de 5% atribuită capitalului, se vor repartiză în modul următor: 10% pentru formarea unui fond de rezervă, iar din sold 1/4 Comunei şi 3/4 acţionarilor până la 8% în care intră şi dobânda sus menţionată; 1/2 Comunei şi 1/2 acţionarilor*

dela 8% în sus până la 12% și 3/4 Comunei și 1/4 Societății dela 12% în sus".

Se cere să se calculeze formulele care să dea beneficiul acționarilor și suma ce se plătește Comunei în procente când se cunoaște, tot în procente, beneficiul total al Societății.

I. Ionescu.

Fie deocamdată p' soldul în procente care rămâne după ce se deduce, din beneficiul total al exploatării, cheltuielile, amortizările, dobânda de 5% atribuită capitalului și din rest 10% pentru fondul de rezervă.

Conform enunțului, Comunei i se cuvine $p'/4$ și acționarilor $3p'/4$, și asta până când $(3p'/4) + 5 = 8$, adică până când $p' = 4$. Pentru $p' = 4$ Comunei i se cuvine 1% și acționarilor 8%.

Dacă $p' = 4$, Comunei i se va cuveni procentual $\frac{1}{2}(p' - 4) + 1 = (\frac{1}{2}p' - 1)$, iar acționarilor $\frac{1}{2}(p' - 4) + 8 = (\frac{1}{2}p' + 6)$ procente; asta până când $(\frac{1}{2}p' + 6) = 12$, adică $p' = 12$, când Comuna ia $[3(p' - 12)/4] + 5 = 3p'/4) - 4$ procente și acționarii $[p' - 12/4] + 12 = (p'/4) + 9$ procente.

Fie acum p procentul beneficiului exploatării. E evident că dacă $p < 5$ atunci vor luà numai acționarii p%. Dacă $p > 5$, atunci $(p - 5)/10$ se va atribuì fondului de rezervă iar soldul $9(p - 5)/10$ va fi tocmai p' considerat mai sus și se va face împărțirea precum am văzut. Inlocuind dar pe p' cu $9(p - 5)/10$ și ținând seama că pentru $p' = 4$ și $p' = 12$ avem respectiv $p = 85/9$ și $p = 165/9$ alcătuim următorul tablou care conține formulele cerute.

p	$p<5<p<85/9=9,444...<p<165/9=18,333...<p$			
Fond de rezervă	0	$0,1\ p - 0,5$	$0,1\ p - 0,5$	$0,1\ p - 0,5$
Partea Comunei	0	$0,225p - 1,125$	$0,45\ p - 3,25$	$0,675p - 7,375$
Partea acționarilor	p	$0,675p + 1,625$	$0,45\ p + 3,75$	$0,225p + 7,875$

Ion B. Florescu.

PROBLEMA 3670. *Un aviator sare din paraşută; admiţându-se că avionul merge cu* $150^{Km}/_{oră}$, *iar paraşuta se deschide după 4 secunde, se cere să se calculeze şocul suferit de aviator, în momentul deschiderei paraşutei, presupunându-se că paraşuta s'ar deschide instantaneu după cele 4 secunde şi mişcarea, înainte de deschidere, ar fi considerată în vid.*

Care ar fi şocul în cazul când săritura ar fi dintr'un balon captiv?

CĂPITAN I. LINTEŞ.

Efortul de deschidere al unei paraşute este şocul produs prin deschiderea ei, care va fi egal cu *cantitatea de mişcare* a massei căzătoare, adică:

1) $$E = m \cdot V.$$

In cazul căderei din avion, care merge cu viteza V_a orizontală, atunci vom aveà:

2) $$V = \sqrt{V_a^2 + g^2t^2}.$$

Considerându-se mişcarea paraşutei, până la deschidere, în vid, adică admiţând drept traectorie un arc parabolic, aşà cam cum se întâmplă în realitate, deoarece rezistenţa aerului influenţează prea puţin massa căzătoare pânăla deschiderea paraşutei.

In consecinţă:

$$E = m \cdot \sqrt{V_a^2 + g^2t^2}.$$

In cazul când avionul merge cu $150^{Km}/_{oră}$, avem:

$$V_a = \frac{150}{3{,}6} = 41{,}7^{m}/_{sec.}.$$

Admiţând apoi că greutatea aviatorului este în mediu 80 Kg., şi cum $t = 4$ secunde, găsim că:

$$E = \frac{80}{9{,}805} \cdot \sqrt{41{,}7^2 + (9{,}805 \times 4)^2}$$

$$= 467{,}57 \text{ Kg.}$$

In cazul când săritura ar fi dintr'un balon, atunci:

$$V = g \cdot t.$$

Prin urmare:

$$E = m \cdot g \cdot t.$$

In cazul particular, pentru:

$$m = \frac{80}{g} \quad \text{şi} \quad t = 4 \text{ secunde}$$

găsim:

$$E = \frac{80}{g} \cdot g \cdot t = 80 \cdot t = 320 \text{ Kg.}$$

D-l Gheorghiu T. Gheorghe (Galaţi) a dat o foarte bună soluţie socotind însă valoarea şocului $\frac{1}{2}\ mV$ în loc de Vm.

Observaţie.

Prin experienţe numeroase, s'a găsit (in Germania) că un om poate suportà un efort — în condiţiuni analoage săriturei in paraşută — de *maximum şase ori greutatea* lui, fără să aibă urmări grave (fracturi, rupturi musculare, emoragii interne, etc...).

Aşa dar eforturile găsite mai sus sunt uşor suportate de aviator, mai cu seamă dacă ţinem socoteală că traectoria lui, până la desch'derea paraşutei este influenţată de resistenţa aerului micşorând viteza de cădere (deci nu este chiar aceia socotită în vid) şi că deschiderea paraşutei nu este instantanee, amortizând astfel mult şocul.

Căpitan I. Linteş.

PROBLEMA 3722. *Dacă* m = aba *şi* n = bab *sunt numere de trei cifre de forma indicată, când se divide* $m^n - n^m$ *cu 9?*

I. C. Savin.

Observăm dela început că dacă înlăturăm soluţiunile banale $m = n$, avem $a \neq b$, şi putem presupune fără a restrânge generalitatea problemii $a > b$.

In al doilea rând observăm că restul unui număr oarecare faţă cu divizorul *9* este unul din numerele *0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8* şi că avem pentru puterile acestor resturi, faţă cu divizorul 9, următoarele congruenţe:

$$(\text{Mod. } 9)\begin{cases} 1^N \equiv 1; \\ 2^{6N} \equiv 1, 2^{6N+1} \equiv 2, 2^{6N+2} \equiv +4, 2^{6N+3} \equiv -1, 2^{6N+4} \equiv -2, 2^{6N+5} \equiv -4; \\ 3^1 \equiv 3, 3^N \equiv 0 \ (N > 1); \\ 4^{3N} \equiv +1, \ 4^{3N+1} \equiv +4, \ 4^{3N+2} \equiv -2; \\ 5^{6N} \equiv +1, 5^{6N+1} \equiv -4, 5^{6N+2} \equiv -2, 5^{6N+3} \equiv -1, 5^{6N+4} \equiv +4, 5^{6N+5} \equiv +2; \\ 6^1 \equiv 6, \ 6_N \equiv 0, \ (N > 1); \\ 7^{3N} \equiv +1, \ 7^{3N+1} \equiv -2, \ 7^{3N+2} \equiv +4; \\ 8^{2N} \equiv +1, \ 8^{2N+1} \equiv -1, \end{cases}$$

deci putem construi următoarea tablă a resturilor puterilor celor opt resturi semnificative:

Puteri

Resturi	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1
2	+2	+4	−1	−2	−4	+1	+2	+4	−1
3	+3	0	0	0	0	0	0	0	0
4	+4	−2	+1	+4	−2	+1	+4	−2	+1
5	−4	−2	−1	+4	+2	+1	−4	−2	−1
6	−3	0	0	0	0	0	0	0	0
7	−2	+4	+1	−2	+4	+1	−2	+4	+1
8	−1	+1	−1	+1	−1	+1	−1	+1	−1

(Mod. 9).

1°. Se observă în primul rând din această tablă că dacă m și n sunt multipli de 3, avem: $m^n \equiv 3^n \equiv 0$ (mod. 9) sau $m^n \equiv 6^n \equiv 0$ (mod. 9) sau $m^n \equiv 0^n \equiv 0$ (mod. 9). Asemenea $n^m \equiv 3^m \equiv 0$ sau $n^m \equiv 6^m \equiv 0$, sau $n^m \equiv 0^m \equiv 0$ (mod. 9).

Aşa dar, *aceste condiţiuni sunt suficiente pentru ca problema să admită soluţiuni.*

Dar observăm că $m \equiv 2a + b$, $n \equiv a + 2b$ (mod. 9), deci condiţiunile de mai sus devin:

$$(1) \qquad 2a + b \equiv 0 \text{ şi } a + 2b \equiv 0 \text{ (mod. 3)},$$

din care deducem imediat sistemul echivalent:

$$(2) \qquad a - b \equiv 0 \text{ şi } 3(a + b) \equiv 0 \text{ (mod. 3)}.$$

A doua congruenţă din (2) este satisfăcută oricare ar fi numerele întregi a şi b. Este suficient deci să rezolvăm congruenţa

$$(3) \qquad a - b \equiv 0 \text{ (mod. 3)},$$

pentru a aveà toate soluţiunile corespunzătoare ipotezei făcute asupra lui m şi n.

Congruenţa (3) admite următoarele sisteme de soluţiuni:

$$\begin{cases} b = 0 \\ a = 3, 6, 9 \end{cases} ; \quad \begin{cases} b = 1 \\ a = 4, 7 \end{cases} ; \quad \begin{cases} b = 2 \\ a = 5, 8 \end{cases} ; \quad \begin{cases} b = 3 \\ a = 6, 9 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} b = 4 \\ a = 7 \end{cases} ; \quad \begin{cases} b = 5 \\ a = 8 \end{cases} ; \quad \begin{cases} b = 6 \\ a = 9 \end{cases}$$

şi în consecinţă problema admite următoarele sisteme de soluţiuni:

$$(4) \quad \begin{cases} m = 303.606.909.414.717.525.828.636.939.747.858.969 \\ n = 030'060'090'141'171'252'282'363'393'474'585'696 \end{cases}$$

2°. Observând din nou tabla resturilor puterilor (resturilor semnificative) mai deducem că problema nu admite sisteme de soluţiuni în care numai unul din numerele m, n este multiplu de 3.

3°. Să presupunem acum că nici unul din numerele m şi n nu este multiplu de trei.

Dacă punem în acest caz $m = 9p + x$ şi $n = 9q + y$; x şi y sunt diferiţi de *zero* şi primi cu 3 şi avem:

$$(5) \quad \begin{cases} m^n \equiv x^n \equiv x^{9q} \cdot x^y \equiv \pm x^y \text{ (mod. 9)} \\ n^m \equiv y^m \equiv y^{9p} \cdot y^x \equiv \pm y^x \text{ (mod. 9)}, \end{cases}$$

căci din tabla resturilor vedem că

$$x^9 \equiv \pm 1 \quad , \quad y^9 \equiv \pm 1 \text{ (mod. 9)}.$$

Rezultă de aci, *că dacă* $m^n - n^m \equiv 0$ *(mod. 9), resturile* x *şi* y *satisfac uneia din congruenţele*:

$$(6) \qquad x^y - y^x \equiv 0 \text{ sau } x^y + y^x \equiv 0 \text{ (mod. 9)}.$$

Aceasta este condiţiunea necesară.

Observând tabla resturilor pe diagonalele marcate, deducem că x şi y sunt o pereche de resturi, care îndeplinesc condiţiunea necesară, dacă, într'o diagonală, *resturile corespunzătoare puterilor* x^y *şi* y^x (resturi echidistante de extremele diagonalei) *au suma sau diferenţa nulă.* Avem astfel perechile de resturi convenabile următoare:

$$(7)\quad \begin{cases} x = 1 & 2 & 4 & 5 & 7 & 8 & 1 & 8 & 2 & 4 & 5 & \text{şi} & 7 \\ y = 1 & 2 & 4 & 5 & 7 & 8 & 8 & 1 & 4 & 2 & 7 & & 5 \end{cases}.$$

Dar m şi n în cazul problemei noastre sunt numere de formă particulară; $m = aba$, $n = bab$, deci (8) $m \equiv 2a + b$, $n \equiv 2b + a$ (mod. 9), şi ca urmare (9) $2a + b \equiv x$, $a + 2b \equiv y$ (mod. 9).

Rezultă din congruenţele (9) că x şi y trebuie să mai satisfacă condiţiunii:

$$(10)\qquad x + y \equiv 0 \pmod 3,$$

deci perechile de resturi (7) care rămân valabile pentru problema noastră sunt numai următoarele:

$$(11)\quad \begin{cases} x = 1 & 8 & 2 & 4 & 5 & \text{şi} & 7 \\ y = 8 & 1 & 4 & 2 & 7 & & 5 \end{cases}.$$

Să rezolvăm acum sistemele de congruenţe corespunzătoare şi să verificăm dacă soluţiunile obţinute sunt soluţiuni ale problemei.

A) Fie sistemul $\begin{vmatrix} 2a + b \equiv 1 \\ a + 2b \equiv 8 \end{vmatrix}$ (mod. 9); deducem sistemul compatibil, mai general, $\begin{vmatrix} a + b \equiv 0 \\ a \equiv 1 \\ b \equiv 2 \end{vmatrix}$ (mod. 3), care admite ca sisteme de soluţiuni pe următoarele:

$\begin{vmatrix} a = 4 & 7 & 7 \\ b = 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$, dintre care satisfac sistemului considerat numai următoarele: $\begin{vmatrix} a = 4 & 7 \\ b = 2 & 5 \end{vmatrix}$.

Insă

$$\begin{cases} 424^{242} \equiv 1^{242} \equiv +1 \\ 242^{424} \equiv 8^{424} \equiv +1 \end{cases} \text{ și } \begin{cases} 757^{575} \equiv 1^{575} \equiv +1 \\ 575^{757} \equiv 8^{757} \equiv -1 \end{cases} \pmod 9$$

deci problema admite numai sistemul

$$m = 424 \quad , \quad n = 244.$$

Examinând în acelaș fel sistemele de congruențe:

$$\begin{array}{|cccccc} 2a+b \equiv 8 & ; & 2a+b \equiv 2 & ; & 2a+b \equiv 4 & ; & 2a+b \equiv 5 & ; & 2a+b \equiv 7 \\ a+2b \equiv 1 & ; & a+2b \equiv 4 & ; & a+2b \equiv 2 & ; & a+2b \equiv 7 & ; & a+2b \equiv 5 \end{array}$$

obținem următoarele sisteme de soluțiuni ale problemii:

$$\begin{array}{|ccccccccc} m = 929 & ; & 202 & ; & 868 & ; & 707 & ; & 646 \\ n = 292 & ; & 020 & ; & 686 & ; & 070 & ; & 464 \end{array}.$$

Aceste ultime șase sisteme de soluțiuni sunt adevăratele soluțiuni ale problemei, primele 12 găsite la (1°) putând fi considerate ca soluțiuni banale.

Au trimes soluțiuni incomplecte D-nii: Const. D. Ionescu-Țiu, Ioan G. Popa, Petru Almăjan, Petre I. Ghișoiu.

Observare. Problema poate fi generalizată pentru numere de mai multe cifre formate numai cu două cifre a și b.

Dacă aba și bab formează o soluțiune a problemei și dacă $P = N \cdot 10^{p+r} + N' \cdot 10^r + N''$ (în care p este numărul cifrelor lui N', iar r numărul cifrelor lui N'') este astfel ca $N + N' + N'' \equiv 0 \pmod 9$, numerele:

$$\begin{cases} P_1 = N \cdot 10^{p+r+3} + a \cdot 10^{p+r+2} + N' \cdot 10^{r+2} + b \cdot 10^{r+1} + N'' \cdot 10 + a \\ P_2 = N \cdot 10^{p+r+3} + b \cdot 10^{p+r+2} + N' \cdot 10^{r+2} + a \cdot 10^{r+1} + N'' \cdot 10 + b \end{cases}$$

sunt deasemeni soluțiuni ale congruenței $m^n - n^m \equiv 0 \pmod 9$.

In P_2 putem încă înlocui pe N, N', N'' prin M, M', M'' dacă $M + M' + M'' \equiv 0 \pmod 9$. Etc.

O. N. Ț.

*PROBLEMA 3858. *Să se determine coeficienții ecuației:*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

astfel încât rădăcinile ecuației să îndeplinească una din condițiunile:

1) *Să fie mai mari ca* $+1$;

2) *Să fie mai mici ca* -1;

3) *Să fie cuprinse în intervalul* $(-1, +1)$.

CĂPITAN I. LINTEȘ.

Această problemă este o aplicațiune ale unor interesante discuțiuni făcute în «*Algebra pentru Cl. V reală*» de D-nii MANICATIDE și ABRAMESCU. Servindu-mă de concluziunile deduse acolo, voiu rezolvi problema 3858.

1) *Ambele rădăcini mai mari ca o cantitate* α (pag. 225 din algebra citată). Avem condițiunile:

$$\frac{a \cdot \alpha^2 + b \cdot \alpha + c}{a} > 0 \quad \text{și} \quad -\frac{2a \cdot \alpha + b}{a} > 0$$

iar pentru $\alpha = +1$ găsim:

$$\frac{a + b + c}{a} > 0 \quad \text{și} \quad -\frac{2a + b}{a} > 0.$$

Ținând seamă, în ambele cazuri, de condiția de realitate: $b^2 \geqslant 4ac$.

Căutând și mai departe să determinăm coeficienții a, b și c în cazul problemei, găsim condițiunile:

I	$c > a > 0$	$2a < -b < a + c$	$b^2 \geqslant 4ac$
II	$c < a < 0$	$2a > -b > a + c$	

2) *Ambele rădăcini mai mici ca o cantitate* α (pag. 222).

$$\frac{a \cdot \alpha^2 + b\alpha + c}{a} > 0 \quad \text{și} \quad -\frac{2a \cdot \alpha + b}{a} < 0$$

iar pentru $\alpha = -1$:

$$\frac{a - b + c}{a} > 0 \quad \text{și} \quad \frac{2a - b}{a} < 0.$$

Deci găsim:

I	$c > a > 0$	$2a < b < a + c$	$b^2 \geqslant 4ac$
II	$c < a < 0$	$2a > b > a + c$	

3) *Ambele rădăcini cuprinse între două cantităţi* α *şi* β (pag. 227):

$$\frac{a.\alpha^2 + b.\alpha + c}{a\beta^2 + b\beta + c} > 0 \quad \text{şi} \quad \frac{2a\alpha\beta + b\alpha + b\beta + 2c}{a\beta^2 + b\beta + c} < 0.$$

Ori pentru $\alpha = -1$ şi $\beta = +1$ avem:

$$\frac{a - b + c}{a + b + c} > 0 \quad \text{şi} \quad \frac{-2a - b + b + 2c}{a + b + c} > 0.$$

Deci:

I	$a > c$	$a + c > b > 0$	$b^2 \geqslant 4ac$
II	$a < c$	$a + c < b < 0$	

Observaţiuni:

1) O interesantă soluţie grafică a dat D-l I. Murăroiu în „Revista Matematică" No. 7, X.

2) A rezolvat problema mărginindu-se numai la primele condiţiuni, D-l M. Velea.

3) A rezolvat parţial problema D-l C. N. Popescu.

4) D-nii: M. Chiţu, Gh. Oprescu, I. Bulancea şi I. Boian, au rezolvat problema servindu-se de relaţiunile dintre rădăcini şi coeficienţi, unde au impus succesiv condiţiunile:

$$x_1 > 1 \quad \text{şi} \quad x_2 > 1$$
$$x_1 < -1 \quad \text{şi} \quad x_2 < -1$$
$$x_1 < 1 \quad \text{şi} \quad x_2 > -1.$$

Au ajuns însă la condiţiuni mai puţin restrânse, ca acele date mai sus.

I. L.

*PROBLEMA 3865. *Se cer patratele*

aaabc.

N. N. RADOVENEANU.

1) *Soluţie* dată de D-nii: I. C. PARAPEANU (Braşov), P. I. GHIŞOIU (Bucureşti) şi E. MEREUŢĂ (Bucureşti).

Ţinând seamă de ultimele patru cifre cu care se termină un patrat perfect (vezi G. M. XXXV, pag. 134 — 135, nota D-lui TEODOR) se aleg acelea cu cifra sutelor şi miilor identice.

Se formează numerile de forma *aaabc* şi din ele se elimină pe acele divizibile cu *3* sau cu *27* fără să fie divizibile cu *9* sau *81*.

Se obţin astfel soluţiunile:

$$149^2 = 22201 \quad \text{şi} \quad 298^2 = 88804.$$

2) *Soluţie* dată de D-nii: BERAN MENDEL (Lc. Petru Rareş), C. GH. LUPESCU (Lc. Roman) şi H. P. IONESCU-BIS (Oltenita).

Presupunem pe *bc* cunoscut şi dăm lui *a* valorile *1, 2, 3 ... 9*, extrăgând rădăcina patrată a numărului. Astfel avem:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{111bc} & 10 \\ \hline 11bc & 20 \end{array}.$$

Pentru a continuà extragerea, ar trebui să găsim o cifră x astfel încât produsul:

$$20x \times x$$

să înceapă cu *11*, ori nu găsim.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{222bc} & 14 \\ \hline 122 & 24 \times 4 \quad 28 \\ \hline 26bc & 96 \end{array}.$$

Ar trebui o cifră x astfel încât produsul:

$$28x \times x$$

să înceapă cu *26*. Dar pentru $x = 9$ găsim că $289 \times 9 = 2601$, deci avem soluţia:

$$149^2 = 22201.$$

Procedând la fel şi pentru restul valorilor lui *a*, mai găsim şi soluţia :

$$298^2 = 88804.$$

Observaţiuni.

1) Au rezolvat problema 3865, utilizând nota matematică citată la prima soluţie, dar fără să elimine numerile divizibile numaĭ cu *3* sau numai cu *27*, D-nii : I. Bulancea, Al. Halperin, E. Haralamb şi D. Şerban-Ulmeni.

2) D-l Vl. Crivăţ şi M. D. Moţoc au rezolvat problema punând condiţia că :

$$aaa00\ N^2 \leqslant aaa96$$

unde *a* ia valori dela *1* la *9* şi găseşte o serie de intervale pentru N, din care deduce soluţiunile.

3) D-l N. Aldea a dat o soluţie algebrică.

4) Alte soluţiuni au dat D-nii : M. Velea şi A. Ghiţescu.

5) D-l P. Ghişoiu a găsit şi patratele de forma *aaabcd*.

I. L.

PROBLEMA 3869. *Fie patrulaterul* ABCD, *la care unghiurile opuse* A *şi* C *sunt drepte. Să se demonstreze că există relaţia*

$$AC = BD \sin B.$$

Iulian Alexiu.

Soluţie dată de D-nii : P. I. Ghişoiu şi N. O. Zaharia (Şc. Politechnică-Bucureşti), I. Cupşa-Cucerianul, M. Velea, Corn. Popescu, Cezar Coşniţă, N. Antonescu, A. Em. Bădescu, I. C. Boian, I. I. Borş, M. Bercu, C. Dan, I. Deac, V. Gh. Drăguţ, D. Gh. Georgescu, Eug. P. Haralamb, Al. Halpern, C. Heymanek. C. D. Ionescu-Ţiu, T. Jovmir, I. R. Mariniuc, Faţe Mărgărit, Em. Mereuţă, D. Gh. Militaru, Gh. Oprescu, Al. Pană-Deleanu, I. Parepeanu, A. I. Purdilă, Romeo Răşcanu, I. C. Şova, N. Stan-Argeşanul, Gh. Sâmbotin, Al. Ştefănescu-Goangă, V. Vasu, N. N. Velicescu şi Un anonim.

Patrulaterul ABCD este inscriptibil într'un cerc la care $BD = 2R$. Din triunghiul ABC, înscris în acel cerc, avem

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin ADB} = 2R = BD$$

sau

$$AC = BD \sin B \text{ , relaţia din enunţ;}$$

şi

$$AC = BD \sin D \text{ , deoarece unghiurile B şi D sunt}$$

suplimentare.

Observaţii.

1. D-l C. A. Zitti, stabileşte relaţia din enunţ plecând dela

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin K} = \frac{CD}{\sin K'} \text{ (unde } K + K' = A = 90^0).$$

Se ridică la pătrat, se face la ultimele două rapoarte suma numărătorilor pe suma numitorilor şi se extrage apoi rădăcina pătrată.

2. D-nii Negrea A. Mircea-Leonte, M. Ţiucra, Vl. I. Crivăţ, R. Răşcanu, C. N. Avram, Cr. I. Râmniceanu, au rezolvat problema aplicând teorema lui Ptolomeu, obţinându-se relaţia

$$AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC.$$

Inlocuind AB, AD, DC şi BC cu valorile lor din triunghiurile dreptunghice ABD şi BDC se ajunge la rezoluţia din enunţ.

3. Alte soluţii s'au primit dela D-nii: D. Şerban-Ulmeni, Haralamb P. Ionescu, Romeo N. Dumitraşcu, N. A. Dobrogeanu şi C. Gh. Lupescu, precum şi un alt anonim.

Col. Gh. I. Liteanu.

PROBLEMA 3903. *Dintre două triunghiuri care au acelaşi unghiu la vârf şi aceiaşi bază, la care diferenţa dintre celelalte două laturi este mai mare?*

I. Ionescu.

Soluţie dată de D-nul Iulian Alexiu (Student Bucureşti). Fie triunghiurile ABC şi A'BC care au aceiaşi bază BC şi unghiurile din A şi A' egale. Locul geometric al acestor vârfuri este un arc de cerc având pe BC ca coardă. Luăm dela A şi A' spre bază lungimile AM şi A'M', egale respectiv cu laturile AC şi A'C pe care le presupunem mai mici ca AB şi A'B. Cu modul acesta avem:

$$BM = AB - AC \quad \text{şi} \quad BM' = A'B - A'C.$$

E destul dar a compară distanţele BM, BM'.

Prin construcţie, triunghiul ACM este isoscel şi deci unghiul lui din M este complimentar cu $\frac{1}{2}A$. Tot aşa unghiul AMC e complimentar cu $\frac{1}{2}A$. Unghiurile AMC şi A'M'C sunt deci egale şi prin

urmare şi suplimentele lor BMC şi BM'C vor fi egale. Punctele M şi M' sunt dar pe un arc de cerc care trece prin B şi C. Diferenţele BM şi BM' sunt dar coarde ce pleacă din B, ale unui cerc. Cea mai mare va fi acea care subîntinde un arc mai mare.

Ipoteza pe care am făcut-o că $AB > AC$ ne indică că A e de partea lui C faţă de perpendiculara dusă pe mijlocul lui BC. La fel şi A'. Aceea dintre coardele MB sau M'B va fi cea mai mare care va fi mai aplecată spre BC. Insă A şi A' se găsesc pe un arc de cerc ce trece prin B şi C. Acela din aceste puncte e mai aproape de BC la care M sau M' corespunzător va fi mai aproape de C. De aci conchidem că diferenţa cea mai mare corespunde triunghiului la care vârful e mai aproape de baza dată, adică acela care va avea înălţimea mai mică, faţă de acea bază.

Soluţie dată de D-nii: P. I. Ghişoiu, M. Velea, I. C. Savin, A. Em. Bădescu, I. G. Zamfirescu, H. P. Ionescu, Faţe Mărgărit, N. N. Aldea, V. I. Ionescu.

Se cunoaşte din Trigonometrie formula:

$$b - c = a \sin\tfrac{1}{2}(B - C)/\cos\tfrac{1}{2}A.$$

Cum a şi A sunt constante, reese că mişcând vârful A, diferenţa creşte sau scade cu $\sin\frac{1}{2}(B - C)$. Cum $B < 180^0$ reese că $\frac{1}{2}(B - C)$ este sub 90^0 şi deci $\sin\frac{1}{2}(B - C)$ creşte dacă $(B - C)$ creşte. Cum $B + C = 180^0 - A$, se vede că cu cât creşte B cu atâta scade C. Dacă dar $B > C$, atunci diferenţa creşte cu B. Aşa dar diferenţa $(b - c)$ e mai mare la triunghiul la care unghiul cel mare, e mai mare. De aci se poate conchide ca mai sus că diferenţa cea mai mare o are triunghiul cu înălţimea cea mai mică.

Notă: Se poate arătă direct trigonometriceşte că $(b - c)$ variază invers cu h, dacă h este înălţimea ce corespunde lui a.

Se găseşte uşor că:

$$a = h\,\mathrm{cotg}C + h\,\mathrm{cotg}C = h\left(\frac{\cos B}{\sin B} + \frac{\cos C}{\sin C}\right) = h\frac{\sin(B + C)}{\sin B\,\sin C}$$

$$a = h\frac{\sin A}{\sin B\,\sin C}$$

$$h = \tfrac{1}{2}a\,[\cos(B - C) - \cos(B + C)]/\sin A$$

$$h = \tfrac{1}{2}\,[\cos(B - C) + \cos A]/\sin A.$$

Dacă $B > C$, se vede că h e cu atât mai mare cu cât $(B - C)$ e mai mic. Deci h şi $(b - c)$, în cazul problemei noastre, variază invers. Prin urmare, triunghiul la care h e mai mic, va avea $(b - c)$ mai mare.

După cum a observat şi D-l H. P. Ionescu, problema aceasta nu e decât problema 3834 rezolvată în anul XXXV pag. 344, cu deosebirea că triunghiurile acolo sunt puse de o parte şi de alta a bazei lor comune. Intervertirea a avut de scop de a pune pe corespondenţi de a da alte soluţii elementare la acea problemă.

S'au mai primit soluţiuni, care însă păcătuiau prin lipsă de rigurositate a raţionamentelor.

I. I.

PROBLEMA 3931. *Dacă la un patrat de cinci cifre înlocuim cifra mijlocie cu o virgulă, găsim patratul unei fracţii zecimale. Care sunt acele patrate?*

I. Ionescu.

Fie m şi n grupe de câte două cifre, c o cifră. Fie A^2 patratul căutat. Chestiunea revine la a satisface relaţiile:

$$1000m + 100c + n = A^2 \quad , \quad 100m + n = B^2,$$

ştiind că $10000 \leqslant A^2 < 100000$ şi $1000 < B^2 < 10000$, adică $100 \leqslant A \leqslant 316$ şi $32 \leqslant B < 100$.

Grupa n terminând patrate, nu poate fi decât 00, 01, 04, 09, 16, 21, 24, 25, 29, 36, 41, 44, 49, 56, 61, 64, 69, 76, 81, 84, 89, 96. Să examinăm pe rând ce dau aceste grupe.

Dacă $n = 00$, egalităţile de mai sus arată că m şi $(10m + c)$ trebuie să fie patrate. Deci A nu poate fi decât de formele $16c00$, $25c00$, $36c00$, $49c00$, $64c00$, $81c00$. Incercând să scoatem rădăcini patrate exacte la aceste numere se găseşte uşor numai soluţiile: $16900 = 130^2$ care dă $16,00 = 4,0^2$; $25600 = 160^2$ care dă $25,00 = 5,0^2$ şi $36100 = 190^2$ care dă $36,00 = 6,0^2$. Aceste soluţiuni sunt *formale*, deoarece introducerea virgulei nu dă zecimale, ci numere întregi.

Dacă $n = 25$, numărul B se va termină cu 5 şi putem pune $B = 10z + 5$. Avem dar:

$$100m + 25 = (10z + 5)^2 = 100z^2 + 100z + 25,$$

$$\therefore \qquad m = z^2 + z.$$

Cum $m \geqslant 10$ putem luà $z \geqslant 3$. Găsim astfel că A^2 poate fi de formele $20c25$, $30c25$, $42c25$, $56c25$, $72c25$, $90c25$. Incercând a extrage rădăcinile din acestea, găsim soluţiile: $30625 = 175^2$ care dă $30,25 = 5,5^2$ şi $42025 = 205^2$ care dă $42,25 = 6,5^2$.

Pentru celelalte grupe se ştie, — şi de altfel se poate stabili uşor, — că A^2 şi B^2 au aceleaşi două cifre la urmă dacă $A = 50k \pm B$.

Fie acum o grupă oarecare n din cele date mai înainte, de exemplu $n = 16$. Cel mai mic B care dă B^2 terminat cu 16 este 4. Deci la fel cu 4^2 se vor termină şi numerele mai mici ca 100, următoare: $50 - 4 = 46$, $50 + 4 = 54$ şi $100 - 4 = 96$. Ridicând pe cele de două cifre la patrat, primele două cifre dela stânga vor da pe m. Aşa $46^2 = 2116$. Reese de aci că $A^2 = 21c16$. Incercăm astfel a scoate rădăcina patrată:

$$\sqrt{2\,1\,c\,1\,6} = 1\,4$$
$$1$$
$$1\,1\,c : 2\,4$$
$$9\,6 \quad\; 4$$
$$\ldots 1\,6 : 2\,8$$

A^2 terminându-se cu 6, A se termină cu 4 sau 6. De aci următoarele două cazuri:

$$\sqrt{2\,1\,c\,1\,6} = 1\,4\,4 \qquad \sqrt{2\,1\,c\,1\,6} = 1\,4\,6$$
$$1 \qquad\qquad\qquad\qquad 1$$
$$1\,1\,c : 2\,4 \qquad\qquad 1\,1\,c : 2\,4$$
$$9\,6 \quad\; 4 \qquad\qquad 9\,6 \quad\; 4$$
$$\ldots 1\,6 : 2\,8\,4 \qquad\qquad \ldots 1\,6 : 2\,8\,6$$
$$1\,1\,3\,6 \quad\; 4 \qquad\qquad 1\,7\,1\,6 \quad\; 6$$
$$8\,0 \qquad\qquad\qquad\qquad 0\,0$$

Se vede că la prima extragere restul nu poate fi nul. La a doua sutele restului sunt nule, dacă $(1c - 6)$ ese 7, adică dacă $c = 3$. Prin urmare avem soluţia $21316 = 146^2$ care dă $21,16 = 4,6^2$. Se găseşte la fel că $54 = B$ nu dă soluţie şi că $96 = B$ ne dă soluţia $92416 = 304^2$ care dă $92,16 = 9,6^2$.

Se procedează la fel şi cu celelalte grupe n. Se găseşte că grupele 01, 09, 21, 24, 29, 36, 41, 44, 49, 64, 69, 76, 89 nu dau soluţii. Grupa 04 dă soluţia $23104 = 152^2$ care dă $23,04 = 4,8^2$, grupa 56 dă $70756 = 266^2$ care dă $7066 = 8,4^2$; grupa 61 dă $47961 = 219^2$ care dă $47,61 = 6,9^2$, iar grupa 84 dă $51984 = 228^2$ care dă $51,84 = 7,2^2$.

Problema admite prin urmare 12 soluţiuni, dintre care trei sunt formale.

I. I.

D-l Ion G. Popa a dat 8 soluţiuni, D-l Faţe Mărgărit a dat 8 soluţiuni, D-l N. N. Mihăileanu a dat 11 soluţiuni.

PROBLEMA 3941. *Se cer două numere a căror sumă de patrate este 18720 şi cel mai mare comun divizor 12.*

I. Ionescu.

Soluţie dată de D-nii: E. Mereuţă (Student, Bucureşti), P. I. Ghişoiu (Sc. Politecnică, Bucureşti), N. N. Mihăileanu (Liceul Constanţa), M. D. Motoc (Liceul Oltenita), N. N. Velicescu, A. H. Halperin, Gh. Oprescu, Mărgărit Faţe (Călăraşi), St.-Lt. F. Radu, St. I. Gh. Zamfirescu, T. Gh. Velicescu, V. I. Crivăţ, H. P. Ionescu, C. I. Şerban, R. Patraulea, N. N. Aldea, I. G. Naforniţă, V. I. Ionescu.

Dacă împărţim cele două numere cerute cu 12 câturile vor fi prime între ele, iar suma patratelor acestora va fi 18720: $12^2 = 130$. Patratele pânăla 130 sunt 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 şi 121. Trebuie să alegem două care adunate să ne dea 130 şi care să fie prime între ele. Această condiţie exclude patratele terminate cu cifre perechi sau cu 5. Rămân numai de cercetat patratele 1, 9, 49, 81, 121. Se vede imediat că 1 nu convine şi că avem $9 + 121 = 130$ şi $49 + 81 = 130$. De aci soluţiile $3 \times 12 = 36$ cu $111 \times 12 = 132$ şi $7 \times 12 = 84$ cu $9 \times 12 = 108$. Avem în adevăr:

$$36^2 + 132^2 = 18720 \quad \text{şi} \quad 84^2 + 108^2 = 18720.$$

*EXERCIŢII

20. Se cere pătratul perfect de patru cifre, la care produsul ultimelor trei cifre este un pătrat de două cifre a cărui rădăcină este un cub de o singură cifră şi ştiind că ultimile trei cifre ale pătratului sunt identice.

Ilie Foca.

R. Pătratul de două cifre având ca rădăcină un cub de o cifră este $64 = 8^2 = (2^3)^2$.

21. Dacă n este un intreg impar, există relaţiunea:

$$170031464^{4115n} + 539353144^{192p} - 17373979^{64p} + 9782^{1662\frac{m}{p}} = M\,555.$$

H. P. Ionescu-Biss.

R. Se observă că:

$$170031464^{4115n} = M\,555 - 1.$$

$$539353144^{192p} - 17373979^{64p} = (M\,555 + 259)^{192p} - 259^{192p} = M\,555.$$

Pe de altă parte, conform notei 33 din G. M. XXX, 210, avem:

$$9782^{1662\frac{m}{p}} = 9782^{554\frac{3m}{p}} = M\,555 + 1.$$

Din cele precedente rezultă imediat relaţiunea din enunţ.

22. Care sunt pătratele perfecte $abcd$ la care bc este tot un pătrat?

P. N. VASILESCU.

R. Ţinând seamă că bc este pătrat, precum şi de ultimele două cifre ale unui pătrat, formăm numerile:

$a016$; $a049$; $a044$; $a041$; $a096$; $a164$; $a169$; $a161$;

$a256$; $a364$; $a369$; $a361$; $a496$; $a649$; $a644$; $a641$; $a816$

De aci se deduc uşor următoarele soluţii:

5041 ; 4096 ; 3364 ; 1369 şi 8649.

23. Se cer cinci numere de câte două cifre, ale căror sumă este 100, ştiind că unul din ele este 14 şi celelalte patru formează o progresie aritmetică.

GH. APOSTOLESCU.

R. Conform enunţului avem:

$$14 + a + (a + r) + (a + 2r) + (a + 3r) = 100.$$

$$(1) \qquad \therefore \qquad 4a + 6r = 86 \text{ sau } a = \frac{43 - 3r}{2}.$$

Cum a este întreg şi de două cifre, deducem că $r \leqslant 7$ şi impar. Deci $r = 1, 3, 5, 7$, valori care introduse în (1) dau următoarele grupuri de soluţiuni: (14, 20, 21, 22, 23), (14, 17, 20, 23, 26), (14 + 14 + 19 + 24 + 29) şi (14, 11, 18, 25, 32).

24. Să se calculeze suma:

$$S = \sum_{1}^{n} \frac{(n \,.\, n! - 1)\ 1!\ 2!\ 3! \ldots n!}{(1 + 1!)\ (1 + 2!)\ (1 + 3!) \ldots (1 + n!)}.$$

HULUBEI TELEMAC.

R. Dacă considerăm seria cu termenul general

$$Vn = \frac{1!\ 2!\ 3! \ldots n!}{(1 + 1!)\ (1 + 2!)\ (1 + 3!) \ldots (1 + n!)}.$$

atunci suma din enunţ se poate scrie:

$$S = (2 \,.\, 2! - 1)\ V_2 + (3 \,.\, 3! - 1)\ V_3 + \ldots (n \,.\, n! - 1)\ Vn.$$

Se observă însă că:

$$\frac{V_{n+1}}{Vn} = \frac{(n + 1)!}{1 + (n + 1)!},$$

sau

$$(n + 1)!\ Vn = [1 + (n + 1)!]\ V_{n+1}.$$

Dând lui n din relaţia precedentă valorile 1, 2, 3 ... n şi adunând membru cu membru cele n egalităţi, se obţine prin gruparea convenabilă a termenilor următorul rezultat:

$$S = [1 + (n+1)!]\ V_{n+1} - 2!V_1 = (n+1)!Vn - 2!V_1 = \frac{1!\ 2!\ 3!\ \ldots (n + 1)!}{(1 + 1!)(1 + 2!) \ldots (1 + n!)} - 1.$$

BIBLIOTECA CENTRALĂ a „ASOCIAŢIUNII" SIBIIU

PROBLEME PROPUSE

3961. Să se găsească numărul de patru cifre *abcd* astfel ca numerile de câte două cifre *ab* şi *cd* să fie prime consecutive şi ştiind că el este triplul unui număr prim la care suma cifrelor este egală cu 11.

M. Nicolau.

*3962. Se dă fracţia 12/25. Să se mai scrie o cifră după 12 şi una după 25, aşa ca noua fracţiune cu trei cifre la numărător şi trei cifre la numitor să se transforme exact în zecimală.

I. Ionescu.

*3963. Se cere numărul:

$$N = 7^{n+2} \cdot 11^{n+1} \cdot 13^n,$$

cu condiţia ca N^3 să aibă 280 divizori.

V. I. Crivăţ.

*3964. Fie ABC şi A'B'C' două triunghiuri echilatere de acelaş centru, cu vârfurile notate în acelaş sens de rotaţie. Să se arate că triunghiurile sunt de trei ori omologice şi anume în ordinele

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & C' & B' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} A & B & C \\ C' & B' & A' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} A & B & C \\ B' & A' & C' \end{pmatrix}.$$

D. Barbilian.

*3965. In piramida triunghiulară OABC, muchiile OA, OB, OC sunt perpendiculare două câte două. Presupunând că se dau lungimile $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, să se găsească aria triunghiului ABC, precum şi depărtarea dela vârful O la faţa ABC.

G. Ţiţeica.

*3966. Intre mărimile a, b, c şi x, y, z există relaţiile:

$$b^2 + c^2 = x^2 \quad ; \quad c^2 + a^2 = y^2 \quad ; \quad a^2 + b^2 = z^2.$$

Să se demonstreze identitatea:

$$\Sigma a^2 b^2 \equiv (x + y + z)(x + y - z)(x - y + z)(-x + y + z).$$

Să se deà o interpretare geometrică acestei identităţi şi să se deducă de aci o nouă demonstraţie a ei.

Alexandru Niculescu.

3967. Două trenuri pleacă odată unul spre altul din două oraşe A şi B, depărtate 1000 km unul de altul. După 6 ore de mers distanţa între trenuri este $\frac{2}{5}$ din distanţa parcursă de ele până în acel moment.

Să se afle iuţelile celor două trenuri, ştiind că dacă primul tren ar fi avut iuţeala celuilalt şi vice-versa, punctul lor de întâlnire ar fi fost cu 100 km. mai aproape de oraşul A decât în primul caz.

M. Ghermănescu.

3968. Să se arate că în orice triunghiu avem relaţia

$$AB(\sin^2 A - \sin^2 B) = \sin^2 C(BC\cos B - AC\cos A).$$

Iuliu Deac.

3969. Dintr'un punct M luat pe latura BC a unui triunghiu ABC se duc perpendicularele MP şi MQ pe AC şi AB.

1°. Să se exprime aria triunghiului MPQ în funcţie de $MP = x$.

2°. Să se exprime aria triunghiului MPQ în funcţie de raportul $\frac{MP}{MQ} = t$.

3°. Să se demonstreze că există pe BC două puncte M pentru care aria triunghiului MPQ are o valoare dată. Să se arate că aceste puncte sunt simetrice faţă de mijlocul lui BC.

4°. Să se determine punctul M pentru care aria triunghiului MPQ este maximum.

D. V. Ionescu.

3970. Dacă $\alpha + i\beta$ $(\beta \neq 0)$ este o rădăcină de modul 1 a ecuaţiei:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

atunci $2(\alpha + 1)$ este rădăcină a ecuaţiei:

$$x^3 + (a - 5)x^2 + (b - 3a + 6)x + a - b + c - 1 = 0.$$

N. Ciorănescu.

Articolele, notele şi problemele însemnate cu * se referă la matematicile elementare (cursul de liceu).

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Aldea N. N. (3901, 25, 26, 47, 57); *Antoniu Eleonora* (3928, 46, 47, 57); *Avram N. Const.* (3926); *Butan M. A.* (3942, 45, 47); *Chiţu P. M.* (3927); *Craiu N. I.* (3668, 928); *Crivăţ I. Vl.* (3696, 739, 58, 98, 842, 77, 78, 79, 95, 925, 27, 28, 47, 57, C); *Deac Iuliu* (3919, 47, E, P, R); *Dobrogeanu A. N.* (3869); *Epuran Ioan* (3895, 936); *Florescu B. Ioan* (2658, P, R); *Gheorghiu C. Ad.* (3839, 79, N); *Ghişoiu I. P.* (3897, 927); *Grecu M. C.* (3877); *Ionescu-Biss P. H.* (3881, 927, 28, 32, 47, 57); *Ionescu I. Victor* (3901, 52, 57); *Lenco I.* (3947); *Mătieş* (A, P); *Mihăileanu N. N.* (2656, 3881, 932, R); *Mihăilescu N. N.* (2440, 643); *Moţoc M.* (3901, 32); *Negrea A. Mircea Leonte* (3957, 60); *Nicolau Dobridor I.* (P); *Patraulea N. Radu* (3936, 47); *Popescu C. V.* (N); *Radu Fl. Sublt.* (3947); *Şerban I. Const.* (3895, 936); *Stavrat G. M.* (P); *Vasiliu C. Ioan* (2110, 234, 74, 81, 359, 83, 86, 408, 671, 3335, 574, N, P); *Velicescu N.* (3927); *Velicescu Gh. Titu* (3879, 89, 92, 95, 901, 25, 26, 28, 47, P); *Zamfirescu Gh. I. Sublt.* (3509, 942, 45, 46, 58, P).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac deasemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani completi broșați cu prețul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX și XXI care se vând cu prețul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV și XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecțiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția IV revăzută și adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu și G. Țițeica,** *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu și Șt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediția II revăzută și adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicațiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediția III-a revăzută și îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Țițeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* (Ediția II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Regiei Publice Comerciale «Monitorul Oficial și Imprimeriile Statului», B-dul Elisabeta 29, București I.

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, București 4.

M2527

Biblioteca „ASTRA"
SIBIU

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

0 - MAR 2014

ANUL XXXVI.

NUMĂRUL 5. — IANUARIE 1931.

SUMARUL

1. Câteva clase de polinoame cu toate rădăcinile reale ; polinoamele lui Hermite . *Alexandru Niculescu.*
2. Câteva inegalităţi în legătură cu indicatori numerici . . . . . *Ioan B. Florescu.*
3. Note matematice : 18 — 19.
4. Chestiuni de examen.
5. Bibliografie.
6. Cereri : 200.
7. Diverse.
8. Probleme rezolvate : 1949, 3698, 3813, 3842, 3850, 3862, 3881, 3890, 3947.
9. Exerciţii : 25 — 27.
10. Probleme propuse : 3971 — 3980.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

REGIA M. O., IMPRIMERIA NAŢIONALĂ

1931

74305

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXXVI se compune din D-nii: Colonel **Gh. I. Liteanu** dela Marele Stat Major al Armatei; **G. A. Nichifor**, Doctor în Matematici, Conferenţiar la Universitatea din Bucureşti; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Regiei Publice Comerciale «Monitorul Oficial şi Imprimeriile Statului», Cassier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui GH. ILIESCU, Inginer, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 62, 78, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 310, 33, 55, 64, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 82, 553, 87, 650, 79, 711, 29, 53, 64, 807, 76, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 233, 338, 53, 82, 405, 22, 30, 39, 56, 66, 77, 502, 03, 45, 56, 77, 80, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 65, 84, 92, 95, 709, 13, 17, 35, 58, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 56, 3005, 45, 69, 81, 127, 50, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 07, 08, 09, 10, 16, 18, 20, 50, 61, 79, 405, 24, 25, 72, 89, 91, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 20, 22, 27, 32, 47, 57, 65, 79, 81, 94, 99, 700, 03, 20, 33, 36, 80, 84, 93, 99, 804, 08, 10, 29, 35, 36, 44, 45, 48, 53, 64, 70, 80, 96, 98, 908, 09, 13, 15, 16, 20, 21, 24, 33, 34, 37, 40, 44, 49, 50, 51, 54, 59, 64, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I—XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

CÂTEVA CLASE DE POLINOAME CU TOATE RĂDĂCINILE REALE; POLINOAMELE LUI HERMITE

Am arătat în articolele precedente [1]) că polinoamele:

$$(1) \qquad P_n(x) \int_a^b \varphi(u)[(m-x)^n + (-1)^n (in+x)^n]\,du$$

se introduc, în mod natural, ca o generalizare a polinoamelor HERMITE. Mă voiu ocupà acum de câteva generalităţi, în legătură cu polinoamele (1).

Imi propun să caut funcţia generatoare a acestor polinoame, cât şi a acelora de rang k.

Funcţia generatoare — în sens APPEL — va fi:

$$\Sigma \frac{\alpha^n}{n!} P_n(x) = \int_a^b \varphi(u) \Sigma \frac{\alpha^n (m-x)^n}{n!}\,du$$

$$+ \int_a^b \varphi(u) . \Sigma \frac{[-\alpha(m+x)]^n}{n!}\,du$$

$$= \int_a^b \varphi(u)\, e^{\alpha(m-x)}\,du + \int_a^b \varphi(u)\, e^{-\alpha(m+x)} . du$$

$$= e^{-\alpha x} . \int_a^b \varphi(u)[e^{\alpha m} + e^{-\alpha i m}]\,du$$

$$= 2e^{-\alpha x} . \int_a^b \varphi(u) . \cos\alpha u . du.$$

Dacă însemn deci cu:

$$\psi(\alpha) = 2 \int_a^b \varphi(u) . \cos\alpha u . du$$

atunci am:

$$\Sigma \frac{\alpha^n}{n!} P_n(x) = e^{-\alpha x} . \psi(\alpha).$$

1) A se vedeà: *Gazeta Matematică* No. 4 anul 1928.

Rezultă de acì:

$$P_n(x) = \left| \frac{d^n}{d\alpha^n} . e^{-\alpha x} . \psi(\alpha) \right|_{\alpha=0}$$

sau desvoltat:

$$P_n(x) = \psi(0) . x^n + \frac{n(n-1)}{2!} \psi''(0) . x^{n-2} + \ldots$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-2k+1)}{2k!} \psi(0)^{(n-2k)} . x^{n-2k}.$$

De exemplu, dacă $\varphi(u) = \frac{1}{2}$; iar intervalul [0, 1] atunci

$$\psi(\alpha) = \int_0^1 \cos\alpha u \, du = \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$ şi prin urmare polinomul:

$$P_n(x) = x^n - \frac{n(n-1)}{2!\,3!} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!\,5!} x^{n-4} - \ldots$$

are toate rădăcinele reale.

La fel, vom obţine:

$$\Sigma \frac{\alpha^n}{n!} . P_n^1(x) = e^{\alpha x} . [\psi(\alpha)]^2$$

şi'n general:

$$\Sigma \frac{\alpha^n}{n!} . P_n^k(x) = e^{(-1)^{k+1} . \alpha x} . [\psi(\alpha)]^{k+1}.$$

Avem aşa dar următoarea teoremă generală:

Polinoamele generate de funcţia:

$$e^{(-1)^{k+1} . \alpha x} . [\psi(\alpha)]^{k+1}$$

unde k e un întreg positiv, iar $\psi(\alpha) = 2 . \int_a^b \varphi(u) . \cos\alpha u . du,$

determină o infinitate numărabilă de clase de polinoame cu toate rădăcinele reale.

* * *

Problema care se pune acum este identificarea claselor de polinoame clasice cu polinoamele (1). Lucrul acesta se poate face pe două căi:

1) Fie plecând dela expresia desvoltată a polinoamelor.

2) Fie utilizând funcţiile lor generatoare.

In primul caz problema se reduce la determinarea unei funcţii, când se cunosc momentele acelei funcţii [1]), problemă de care s'a ocupat H. LAURENT [Journal des Math. spéciales 1878] şi H. LEBESGUE. [Annales de Toulouse].

In al doilea, problema se reduce la ecuaţii integrale.

In sfârşit e interesant de văzut ce devine aceste polinoame pentru $n \to +\infty$, cât şi pentru $n < 0$. In primul caz e uşor de văzut că polinoamele devin serii întregi alternate; deci e necesar şi suficient ca:

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b \varphi(u)\, u^n\, du \to 0,$$

deci $\varphi(u)$ are gradul de infinitudine al funcţii e^{-u} (cea mai simplă). Probabil că atunci aceste serii se pot identifică cu câteva din funcţiunile trigonometrice.

Asupra problemelor acestea şi a particularizărilor în legătură cu polinoamele $P_n(x)$ voiu revenì, cu altă ocazie, încheind acì generalităţile asupra lor.

ALEXANDRU NICULESCU
Profesor.

*CÂTEVA INEGALITĂŢI ÎN LEGĂTURĂ CU INDICATORI NUMERICI

I) Fie

$$N = a_1^{n_1}\, a_2^{n_2} \ldots a_r^{n_r}\, N_1$$

şi

$$M = a_1^{m_1}\, a_2^{m_2} \ldots a_r^{m_r}\, M_1.$$

M_1 şi N_1 fiind primi atât între ei cât şi cu fiecare din numerile prime $a_1, a_2, \ldots a_r$.

1) STIELTJES numeşte momente ale unei funcţii, expresiile:

$$\int_a^b \varphi(u) \cdot u^i\, du \qquad i = 1, 2, \ldots$$

Avem:

$$\varphi(N) = a_1^{n_1-1}\ a_2^{n_2-1}\ \ldots\ a_r^{n_r-1}(a_1-1)\ldots(a_r-1)\varphi(N_1)$$

$$\varphi(M) = a_1^{m_1-1}\ a_2^{m_2-1}\ \ldots\ a_r^{m_r-1}(a_1-1)\ldots(a_r-1)\varphi(M_1)$$

$$M.N = a_1^{n_1+m_1}\ a_2^{n_2+m_2}\ \ldots\ a_r^{n_r+m_r}\ N_1.M_1$$

$$\varphi(M.N) = a_1^{n_1+m_1-1}a_2^{n_2+m_2-1}\ldots a_r^{n_r+m_r-1}(a_1-1)\ldots(a_r-1)\varphi(N_1)\varphi(M_1)$$

$$M\varphi(N) = a_1^{n_1+m_1-1}a_2^{n_2+m_2-1}\ldots a_r^{n_r+m_r-1}(a_1-1)\ldots(a_r-1)M_1\varphi(N_1)$$

$$\varphi(M)\varphi(N) = a_1^{n_1+m_1-2}a_2^{n_2+m_2-2}\ldots a_r^{n_r+m_r-2}(a_1-1)^2\ldots(a_r-1)^2\varphi(M_1)\varphi(N_1).$$

De unde se deduce:

$$(1) \qquad \varphi(M.N) = M.\varphi(N).\frac{\varphi(M_1)}{M_1}$$

şi

$$(2) \qquad \varphi(M.N) = \varphi(M)\varphi(N)\ \frac{a_1}{a_1-1}\ \ \frac{a_2}{a_2-1}\ \ldots\ \frac{a_r}{a_r-1}\ .$$

Egalitatea (1) arată că avem întotdeauna

$$(3) \qquad \varphi(M.N) \leqslant M\varphi(N)$$

inegalitatea dispărând numai în cazul când $\varphi(M_1) = M_1$, adică numai când M nu conţine alţi factori primi decât cei conţinuţi de N.

Din (2) se deduce

$$(4) \qquad \varphi(M.N) \geqslant \varphi(M)\varphi(N)$$

egalitatea corespunzând cazului când nu există nici un factor de forma $\frac{a_1}{a_1-1}$, ceeace reclamă ca M şi N să fie primi între ei.

Combinând între ele relaţiile (3) şi (4) se poate enunţă următoarea propoziţiune:

M *şi* N *fiind două numere întregi şi pozitive, avem în totdeauna:*

$$\varphi(M)\varphi(N) \leqslant \varphi(M.N) \leqslant M\varphi(N)$$

egalităţile având loc: prima când M *şi* N *sunt prime între ele şi a doua când* M *nu conţine alţi factori primi în afară de cei conţinuţi de* N.

I. Din cea de a doua inegalitate a propoziţiunii de mai sus se deduce, dacă însemnăm $A = M.N$:

$$\varphi(A) = \varphi(M.N) \leqslant M\varphi(N)$$

$$\therefore \quad \frac{\varphi(A)}{A} \leqslant \frac{\varphi(N)}{N}$$

Deci:

Raportul dintre indicatorul numeric al divizorului unui număr şi divizor este mai mare sau cel mult egal cu raportul dintre indicatorul numeric al numărului însuşi către acel număr.

Această propoziţiune, care s'ar fi putut deduce şi direct destul de uşor, conduce la unele aplicaţiuni interesante, ceeace se va vedeà mai jos.

II. Indicatorii de diferite ordine ai unui număr sunt divizibili cu 2, în afară de cel de ordinul cel mai superior pentru care $\varphi_n(A) = 1$.

Ţinând seamă de acest fapt şi de cele zise mai sus avem:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\varphi_2(A)}{\varphi_1(A)} \leqslant \frac{1}{2} \\ &\frac{\varphi_3(A)}{\varphi_2(A)} \leqslant \frac{1}{2} \\ &\qquad\vdots \\ &\frac{\varphi_r(A)}{\varphi_{r-1}(A)} \leqslant \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \quad \text{Sau:} \quad \therefore \quad \frac{\varphi_r(A)}{\varphi_1(A)} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{r-1} \qquad (5)$$

$$\varphi_r(A) \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{r-1} \varphi_1(A)$$

Deci

$$\varphi_1(A) + \varphi_2(A) + \ldots + \varphi_n(A) \leqslant \varphi_1(A) + \tfrac{1}{2}\varphi_1(A) + \ldots + (\tfrac{1}{2})^{n-1}\varphi_1(A)$$

sau

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(A) \leqslant \varphi_1(A) \sum_{i=0}^{(n-1)} (\tfrac{1}{2})^i < \varphi_1(A) \sum_{i=0} (\tfrac{1}{2})^i = 2\varphi_1(A) .$$

In concluzie.

Suma indicatorilor numerici de diferite ordine ai unui număr oarecare este mai mică decât dublul indicatorului numeric de ordinul întâiu al acelui număr[1]).

1) Intr'unul din volumele vechi ale Gazetei se presupuneà că maximul acestei sume ar fi indoitul numărului însuşi.

III. Din (5) se deduce:

$$\varphi_n(A) \leqslant (\tfrac{1}{2})^{n-1}\varphi_1(A)$$

şi cum:

$$\varphi_n(A) = 1,$$

rezultă:

(6) $$\varphi_1(A) \geqslant 2^{n-1}.$$

Fie m cea mai mare putere a lui 2 astfel încât:

(7) $$\varphi_1(A) \geqslant 2^m.$$

Comparând (6) cu (7) se deduce

$$2^m \geqslant 2^{n-1}$$

sau

$$m \geqslant n - 1$$

$$\therefore \quad n \leqslant m + 1.$$

Deci:

Numărul maxim al indicatorilor unui număr este cel mult egal cu $(m + 1)$, m *fiind cea mai mare putere a lui* 2 *care verifică relaţia:*

$$\varphi_1(A) \geqslant 2^m.$$

IV. Fie

$$A = N^m.$$

Se poate uşor vedeà că atât A cât şi $\varphi_1(A)$, $\varphi_2(A)$, $\varphi_3(A)\ldots$ $\varphi_{m-1}(A)$ au ca divizor pe N, deci:

$$\frac{\varphi_1(A)}{A} \leqslant \frac{\varphi(N)}{N} \; ; \; \frac{\varphi_2(A)}{\varphi_1(A)} \leqslant \frac{\varphi(N)}{N} ; \ldots ; \frac{\varphi_m(A)}{\varphi_{m-1}(A)} \leqslant \frac{\varphi(N)}{N}$$

$$\therefore \quad \frac{\varphi_m(A)}{A} \leqslant \left[\frac{\varphi(N)}{N}\right]^m$$

sau:

$$\varphi_m(N^m) \leqslant [\varphi(N)]^m$$

şi în mod analog se pot deduce o mulţime de alte relaţiuni şi propietăţi.

Ioan B. Florescu.

NOTE MATEMATICE

*18. *Asupra problemei No. 3537.*

D-l I. B. Florescu comunică într'o notă că soluţia problemei 3537 nu este complectă, deoarece nu s'a studiat decât în cazul $\alpha < n$. D-sa studiază apoi cazul când $\alpha = n$ şi $\alpha > n$.

In realitate însă, soluţia problemei este numai pentru cazul când $\alpha > n$.

Pentru cazurile $\alpha \leqslant n$ avem:

$$\varphi_1(N) = (2^n + 1)^{2\alpha-1} \cdot 2^n$$

$$\varphi_2(N) = (2^n + 1)^{2\alpha-2} \cdot 2^{2n-1}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\varphi_{2\alpha}(N) = 2^{2\alpha n-2\alpha+1}$$

$$\varphi_{2\alpha+1}(N) = 2^{2\alpha n-2\alpha}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\varphi_{2n}(N) = 2^{2\alpha n-2n+1}$$

$$\varphi_{2n+1}(N) = 2^{2\alpha n-2n}.$$

Şi atunci va trebui să avem:

$$2^{2\alpha n-2n+1} > (2^n + 1)^\alpha > 2^{2\alpha n-2n}.$$

De unde se deduce uşor că trebuie să avem numai

$$\alpha = 2 \quad \text{pentru} \quad n \geqslant 2.$$

Acum pentru $\alpha < n$ avem soluţia generală:

$$\varphi_{2n}(a^4) > a^2 > \varphi_{2n+1}(a^4)$$

unde a este un număr prim de forma arătată în enunţul problemei.

Pentru $\alpha = n$ se deduce uşor că $n \leqslant 2$, dându-ne astfel şi soluţia :

$$\varphi_4 (5^4) > 5^2 > \varphi_5 (5^4)$$

pentru $n = 2$.

In cazul general se deduc lesne condiţiunile pentru diversele cazuri, ajungându-se în cazul când $a = 2^t + 1$ la aceleaşi condiţiuni ca în soluţia problemei 3537.

I. L.

19. *Asupra podarei vârfurilor elipsei.* Voi demonstră că: *Podarele a două vârfuri opuse ale elipsei se întâlnesc pe axa care conţine celelalte două vârfuri.*

Fie elipsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Ecuaţia parametrică într'un punct M $(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$ este

$$\frac{x\cos\varphi}{a} + \frac{y\sin\varphi}{b} = 1. \tag{1}$$

Perpendicularele din vârfurile $(\pm a, 0)$ la aceste tangente sunt

$$y = \pm \frac{a}{b} \operatorname{tg}\varphi\,(x - a). \tag{2}$$

Eliminând pe φ între (1) , (2) şi

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$$

se găseşte că cele două podare sunt

$$P_1 = (x^2 + y^2 - ax)^2 - a^2(a - x)^2 - b^2y^2 = 0$$

$$P_2 = (x^2 + y^2 + ax)^2 - a^2(a + x)^2 - b^2y^2 = 0.$$

Anulând în aceste ecuaţii pe x, se găseşte pentru y valorile comune $\pm b$. Deci P_1 , P_2 se taie în punctele $(\pm b, 0)$, adică în celelalte vârfuri ale elipsei.

V. C. Popescu
(Student, Toulouse).

BIBLIOTECA CENTRALĂ a „ASOCIAŢIUNII" SIBIIU

CHESTIUNI DE EXAMEN

FACULTATEA DE ŞTIINŢE DIN CLUJ

(Sesiunea din Iunie 1930)

ANUL I

ALGEBRA SUPERIOARĂ

Proba teoretică

1°. Se dă ecuaţia

$$x^3 - 3ax^2 + 2a^2x + b = 0$$

(a,b) fiind ordonatele unui punct în plan, să se discute şi să se reprezinte geometric discuţia.

2°. Să se verifice metoda lui STURM şi metoda lui ROLLE.

3°. Se dă un dreptunghiu de laturi a, $2a$. Se tae din colţurile acestui dreptunghiu patrate de latură x. Se cere să se determine x în aşa fel ca volumul născut să fie k^3. Să se compare rezultatele cu ecuaţia dată.

Timpul acordat: 4 ore.

Proba practică

Se dă un con circular drept de volum $\frac{\pi a^3}{3}$ şi de suprafaţă laterală $Sl = \pi b^2$. Să se calculeze elementele conului. Să se calculeze din ecuaţia de gradul trei ce dă înălţimea cea mai mică rădăcină pozitivă şi să se examineze posibilităţile problemei. Un caz particular $a = 1$, $b^2 = 2$.

Timpul acordat: 3 ore.

GEOMETRIE ANALITICĂ

Proba teoretică

Se dau trei drepte, (D_1) fiind axa OX; (D_2) trecând prin punctul de pe axa OY de ordonată 1 şi are parametrii directori egali între ei; (D_3) trece prin punctul de pe axa OZ de cotă 1 şi e paralelă cu bisectoarea unghiului XOY. O generatoare mobilă (G) se sprijină pe aceste trei drepte. Se cere:

1°. Să se scrie ecuaţia suprafeţei născută de generatoarea (G).

2°. Genul suprafeţei.

3°. Ecuaţia redusă.

Timpul acordat: 4 ore.

Proba practică

O iperbolă are centrul în (1,1), una din asimptotele ei trece prin origină, iar iperbola trece prin (1,0).

1°. Să se scrie ecuaţia generală a tuturor iperbolelor cari satisfac la aceste ecuaţii.

2°. Să se arate că toate aceste iperbole trec printr'un punct fix diferit de (1,0).

3°. Să se particularizeze parametrul din ecuaţia generală astfel încât să obţinem iperbola tangentă în (1,0) la axa Ox.

Timpul acordat: 3 ore.

MATEMATICI GENERALE

Proba teoretică

1°. Să se reprezinte funcţiunea

$$y = \frac{x^3 - 2x^2 + 5x}{2(x+1)^2}.$$

2°. Să se determine coordonatele punctului de intersecţie al asimptotei oblice cu curba.

3°. Să se integreze funcţiunea în intervalul $x = 0$, $x = 1$.

Timpul acordat: 4 ore.

Proba practică

1°. Să se determine curba a cărei subtangentă este egală cu expresiunea $y - 2x$, în care x şi y reprezintă coordonatele punctului de contact al curbei cu tangenta corespunzătoare. Să se indice soluţia particulară care trece prin punctul (1,1) al planului.

2°. Care este ecuaţia planului (P) dus prin punctul (2, — 1,3) perpendicular pe dreapta (D) dată de ecuaţiile

$$(D) \quad \begin{cases} 3x + 5y - 4z + 7 = 0. \\ 4x + 7y - 5z - 2 = 0. \end{cases}$$

Timpul acordat: 3 ore.

GEOMETRIE DESCRIPTIVĂ

Intersecţia a două cilindre. Cadrul are dimensiunile orizontale şi verticale 240 m.m. şi 360 m.m. Linia de pământ paralelă cu dimensiunea cea mică la distanţa de 160 m.m. de sus în jos.

Cilindrul C are ca bază un cerc în planul orizontal cu centrul O(— 60, 91,0), iar raza este de 24 m m. Generatoarele paralele cu dreapta definită de punctele (θ, θ') (— 20, 71, 69') şi α, α' de coordonate (— 84, 91, 0).

Cilindrul C_1 are ca bază un cerc în planul orizontal cu centrul $O_1(60, 125,0)$ iar $R_1 = 40$ m.m. Generatoarele definite de dreapta ce trece prin punctele (θ, θ') şi (S, S') $(20, x, 0)$; punctul S fiind pe tangenta de jos dusă din α la cercul O_1.

Timpul acordat: 3 ore.

ANUL II

ANALIZA MATEMATICĂ

PARTEA I

Proba teoretică

I. Se consideră dreptele: (D_1) e bisectoarea unghiului *yoz* şi (D_2) e paralela la *Oz* dusă prin punctul (1, 1, 0). O generatoare mobilă (G) se sprijină pe (D_1) şi (D_2), rămânând paralelă cu planul *xoy*. Se ştie că suprafaţa născută de (G) e un paraboloid iperbolic.

1°. Să se afle liniile asimptotice ale acestei suprafeţe.

2°. Să se scrie ecuaţia proecţiilor liniilor de curbură pe planul xOz şi să se integreze.

II. Să se găsească extremele funcţiunii

$$\frac{a(x+y)-1}{x^2+y^2}.$$

Timpul acordat: 3 ore.

Proba practică

Să se calculeze integrala

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{(4-\cos^2 x)^2}\,dx$$

să se studieze variaţia funcţiunii

$$y = \frac{\sin^2 x}{(4-\cos^2 x)^2}.$$

Timpul acordat: 2 ore.

MECANICĂ RAŢIONALĂ

PARTEA I

Cinematică. O dreaptă mobilă $\triangle$, antrenează cu ea un plan mobil. Punctul A al dreptei descrie circonferinţa de rază $OA = r$. Dreapta trecând necontenit prin punctul fix P depe circonferinţă.

Se cere: 1° baza, 2° rulanta, 3° centrul geometric al acceleraţiilor, 4°.

Ştiindu-se că viteza unghiulară a punctului A pe cercul O este constantă şi egală cu a, să se determine viteza unghiulară a rotaţiei instantanee.

Dinamica. Punctul M de massă m este obligat de a rămâne pe parabola $x^2 = 2py$. El este atras de axul Ox cu o forţă $f = -4my$. Poziţia iniţială este punctul O, iar viteza iniţială este $v_0 = p$. Se cer expresiunile coordonatelor x, y în funcţie de timp.

Timpul acordat: 4 ore.

ASTRONOMIE

Proba teoretică

I. Să se deducă formuleie cu care se calculează corecţiille de paralaxă anuală pentru coordonatele ecliptice ale unui astru.

II. *Aplicaţie.* Coordonatele heliocentrice adevărate ale lui SATURN la o dată anumită la amiaza mijlocie pentru Cluj sunt

$$L = 180^\circ 29' 1'',4 \quad ; \quad \beta = 2^\circ 18' 20'',9 \quad ; \quad \log r = 0{,}97783.$$

Coordonatele geocentrice adevărate ale soarelui în acelaşi moment fiind

$$L_\odot = 102^\circ 53' 52''87 \quad \beta_\odot = 0^\circ \quad \log R = 0{,}00722.$$

Să se calculeze coordonatele geocentrice ale planetei SATURN.

Timpul acordat: 3 ore.

Proba practică

Observând cu teodolitul o stea cu ascensiunea dreaptă $\alpha = 8^h\ 33^m\ 25^s$ şi declinaţia $\delta = 58^\circ 34' 48''$ la $5^h\ 28^m\ 15^s$ timp sideral s'a găsit că distanţa zenitală $z = 33^\circ 36' 15'',3$ şi ca citire pe cercul azimutal $L = 205^\circ 53' 21''2$. Se cere să se determine direcţia meridianei şi latitudinea locului.

Timpul acordat: 2 ore.

ANUL III

MECANICA RAŢIONALĂ

PARTEA II

1. *Statica.* Să se determine prin teorema travaliurilor virtuale poziţia de echilibru a sistemului rigid format de barele grele şi omogene OA şi OB de lungime egală cu l şi l'; de greutate p şi p' unghiul OAB fiind egal cu α, iar punctul O fix.

Caz particular $l' = 2l$ şi $p' = 2p$.

2. *Dinamica.* Să se determine mişcarea sistemului format de două puncte A şi B de aceeaşi greutate mg, punctul A fiind mobil pe Oy, punctul B pe axa Ox iar distanţa AB fiind invariabilă şi egală cu l. Se va aplica: 1° metoda

forţelor de legătură, 2° ecuaţia generală a dinamicei, 3° metoda multiplicatorilor lui LAGRANGE, 4° ecuaţiile lui LAGRANGE.

3. Efectul percuţiei asupra unei plăci plane fixate printr'unul din punctele ei O, placa fiind la inceput în repaos.

Timpul acordat: 4 ore.

ANALIZA MATEMATICĂ

PARTEA II

Proba teoretică

Se consideră ecuaţia diferenţială

$$(1) \qquad x(1-x)y'' - (1-2x)y' - 2y = 0$$

şi sistemul

$$(2) \qquad \begin{cases} x(1-x)y' + \lambda y = z \\ z' + \mu z = 0 \end{cases}$$

unde λ şi μ sunt două funcţiuni nedeterminate de x.

1°. Să se arate că dacă eliminăm pe z între ecuaţiile (2), rezultatul eliminării este ecuaţia (1), atunci λ trebue să fie o integrală a ecuaţiei lui RICCATI

$$\lambda' - \frac{\lambda^2}{x(1-x)} + \frac{2(2x-1)}{x(1-x)}\lambda + 2 = 0.$$

2°. Să se integreze ecuaţia RICCATI observând că ea are o integrală de forma $Ax + B$.

3°. Să se determine o pereche de funcţiuni λ şi μ astfel ca eliminarea lui z între ecuaţiile (2) să conducă la ecuaţia (1).

4°. Să se integreze sistemul (2) şi să se deducă integrala generală a ecuaţiei (1). Se va găsi că integrala generală a ecuaţiei (1) este un polinom de gradul II care se poate găsi direct.

5. Să se integreze ecuaţia

$$x(1-x)y'' - (1-2x)y' - 2y = e^{-x}(x-1)^2 x.$$

Timpul acordat: 3 ore.

Proba practică

1°. Să se calculeze volumul cuprins între suprafeţele $z = \frac{xy}{3}$, planul xoy şi cilindrul eliptic

$$\frac{(x+1)^2}{4} + (y-2)^2 = 1.$$

2°. Să se explice rezultatul găsit.

3°. Să se generalizeze problema pentru suprafețele

$$z = \frac{xy}{c}\ ,\quad \frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1.$$

4. Să se arate că, în acest caz volumul e egal cu $\pi ab\xi$ unde $\xi = \frac{pq}{c}$.

Timpul acordat: 2 ore.

TEORIA FUNCȚIUNILOR

Proba teoretică

1°. Să se determine transformarea

$$Z = \frac{az+b}{cz+d}$$

care transformă punctele $z_1 = 1, z_2 = \infty, z_3 = -\frac{1}{2}$ în $Z_1 = \frac{1}{3}, Z_2 = 1, Z_3 = \infty$, să se găsească apoi cercul obținut prin această transformare din cercul $|z-1| = 1$.

2°. Să se desvolte funcțiunea

$$f(z) = \frac{1}{z^4 - 2z^3 - 3z^2 + 8z - 4}$$

în serie după puterile lui $z - 1$.

Să se calculeze

$$\int_{(c)} f(z)dz$$

după cercul

$$(c) \qquad (x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}\ .$$

Să se calculeze

$$\int_{(c_1)} f(z)dz$$

după cercul

$$(c_1) \qquad (x-1)^2 + y^2 = \frac{9}{4}\ .$$

Timpul acordat: 3 ore.

Proba practică

Să se calculeze integrala

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^5+1}\,dx.$$

Timpul acordat: 2 ore.

GEOMETRIE INFINITEZIMALĂ

Studiul geometric al curburii și torsiunii la curbele strâmbe. Aplicație la elice.

Timpul acordat: 3 ore.

ALGEBRA ELEMENTARĂ

Anul preparator

1°. Să se arate că ecuaţia

$$3x^2 - 2(a+b)x + ab = 0 \qquad b < a$$

are rădăcinile reale oricare ar fi a şi b reali. Să se arate că b e cuprins între rădăcinile ecuaţii, iar a e mai mare decât aceste rădăcini.

2°. Se consideră o foaie dreptunghiulară şi se tae din fiecare colţ câte un patrat. Din ceeace rămâne, se formează un paralelipiped. I. Să se afle volumul lui. II. Să se studieze variaţia lui când x variază şi III. Să se calculeze maximul acestui volum arătând că el are expresia.

$$\frac{4}{27}[(a+b)(2a-b)(2b-a)+(a^2+b^2-ab)^2]^3$$

caz particular $a = b$ şi $a = 2b$.

Timpul acordat: 2 ore.

GEOMETRIA ELEMENTARĂ

Cercul ce are diametrul înălţimea AH a unui triunghiu tae laturile AB şi AC în E şi F. Fie P şi Q proecţiile acestor puncte pe AH. Dreptele EH şi BQ se tae în M, iar FH şi CP în N.

Să se scrie că tr unghiul AEH este tăiat de transversala BMQ, iar triunghiul APC este tăiat de transversala HNF.

Să se observe că EP şi QF sunt paralele respectiv cu BH şi HC, şi să se deducă apoi $\frac{ME}{MH} = \frac{NP}{NC}$ şi de aici că MN este paralelă cu BC.

Timpul acordat: 2 ore.

ARITMETICA ŞI TRIGONOMETRIA

I. Ştiind că la o adâncime de 28 m. temperatura e de 11°,766; la 505 m. e de 27°,030 şi admiţând că pentru adâncimi mai mari ca 28 m creşterile temperaturii sunt proporţionale cu creşterile adâncimii, să se calculeze:

1°. Cu cât creşte temperatura când adâncimea (mai mare ca 28 m.), creşte cu 1m.

2°. Dela ce adâncime vine un isvor de apă caldă care are temperatura de 86°.

II. Insemnând cu A unghiul egal cu 3/7 dintr'un unghiu drept, să se calculeze toate unghiurile x pozitive şi mai mici decât 360°, care verifică ecuaţia

$$\text{g}3x = \sqrt[3]{\frac{32425 \cdot \text{tg}A}{85664 \cdot \sin 3A}}.$$

Timpul acordat: 2 ore.

MATEMATICI ELEMENTARE

(Anul preparator chimişti)

I. Intr'un vas de formă cilindrică, având ca bază un cerc cu raza de 0,26 m şi înălţimea de 0,54 m s'a pus apă pânăla 5/6 din înălţime. S'a introdus apoi in vas o bucată de fier şi s'a constatat că greutatea vasului cu tot conţinutul lui a sporit cu 222 kgr. Ştiind că greutatea fierului este 7,8 să se calculeze:

1°. Volumul cantităţii de fier care s'a pus în vas.

2°. Cu cât a sporit greutatea conţinutului vasului dacă s'ar pune în vas o bucată de fier de două ori mai mică.

II. Durata oscilaţiilor în acelaş loc a două pendule cu lungimi diferite sunt proporţionale cu rădăcinile patrate ale lungimilor lor. Ştiind că o pendulă care are lungime de 99,39 cm. bate secunda la Paris să se calculeze:

Numărul oscilaţiilor pe zi, la Paris, a unei pendule cu lungimea de 56,74 cm.

III. Să se rezolve sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x + y = 900 \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = 2. \end{cases}$$

Timpul acordat: 3 ore.

BIBLIOGRAFIE

Bulletin de la section scientifique de l'Académie Roumaine. Anul XIII. No. 3. No. 4 — 5. No. 6. No. 7. Bucureşti. Sur certains problèmes aux limites, directs ou inverses, pour les fonctions harmoniques, par N. CIORANESCO.

Bulletin of the American mathematical Society. Volumul XXXVI. No. 10. Octomvrie 1930. O notă asupra unei teoreme importante din algebra diviziunii normale, de A. A. ALBERT. O regulă de comutaţie în mecanica cuantică, de E. FEENBERG. Notă asupra echivalenţei unor proprietăţi a şirurilor abstracte, de R. G. PUTNAM. Asupra unei caracterizări a şirurilor de puncte de grad nemărginit pe o suprafaţă arbitrară, de H. BLUMBERG. Densitatea punctelor de tăere şi punctele extreme ale unui continuum, de W. L. AYRES. Generalizarea identităţilor trigonometrice în parafrazare aritmetică, de H. T. ENGSTROM. O teoremă elementară asupra matricelor, de M. H. INGRAHAM. Probleme de calculul variaţiunilor cu condiţiuni prescrise de transversabilitate, de LINCOLN LA PAZ. Despre suprafeţele în spaţiul cu patru şi cu cinci dimensiuni, de B. C. WONG. Puncte singulare de funcţiuni care satisfac ecuaţiile cu

derivate parţiale ale fluxului de căldură, de D. V. WIDDER. Asupra unui sistem dublu infinit de curbe pe o suprafaţă, de C. H. ROWE. Rădăcinile caracteristice ale unei matrice, de E. T. BROWNE. Asupra reducerii formelor binare cuadratice indefinite, de J. V. USPENSKY. Privitor la o serie de axiome pentru geometria semicuadratică a spaţiului triplu, de J. L. DORROH. Unele forme chinare date de suma a cinci patrate, de B. W. JONES. O serie de suprafeţe raţionale, de A. R. WILLIAMS. Asupra funcţiunilor numerice incomplecte, de J. V. USPENSKY. Asupra locurilor de spaţii ($r-2$) incidente cu curbe în spaţiu r, de B. C. WONG. Ecuaţii identice ale funcţiunilor multiplicative, de R. VAIDYNATHASWAMY.

Mathesis. Tomul XLIV. No. 9. Noemvrie 1930. O cubică asociată triunghiului, de CL. SERVAIS. Dreapta lui SIMSON comună triunghiurilor ortic şi complimentar, de R. GOORMAGHTIGH. Asupra curbelor plane de ordinul al şaselea având şase puncte de răspăr, de D-ra J. DESSART. Proiectivitatea ciclică de ordinul trei pe o cubică în spaţiu, de P. LIBOIS. Asupra patrulaterului complect, de V. THÉBAULT. Asupra curbei echitangenţiale a unei curbe în spaţiu, de R. DEAUX.

Journal de mathematiques élémentaires, publié par H. VUIBERT. Anul 55. No. 4. Noiemvrie 1930. Paris.

Idem. No. 5. Decemvrie 1930.

Idem. No. 6. Decemvrie 1930.

Revista ştiinţifică «V. ADAMACHI». Vol. XVI. No. 2 — 3. Septemvrie 1930. Iaşi. *Niels Henrik Abel,* de P. CAZANACLI.

Revista matematică din Timişoara. Anul X. No. 10. Decemvrie 1930. Timişoara. Câteva probleme de calcul diferenţial, de V. CLAUDIAN.

RENÉ GARNIER. *Cours de mathématiques générales. (Analyse et géométrie).* Tome II. Calcul intégral. Paris. Gauthier-Villars et C-ie. 1931.

Volumul conţine partea a doua a cursului de matematici generale pe care autorul îl face la Facultatea de ştiinţe din Paris. El conţine explicarea noţiunii de integrală, procedeele de a găsi integralele simple, integralele duble, triple, pornind dela probleme geometrice şi cu aplicaţiuni la diferite chestiuni necesare fizicianilor şi inginerilor; integralele curbilinii şi de suprafaţă; ecuaţiile diferenţiale de ordinul I, de ordinul al doilea, ecuaţiile lineare; sisteme de ecuaţiuni; ecuaţii lineare de ordinul I cu derivate parţiale, ecuaţia coardelor vibrante, seriile lui FOURIER. Volumul se termină cu chestiuni privitoare la axele oblice, la vectori, înfăşurate, descompunerea în fracţii raţionale, valori de integrale indefinite, funcţiunile iperbolice.

Chestiunile sunt expuse clar cu imagini geometrice şi fără a se intră în demonstraţiuni prea riguroase şi aride. E o carte bună pentru cei ce vor să-şi lămurească metodele analizei matematice în vederea aplicării ei la studiul fenomenelor fizice şi tecnice.

I. I.

CERERI

200. Cine îmi poate vinde şi cu ce preţ No. 8 (luna Maiu) din *Gazeta Matematică* vol. XXXIII? Aş puteà da în schimb No. 1 din anii XXXIII, XXXIV sau XXXV.

VLADIMIR I. CRIVĂŢ
Str. Basarabia 49, Bucureşti II.

DIVERSE

Societatea Română de matematici a ţinut şedinţă în seara zilei de 8 Decemvrie, la care au făcut comunicări D-nii GH. VRÂNCEANU asupra condiţiilor de rostogolire a unei suprafeţe pe alta fără alunecare şi pivotare; Comandor A. NEGULESCU despre o lecţie de Algebră metafizică şi N. GEORGESCU asupra valorii celei mai probabile.

O altă şedinţă s'a ţinut în seara zilei de 22 Decemvrie în care D-l AL. PANTAZI a vorbit despre unele configuraţii de omografii. Societatea şi-a ales apoi Biuroul pe anul 1931.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1949. *Care sunt zilele ale căror dată în calendarul iulian sau gregorian, scrisă după data din calendarul gregorian sau iulian, ne dau un număr egal cu anul corespunzător acelor zile?*

COL. GH. BUICLIU.

Fie s secolul în care se caută data cerută de enunţ, d diferenţa de zile între cele 2 calendare în secolul s, L_1 numele unei luni în calendarul iulian, L_2 numele lunei următoare, n numărul de zile ale lunei L_1, y anul cerut şi x o dată oarecare a lunei L_1 în calendarul iulian. Aceiaşi zi x, va aveà în calendarul gregorian data.

(1) $x + d$ în luna L_1 dacă $x + d \leqslant n$

(2) $x + d - n$ în luna L_2 dacă $x + d > n$.

Pentru secolele care au trecut dela 5/15 Octombrie 1582, când s'a făcut reforma calendarului iulian de către PAPA GRIGORIE XIII, şi până azi, d a variat dela 10 la 13. Pentru aceste secole avem deci

$$x < 31 \quad ; \quad d < 13 \quad \text{şi} \quad x + d \leqslant 44.$$

Aceste neegalităţi arată că y, compus conform enunţului scriind pe x înaintea sau după unul din numerele (1) şi (2), poate fi de 4 cifre în următoarele feluri

$$100\,x + (x + d) = y \quad \therefore \quad y = 101x + d \tag{3}$$

$$100\,x + (x + d - n) = y \quad \therefore \quad y = 101x + d - n \tag{4}$$

$$100(x + d) + x = y \quad \therefore \quad y = 101x + 100d \tag{5}$$

$$100(x + d - n) + x = y \quad \therefore \quad y = 101x + 100d - 100n. \tag{6}$$

Problema se reduce la a rezolvà în numere întregi ecuaţiile (3), (4), (5) şi (6) în condiţia că y este în secolul s, adică

$$100\,(s - 1) < y < 100s.$$

Să rezolvăm numeric problema, căutând de exemplu soluţiile ecuaţiei (3) pentru secolele XVI şi XVII dela 1582 la 1700, ştiind că în acest interval d a fost 10. Avem succesiv

$$1582 < y = 101x + 10 < 1700$$

$$\therefore \quad 1572 < 101x < 1690$$

$$\therefore \quad 15{,}5\ldots < x < 16{,}7\ldots$$

$$\therefore \quad x = 16 \quad \text{şi deci} \quad y = 1626.$$

Deci în ziua de *16 ale lunei* L_1 *iulian* sau *26 ale lunei* L_1 *gregorian* din anul 1626 avem o soluţie a problemei. Cum toate lunile anului au peste 26 zile, soluţia aceasta o vom întâlni în fiecare din lunile anului 1626.

Se procedează absolut la fel pentru ecuaţiile (4), (5) şi (6) unde i se dau lui n pe rând valorile 28, 29, 30 şi 31.

Soluţiile complecte pentru toate secolele, dela anul 1582, pânăla secolul XX inclusiv sunt cuprinse în următorul tabel în care datele sunt scrise, ca de obiceiu, sub forma unor fracţii având la numărător data zilei şi luna din calendarul iulian iar la numitor

dată zilei şi luna din calendarul gregorian. Lunile s'au notat cu I, II, ... corespunzând cu Ianuarie, Februarie, ...

1^0... 1606... $\frac{06}{16}$. I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII.

2^0... 1626... $\frac{16}{26}$. I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII.

3^0... 1706... $\frac{06}{17}$. I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII.

4^0... 1728... $\frac{17}{28}$. I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII.

5^0... 1802... $\frac{18}{02}$. $\frac{\text{II}}{\text{III}}$.

6^0... 1806... $\frac{06}{18}$. I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII.

7^0... 1830... $\frac{18}{30}$. I, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII.

8^0... 1901... $\frac{19}{01}$. $\frac{\text{I}}{\text{II}}$, $\frac{\text{III}}{\text{IV}}$, $\frac{\text{V}}{\text{VI}}$, $\frac{\text{VII}}{\text{VIII}}$, $\frac{\text{VIII}}{\text{IX}}$, $\frac{\text{X}}{\text{XI}}$.

9^0... 1902... $\frac{19}{02}$. $\frac{\text{IV}}{\text{V}}$, $\frac{\text{VI}}{\text{VII}}$, $\frac{\text{IX}}{\text{X}}$, $\frac{\text{XI}}{\text{XII}}$.

10^0... 1906... $\frac{06}{19}$. I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII.

Din punct de vedere algebric ecuaţia (4) are soluţia 1801 pentru $n = 29$, şi $d = 12$, soluţie care nu e admisibilă din punct de vedere calindaristic căci 1801 nefiind divizibil prin 4 nu e bisect şi deci Februarie nu are 29 de zile.

Notă. D-l I. V. MĂTIEŞ (Student Cluj), a rezolvat foarte bine problema pe aceiaşi cale. In căutarea soluţiilor numerice d-sa a considerat întreg secolul XVI şi a găsit astfel şi soluţiile:

1505... $\frac{05}{15}$. I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII

1525... $\frac{15}{25}$. I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII

care ar fi bune numai dacă calendarul gregorian s'ar fi pus în aplicare dela 1505.

PROBLEMA 3698. *Să se stabilească identitatea*

$$(1)\quad \frac{h_b - h_c}{r_a(cr_b - br_c)} + \frac{h_c - h_a}{r_b(ar_c - cr_a)} - \frac{h_a - h_b}{r_c(br_a - ar_b)} = \frac{r_c - 2R}{SR},$$

notaţiile fiind cele cunoscute într'un triunghiu.

CEZAR COŞNIŢĂ.

Soluţie. Ţinând seamă că:

$$a \cdot h_a = 2S \quad , \quad bh_b = 2S \quad , \quad ch_c = 2S$$

şi

$$r_a(p-a) = S \quad , \quad r_b(p-b) = S \quad , \quad r_c(p-c) = S,$$

avem:

$$\frac{h_b - h_c}{r_a(cr_b - br_c)} = \frac{\frac{2S}{b} - \frac{2S}{c}}{\frac{S}{p-a}\left(\frac{Sc}{p-b} - \frac{Sb}{p-c}\right)} = \frac{2(p-a)(p-b)(p-c)(c-b)}{S \cdot bc\,[p(c-b) - (c^2 - b^2)]}.$$

Dar:

$$p(c-b) - (c^2 - b^2) = (c-b)(p-b-c) = -(c-b)(p-a),$$

astfel că:

$$\frac{h_b - h_c}{r_a(cr_b - br_c)} = -\frac{2(p-b)(p-c)}{S \cdot bc}.$$

De asemenea se găseşte:

$$\frac{h_c - h_a}{r_b(ar_c - cr_a)} = -\frac{2(p-c)(p-a)}{S \cdot ac}$$

şi

$$\frac{h_a - h_b}{r_c(br_a - ar_b)} = -\frac{2(p-a)(p-b)}{S \cdot ab}.$$

Notând cu A primul membru al formulei (1), avem:

$$A = \frac{2}{abcS}\left\{c(p-a)(p-b) - a(p-b)(p-c) - b(p-c)(p-a)\right\}.$$

Să notăm paranteza din membrul al doilea cu B. Efectuând calculele vom aveà :

$$B = p^2\ (c-a-b) - p\,[c\,(a+b) - a\,(b+c) - b\,(c+a)] - abc$$

$$= p^2\,\{(c+a+b) - 2\,(a+b)\} + 2pab - abc$$

$$= 2p\,\{p^2 - p\,(a+b) + ab\} - abc$$

$$= 2p\,(p-a)\,(p-b) - abc$$

aşa că :

$$A = \frac{4p\,(p-a)\,(p-b)}{abc\ S} - \frac{2}{S}\ .$$

Inlocuind pe *abc* prin 4RS şi apoi pe S^2 prin

$$p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c),$$

avem :

$$A = \frac{1}{R\,(p-c)} - \frac{2}{S}\ .$$

Insă :

$$\frac{1}{p-c} = \frac{r_c}{S},$$

aşa că :

$$A = \frac{r_c}{RS} - \frac{2}{S}$$

este tocmai formula care trebuià demonstrată.

Gh. Th. Gheorghiu
Student la matematici. Bucureşti.

Au rezolvat problema în mod analog D-nii : Eug. I. Dumitrescu (Buzău), Adrian C. Gheorghiu, Petre Ghişoiu (Bucureşti), D. H. Iancu (Iaşi), Justin Vâlceanu (Tg.-Jiu), N. N. Velicescu.

Soluţie puţin diferită de D-nii : A. Burichovici (Galaţi), P. Ghişoiu (Bucureşti), I. O. Zaharia (Constanţa), N. O. Zaharia (Constanţa).

Observare.

La fel se demonstrează relaţia:

$$\frac{h_a - h_b}{r_c(br_a - ar_b)} + \frac{h_b - h_c}{r_a(cr_b - br_c)} + \frac{h_c - h_a}{r_b(ar_c - cr_a)} = \frac{r - 2R}{SR}.$$

[Adr. C. Gheorghiu, Gh. Th. Gheorghiu (Bucureşti), Justin Vâlceanu (Tg.-Jiu), N. O. Zaharia (Constanţa)].

PROBLEMA 3813. *Fiind dată o linie frântă* ABCD *să se determine în planul ei un punct* S *astfel ca suprafeţele* SAB, SBC, SCD *să fie egale.*

P. Trofimov.

Generalizare. Să determinăm un punct S aşa fel ca între ariile din enunţ să avem relaţiile:

m aria (SAB) $= n$ aria (SBC) $= p$, aria (SCD) m, n, p, fiind trei numere date.

Să presupunem determinat un astfel de punct. Fie A_1, C_1 picioarele perpendicularelor din A şi C pe SB şi O_1 intersecţia dreptelor AC, SB. Avem:

$$\text{aria (SAB)} = \tfrac{1}{2}\, \overline{SB} \times \overline{AA_1}$$

$$\text{aria (SBC)} = \tfrac{1}{2}\, \overline{SB} \times \overline{CC_1}$$

şi atunci vom avea:

$$m \cdot \tfrac{1}{2}\, \overline{SB} \cdot \overline{AA_1} = n \times \tfrac{1}{2}\, \overline{SB} \times \overline{CC_1}$$

de unde:

$$\frac{\overline{AA_1}}{\overline{CC_1}} = \frac{n}{m};$$

iar din asemănarea triunghiurilor dreptunghice AO_1A_1 şi BO_1B_1 deducem:

$$\frac{\overline{O_1A}}{\overline{O_1C}} = \frac{\overline{AA_1}}{\overline{CC_1}} = \frac{n}{m}.$$

Punctul O_1 împarte dreapta AC în raportul $\frac{n}{m}$. Analog se demonstrează că dacă SC taie pe BD în O_2, punctul O_2 va împărți pe BD în raportul $\frac{p}{n}$. Reciproc, dacă O_1 este un punct care împarte dreapta AC în raportul $\frac{n}{m}$, orice punct S de pe dreapta BO_1 este așa în cât să avem relația:

$$m \text{ aria } (SAB) = n \text{ aria } (SBC).$$

Pentru a arătà acest lucru este suficient să reluăm demonstrația de mai sus în sens invers. De aci rezultă numai decât construcția următoare: Să considerăm cele două puncte O_1 și O'_1 respectiv interior și exterior segmentului AC, care împart acest segment în raportul $\frac{n}{m}$. Punctele O_1 și O'_1, sunt după cum se știe conjugate armonic față de A și C. Să considerăm de asemeni punctele O_2 și O'_2, respectiv interior și exterior segmentului BD, care împart acest segment în raportul $\frac{p}{n}$. Punctele S, S', S'', S''' respectiv intersecțiile perechilor de drepte

$$(BO_1 , CO_2) ; (BO_1 , CO'_2) ; (BO'_1 , CO_2) ; (BO'_1 , CO'_2) ;$$

sunt soluțiile problemei. Problema admite așa dar *4 soluțiuni.*

In cazul particular al problemei din enunț, când avem:

$$m = n = p,$$

punctele O_1 și O_2 sunt mijloacele dreptelor AC și BD, iar punctele O'_1 și O'_2 sunt la infinit pe dreptele respective așa că BO'_1 și CO'_2 sunt paralele respectiv cu AC și BD.

Observații.

D-l Petre I. Ghișoiu (Șc. Politehnică București), căruia i se datorește generalizarea problemei, a condus și raționamentul de mai sus, fără însă a observà că problema admite 4 soluțiuni.

D-l C. D. Ionescu-Țiu (Șc. Militară de Geniu) a arătat singurul că problema admite, în cazul particular din enunț, patru soluțiuni, dând și o foarte bună metodă pentru construcția lor. D-sa a arătat deasemeni cum se pot determină pe cale trigonometrică punctele S, S', S'', S''' prin calcularea unghiurilor pe care SA, SB, SC, SD, le fac cu dreptele AB, BC, CD și a calculat și aria comună a triunghiurilor SAB, SBC, SCD în funcțiune de datele problemei.

D-nii: N. ALDEA (Bucureşti); AUREL EM. BĂDESCU (Lic. M-rea Dealului); GH. TH. GHEORGHIU-GLADIŞ (student), HEYTMANEK C. (Şc. Militară Artilerie Temişoara), au dat foarte bune indicaţiuni, dar au arătat numai soluţia S.

D-nii: EDGARD AURIAN, IOAN C. BOIAN, EUGENIU P. HARALAMB au arătat că problema admite soluţia S, fără a arătă că mai pot exista şi altele.

D-l V. IONESCU (Lic. M. Eminescu Bucureşti) a arătat cum se poate determină soluţia problemei, fără a o precizà.

D-l MIHAIL VELEA raportând figura la axele AB şi CD (presupuse că se întâlnesc!) a determinat pe cale analitică coordonatele punctului S, exprimând condiţiunile ca ariile din enunţ să fie egale, fără a ţine seamă de semn. Deasemeni D-l NICOLAIE N. VELICESCU a dat o soluţie analitică raportând figura la dreapta BC şi perpendiculara în B pe aceasta.

D-l VALERIU ROVACU (Cluj) a dat o soluţie care dacă era complectă, puteà fi interesantă.

AL. P.

PROBLEMA 3842. *Să se găsiască numerele prime de patru cifre, ştiind că suma bipatratelor cifrelor lor este 9588.*

I. MURĂROIU.

Prin enunţ nu se face restricţiunea ca cele 4 cifre să fie diferite, deci vom examinà şi cazurile când 2 sau 3 din cele 4 cifre ar fi identice.

Ridicând la puterea a patra numerele de câte o cifră, avem

$0^4 = 0$; $1^4 = 1$; $2^4 = 16$; $3^4 = 81$; $4^4 = 256$; $5^4 = 625$

$6^4 = 1296$; $7^4 = 2401$; $8^4 = 4096$ şi $9^4 = 6561$.

Se vede că numărul căutat nu poate aveà cifrele 8 şi 9, căci $8^4 + 9^4$ întrece pe 9588. De asemeni nu poate aveà de 2 ori cifra 9 sau de 3 ori cifra 8. Ar puteà aveà de 2 ori cifra 8. Dar:

$$9588 - 2 \cdot 8^4 = 1396$$

iar 1396, se vede din tabelul bipatratelor, nu poate fi suma a 2 bipatrate diferite, nici dublul unui bipatrat.

Numărul căutat ar puteà aveà de 3 ori cifra 7. Dar

$$9588 - 3 \cdot 7^4 = 2385$$

nu este bipatrat.

Deasemeni nu poate avea de 2 ori sau de 3 cifra 6, pentrucă

$$9588 - 2 . 6^4 = 6996 \quad \text{şi} \quad 9588 - 3 . 6^4 = 3700$$

iar 6996 nu este suma a 3 bipatrate şi nici 3700 nu este bipatrat.

In mod analog se arată că numărul căutat nu poate avea 2 sau 3 cifre identice din celelalte cifre. Rezultă că acel număr are toate cifrele diferite între ele.

Pentru ca suma a 4 bipatrate diferite, din bipatratele numerelor de o cifră, să fie 9588 trebuie ca printre acele bipatrate să fie neapărat şi 9^4. Deci suma bipatratelor celorlalte 3 cifre va fi

$$9588 - 9^4 = 3027.$$

Pentruca suma bipatratelor a 3 cifre diferite să fie 3027, trebuie ca unul din ele să fie neapărat 7^4. Deci celelalte bipatrate au ca sumă pe

$$3027 - 7^4 = 626.$$

Ori 626 este suma lui 1^4 cu 5^4 şi nu mai este în altfel suma bipatratelor a 2 cifre. Rezultă că cele 4 cifre ale numărului căutat sunt 1, 5, 7, şi 9. Scriind toate numerele de 4 cifre diferite care se pot formă cu aceste cifre şi eliminând pe acelea terminate cu 5 şi pe acelea care conţin factori primi, rămân următoarele 10 numere, care formează soluţiile problemei:

1579 ; 1597 ; 1759 ; 5179 ; 5197 ;

5791 ; 7159 ; 7591 ; 7951 ; 9157.

Notă. 1°. Au rezolvat foarte bine problema, fără a examină şi cazul a 2 sau 3 cifre identice D-nii: V. I. Crivăţ, H. Şt. Dăscălescu (Şc. Politecnică, Bucureşti); I. C. Savin (Şc. Militară de Artilerie, Timişoara); A. I. Bidoianu (Lc. Olteniţa) şi M. D. Motoc.

2°. Au rezolvat problema în cazul cifrelor diferite, găsind numai 9 din cele 10 soluţii D-nii: G. P. Boerescu, I. C. Voicu, G. I. Mladin, N. N. Radoveneanu, D. Şerban-Ulmeni, H. P. Ionescu, M. D. Creţu (Lc. Olteniţa) şi D. Şt. Mişchinea.

3°. D-l C. D. Ionescu-Ţiu a găsit 4 soluţii, iar D-l M. Unghianu a găsit numai soluţia 7951.

PROBLEMA 3850. *Să se studieze variaţia modulului expresiunei*

$$\sqrt{1 - \beta e^{i\theta} + \beta^2 e^{2i\theta}}$$

unde $\beta \geqslant 1$; θ *variază dela* 0 *la* π.

P. SERGESCU.

Soluţie dată de D-l M. VELEA (student Cluj).

Avem:

$$E = \sqrt{(1 - \beta\cos\theta + \beta^2\cos 2\theta) + i\,(-\beta\sin\theta + \beta^2\sin 2\theta)}$$

$$|E|^2 = \sqrt{(1 - \beta\cos\theta + \beta^2\cos 2\theta)^2 + (\quad \beta\sin\theta + \beta^2\sin 2\theta)^2}$$

$$= \sqrt{1 - 2\beta\cos\theta + \beta^2(1 + 2\cos 2\theta) - 2\beta^3\cos\theta + \beta^4}$$

Dar $|E|$ variază în acelaş sens cu $|E|^4$. Vom studiă deci variaţia funcţiunei $z = |E|^4$, când θ variază dela 0 la π.

$$z = 1 - 2\beta\cos\theta + \beta^2(1 + 2\cos 2\theta) - 2\beta^3\cos\theta + \beta^4$$

$$z' = 2\beta\sin\theta - 4\beta^2\sin 2\theta + 2\beta^3\sin\theta$$

$$z' = 2\beta\sin\theta\,[1 - 4\beta\cos\theta + \beta\,].$$

Când $0 < \theta < \pi$, $\sin\theta$ e pozitiv. Deci z' are semnul expresiunei

$$1 - 4\beta\cos\theta + \beta^2.$$

Prin urmare, avem două cazuri, după cum această expresiune se poate anulă sau nu, adică după cum $\dfrac{\beta^2 + 1}{4\beta}$ e mai mic ca unitatea, sau mai mare ca unitatea. In adevăr, din

$$1 - 4\beta\cos\theta_0 + \beta^2 = 0$$

se deduce

$$\cos\theta_0 = \frac{1 + \beta^2}{4\beta}$$

şi aceasta nu e posibil decât dacă

$$\frac{1 + \beta^2}{4\beta} \leqslant 1 \qquad \therefore \qquad \beta^2 - 4\beta + 1 \leqslant 0.$$

Rădăcinile ecuației $\beta^2 - 4\beta + 1 = 0$ sunt $2 \pm \sqrt{3}$. Dar $2 - \sqrt{3}$ e subunitar și noi am presupus $\beta \geqslant 1$. Avem deci două cazuri:

$$1^0): \ 1 \leqslant \beta \leqslant 2 + \sqrt{3} \qquad \text{și} \qquad 2^0): \ \beta > 2 + \sqrt{3}.$$

In cazul întâi, când $\beta \leqslant 2 + \sqrt{3}$, z' se anulează pentru $\theta_0 = \text{arc cos } \frac{1 + \beta^2}{4\beta}$, trecând dela negativ la pozitiv. Deci avem tabloul de variație:

θ	0		$\theta_0 = \text{arc cos } \frac{1+\beta^2}{4\beta}$		π
z'		$-$	0	$+$	
$\lvert E \rvert$	$\sqrt{1-\beta+\beta^2}$	desc. min. $= \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}\sqrt{\beta^2-1}$		cr.	$\sqrt{1+\beta+\beta^2}$.

In cazul al doilea, când $\beta > 2 + \sqrt{3}$, z' nu se anulează, păstrând în tot intervalul $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ semnul $+$. Deci $\lvert E \rvert$ crește mereu și avem tabloul de variație:

θ	0		π
z'		$+$	
$\lvert E \rvert$	$\sqrt{1-\beta+\beta^2}$	cr.	$\sqrt{1+\beta+\beta^2}$.

---

*PROBLEMA 3862. *Cari sunt cuburile ce se termină cu* szu, *știind că* s^2 *se scrie* zu?

I. V. MĂTIEȘ.

Știind că N^3 se termină cu *szu* și s^2 se scrie *zu*, urmează că N^3 se termină cu: *000, 101, 204, 309, 416, 525, 636, 749, 864* și *981.*

Dar conform notei matematice No. 9 din G. M. XXXIV pag. 134, un cub nu se poate termină decât cu una din grupele: *000, 101, 309, 416, 749, 864* şi *981*. Le vom examină pe fiecare în parte:

1. *Grupa: 000.* In acest caz $N = 10 . n$.

2. *Grupa: 101.* In acest caz $N = 100 . n + 1$, deci:

$$N^3 = (100n + 1)^3 = 1000 . A + 300n + 1$$

de unde se deduce că:

$$n = 10 . k + 3$$

şi prin urmare:

$$N = 1000 . k + 701.$$

3. *Grupa: 309.* In acest caz $N = 100 . n + 69$, deci:

$$N^3 = (100 . n + 69)^3 = 1000 . A + 1428300 . n + 328509$$

prin urmare:

$$n = 10 . k + 6$$

şi deci:

$$N = 1000 . k + 669.$$

4. *Grupa: 416.* Avem:

$$N^3 = (50 . n + 6)^3 = 1000 . A + 5400 . n + 216$$

deci:

$$n = 5 . k + 3,$$

de unde:

$$N = 250 . k + 156.$$

5. *Grupa: 749.*

$$N^3 = (100 . n + 49)^3 = 1000 . A + 720300 . n + 117649$$

deci:

$$n = 10 . k + 7,$$

de unde:

$$N = 1000 . k + 749.$$

6. *Grupa: 864.*

$$N^3 = (50 . n + 4)^3 = 1000 . A + 2400 . n + 64$$

deci:

$$n = 5 . k + 2,$$

de unde:

$$N = 250 . k + 104.$$

7. *Grupa : 981.*

$$N^3 = (100 \cdot n + 61)^3 = 1000 \cdot A + 1116300 \cdot n + 226981$$

deci :

$$n = 10k,$$

de unde :

$$N = 1000 \cdot k + 61.$$

Problema admite dar 7 grupe de soluţiuni :
Pentru $N^3 < 1000$ avem soluţiunile :

1) — $0^3 = 000$ până la $990^3 = 970299000$ . . . (000)
2) — $701^3 = 344472101$ . . . . . (101)
3) — $669^3 = 299418309$ . . . . . (309)
4) — $156^3 = 3796416$ . . . . . (416)
— $406^3 = 66923416$ . . . . . „
— $656^3 = 282300416$ . . . . . „
— $906^3 = 743677416$ . . . . . „
5) — $749^3 = 420189416$ . . . . . (749)
6) — $104^3 = 1124864$ . . . . . (864)
— $354^3 = 44361864$ . . . . . „
— $604^3 = 220348864$ . . . . . „
— $854^3 = 622835864$ . . . . . „
7) — $61^3 = 226981$ . . . . . (981).

In total *112 soluţiuni* în cazul particular.

Observaţiuni.

1. Au rezolvat problema utilizând nota No 49, XXXIV, dând numărul de soluţiuni din dreptul fiecăruia, pentru cazul particular, D-nii : I. Gh. Popa (112) şi P. I. Ghişoiu (8).

2. Au rezolvat parţial problema, pe o cale puţin diferită, D-nii : I. Gh. Bulangea şi M. Velea.

3. Restul soluţiunilor primite, utilizau direct tabelele de cuburi.

4. D-l P. I. Ghişoiu rezolvă şi cazul când s^2 se scrie zu şi găseşte soluţiunile generale :

$$N = 250 \cdot k + 102 \quad ; \quad N = 900 \cdot k + 3, \ (k > 0)$$

$$N = 250 \cdot k + 54.$$

I. L.

*PROBLEMA 3881. *Se cere patratul* ababa*bc*.

I. N. CONSTANTINESCU.

Ţinând seamă de ultimele patru cifre cu care se termină un patrat perfect (G. M. XXXV, nota 22), putem formă numerile:

1010100	1212121	1212129	1313136	1414144
1515156	1616161	1616164	1616169	2020201
2020209	2121216	2222224	2222225	2323236
2424241	2424244	2424249	2828281	2828289
2929296	3030304	3131316	3232321	3232324
3232329	3636361	3636369	3737376	3838384
3939396	4040400	4040401	4040404	4040409
4444441	4444449	4545456	4646464	4747476
4848481	4848484	4848489	5252521	5252529
5353536	5454544	5555556	5656561	5656564
5656569	6060601	6060609	6161616	6262624
6363636	6464641	6464644	6464649	6868681
6868689	6969696	7070704	7171716	7272721
7272724	7272729	7676761	7676769	7777776
7878784	7979796	8080801	8080804	8080809
8484841	8484849	8585856	8686864	8787876
8888881	8888884	8888889	9090900	9292921
9292929	9393936	9494944	9494949	9595956
9696961	9696964	9696969		

Dintre aceste 93 numere vom elimină 29 numere cari sunt divizibile cu *3* şi nu sunt divizibile cu 9, şi anume:

1010100	1515156	1616169	2020209	2121216
2323236	2828289	2929296	3232329	3939396
4040400	4040409	4444449	4747476	5252529
5353536	5656569	6363636	6464649	6868689
6969696	7171716	7777776	8080809	8787876
8888889	9393936	9494949	9595956	

Deasemenea mai eliminăm numerile:

6060609 şi 6161616

cari sunt divizibile cu 27 fără să fie cu 81.

Observăm apoi că:

$$N^2 = ababab c = 2.3.5.13.37\,(10.a + b) + c.$$

Şi atunci:

Dacă $c = 0$, N^2 poate fi patrat perfect, de unde rezultă eliminarea numărului *9090900.*

Dacă $c \neq 0$ atunci:

$$N^2 = M3 + c \quad \text{sau} \quad N^2 = M7 + c.$$

Dar un patrat perfect nu poate fi de formele:

$$M3 + 2 \; ; \; M7 + 3 \; ; \; M7 + 5 \; ; \; M7 + 6.$$

Insă *c* trebuie să fie terminaţie de patrat, deci nu poate fi decât *5* sau *6.*

Vom elimină deci din rest, numerile terminate cu *5* şi *6,* adică:

1313136 , 2222225 , 3131316 , 3737376 ,

4545456 , 5555556 , 7979796 , 8585856.

Scăzând deci:

$$29 + 2 + 1 + 8 = 40$$

numere din 93, mai rămân 53 numere, dintre cari nu răspund condiţiei problemei decât unul singur:

$$2424249 = 1557^2.$$

Au rezolvat problema 3881:

1) Utilizând nota matematică No. 22 şi eliminând M3, D-l P I. Ghişoiu.

2) Utilizând nota matematică No. 12, D-nii: I. Bulancea, Alex. Halperin, H. P. Ionescu, E. Mereuţă şi I. Gh. Popa.

3) Restul soluţiunilor utilizau prea multe încercări.

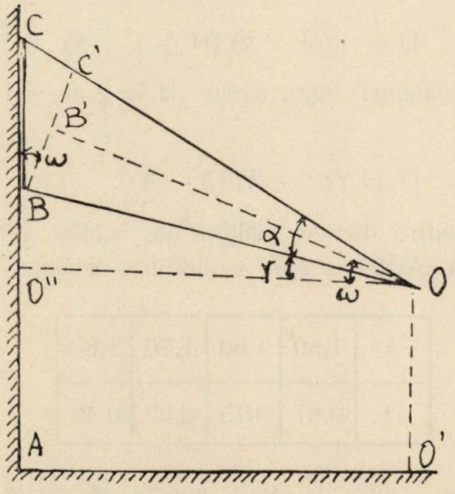
I. L.

*PROBLEMA 3890. *Intr'un muzeu, un tablou înalt de 1 m., este aşezat pe un perete, astfel încât marginea de jos are 2 m. înălţime.*

La ce depărtare de perete ar trebui să ne aşezăm, pentru a privi tabloul cât mai bine, admiţând că sala este suficient de mare şi luminată de prelutideni?

Căpitan I. Linteş.

Soluţia I-a. Presupunem un tablou de înălţime I, lipit de perete, la înălţimea H. Presupunem deasemenea că ochii celui ce priveşte tabloul sunt la înălţimea *h*. Pentru a privi tabloul cât mai



bine, ar trebui aleasă o distanţă D de tablou aşà fel încât unghiul α (vezi figura), sub care se vede tabloul, să fie maxim.

Fie :

$$H = \overline{AB} \quad , \quad h = \overline{O'O} \quad , \quad I = \overline{BC}$$

şi

$$D = \overline{AO'}.$$

Din figură observăm că :

$$\begin{aligned} tg\alpha &= tg[(\alpha + \gamma) - \gamma] \\ &= \frac{tg(\alpha + \gamma) - tg\gamma}{1 + tg(\alpha + \gamma)\, tg\gamma} \end{aligned}$$

unde :

$$\begin{cases} tg(\alpha + \gamma) = \dfrac{H + I - h}{D} \\ tg\gamma = \dfrac{H - h}{D} \end{cases}$$

Deci :

1) $$tg\alpha = \frac{D \cdot I}{D^2 + (H - h)(H + I - h)}.$$

Trebuie găsit acum valoarea lui D astfel încât α să fie cât mai mare, ceeace revine în cazul maximului lui $tg\alpha$. Ori anulând derivata fracţiunei din membrul al II-lea, găsim singura soluţie admisibilă :

2) $$D = \sqrt{(H - h)(H + I - h)}.$$

In cazul problemei 3890, avem : $H = 2$ m. şi $I = 1$ m.

deci :

$$D = \sqrt{(2 - h)(3 - h)}.$$

De unde pentru diverse înălţimi ale ochilor celor ce privesc, deducem distanţa. Astfel — spre exemplu — evem :

h	1,50	1,60	1,70	1,80
D	0,87	0,75	0,62	0,49

Soluţia II-a. Pentru ca două puncte să poată fi văzute separat, trebuie ca unghiul format de razele ce pornesc dela centrul

optic (ochiul), să rămână superior unei anumite limite. Acel unghiu se numeşte *diametru aparent,* şi are valoarea $\left(\frac{D}{d}\right)$, unde D este depărtarea dela punct la ochi şi d depărtarea între cele două puncte. Practic acest diametru aparent se ia egal cu 5′.

In cazul figurei avem:

$$d = \overline{BC} \quad \text{şi} \quad D = \overline{OB'}$$

deci:

$$\frac{\overline{OB'}}{\overline{BC'}} = 5.$$

Insă:

$$\frac{\overline{BC'}}{\overline{OB'}} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Deci ţinând seamă de relaţia 1), avem:

$$\frac{D^2 + (H - h)(H + l - h)}{D \cdot l} = 5$$

de unde:

$$3) \quad D = \frac{5 \cdot l \pm \sqrt{25 \cdot l^2 - 4(H - h)(H + l - h)}}{2}.$$

In cazul problemei 3890, avem:

$$D = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4(2 - h)(3 - h)}}{2}.$$

Adică:

h	1,50	1,60	1,70	1,80
D	4,85	4,87	4,90	4,95
	0,16	0,13	0,08	0,05

Soluţia III-a. Presupunându-se tabloul înclinat de un unghiu ω faţă de perete şi admiţându-se că tabloul este bine privit când

ochii se găsesc pe prelungirea perpendicularei tabloului, atunci observând figura în care socotim — în acest caz — $\overline{BC'} = l$, găsim:

$$4) \qquad D = \frac{l}{2\sin\omega} + \frac{H - h}{\operatorname{tg}\omega}.$$

Sau în cazul problemei 3890,

$$D = \frac{1}{2\sin\omega} + \frac{2 - h}{\operatorname{tg}\omega}.$$

Iar pentru câteva înclinări avem:

ω \ h	1,50	1,60	1,70	1,80
10^0	5,45	4,88	4,31	3,74
20^0	2,83	2,56	2,28	2,01
30^0	1,86	1,70	1,54	1,35

Observaţiuni:

1) Au rezolvat problema 3890 D-nii: Virgil C. Popescu (student Toulouse) dând o soluţie aproximativă în genul soluţiei II-a şi D-l Petre I. Ghişoiu (student Şc. Politecnică, Bucureşti) dând soluţia III-a, fără diversele calcule în cazurile particulare.

2) D-l V. C. Popescu arată că distanţa poate varia, căci cu ajutorul fenomenului de acomodaţie, ochiul îşi măreşte puterea de convergenţă şi imaginea se formează tot pe retină. Aceasta în cazul unui ochiu normal. In cazul ochilor anormali distanţa este în raport şi de formarea imaginei pe retină, când nu intervin ochelarii corectori.

3) Valoarea practică a diametrului aparent de 5′ este indicată de către D-l V. C. Popescu. Dacă această valoare ar diferi, şi admitem că ar fi ε atunci:

$$D = \frac{\varepsilon . l \pm \sqrt{\varepsilon^2 . l^2 - 4(H - h)(H + l - h)}}{2}.$$

4) Am dat trei soluţii cu totul diferite, şi vom mai publică şi alte soluţiuni interesante, dacă vom primi, în scopul de a discută asemenea probleme fizico-matematice, sub toate formele posibile.

I. L.

PROBLEMA 3947. *Se dă ecuaţia*

$$3m^2x^2 - (m-3)x + m^2 = 0.$$

Ce valori trebuie să dăm lui m *pentru ca o rădăcină să fie de trei ori mai mică decât cealaltă.*

COLONEL G. I. LITEANU.

Soluţie dată de D-l HARALAMBIE P. IONESCU-BISS (Student, Bucureşti).

Fie mai general ecuaţia

$$ax^2 + bx + c = 0$$

şi se cere relaţia dintre coeficienţi, când rădăcinile sunt într'un raport $\frac{\alpha}{\beta}$.

Avem

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_1x_2 = \frac{c}{a} .$$

Cum

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{sau} \quad x_1 = \frac{\alpha}{\beta}x_2$$

avem

$$\left(\frac{\alpha}{\beta} + 1\right)x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_2^2 = \frac{c\beta}{a\alpha} \quad \therefore \quad x_2 = \pm\sqrt{\frac{c\beta}{a\alpha}},$$

care introdusă în prima dă relaţia

$$\pm\left(\frac{\alpha}{\beta} + 1\right)\sqrt{\frac{c\beta}{a\alpha}} = -\frac{b}{a} .$$

In cazul problemei avem:

$\alpha = 1$, $\beta = 3$, $a = 3m^2$, $c = m^2$, $b = -(m-3)$.

Deci

$$4m^2 = \pm(m-3).$$

De unde ecuaţiile

$$4m^2 - m + 3 = 0 \quad , \quad 4m^2 + m - 3 = 0$$

având ca rădăcini

$$m_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{-47}}{8}, \text{ imaginare}$$

$$m_3 = -1,$$

$$m_4 = \frac{3}{4} .$$

Au rezolvat problema: D-şoara ELEONORA ANTONIU (Cluj) şi Domnii: N. N. ALDEA, A. M. BUŢAN, VL. I. CRIVĂŢ, I. CURCHI, I. DEAC, N. A. DOBROGEANU, ION LENCÓ, RADU N. PATRAULEA, SUB.-LT. FL. RADU, TITU G. VELICESCU, N. N. VELICESCU, M. D. MOTOC, N. N. MIHĂILEANU, EM. MEREUŢĂ, SUB.-LT. I. A. EUGENIU.

Ulterior s'au primit soluţii dela D-nii: GH. A. CIOCOIU, C. CINSKY, AUREL CONSTANTINESCU, ŞT. CUCIUREANU, P. I. GHIŞOIU, I. A. GURAN, GH. OPRESCU, C. PALIŢA, I. C. PAREPEANU (cu o generalizare), TR. PUTA, FL. V. N. ŞERBĂNESCU, V. VASU, M. VELEA şi N. GLUŞCO.

*EXERCIŢII

25. Se cere valoarea expresiunii:

$$P = \frac{1.3.7.14\ldots}{5^{1-n}},$$

la numărător fiind $(n-1)$ factori.

ION MĂTIEŞ.

R. Se observă că:

$$P = 5^{n-1}(1.3.7\ldots) = 5.15.35\ldots = C_5^4 . C_6^4 . C_7^4 \ldots C_{n+3}^4,$$

sau

$$P = \frac{(2.3.4.5)(3.4.5.6)(4.5.6.7)\ldots[n(n+1)(n+2)(n+3)]}{(4!)^{n-1}}$$

$$= \frac{(2.3.4.5\ldots n)(3.4.5.6\ldots n+1)(4.5\ldots n+2)(5.6\ldots n+3)}{(4!)^{n-1}},$$

sau:

$$P = \frac{n!\,(n+1)!\,(n+2)!\,(n+3)!}{(3!)!\,(4!)^n}.$$

26. Se cere pătratul de forma *abcddd*, ştiind că *b, a, c* sunt cifre consecutive crescătoare.

I. PAREPEANU.

R. Ţinând seama de forma numărului cerut şi de ultimele patru cifre ale unui pătrat perfect („G. M", XXXV, 134), deducem singura soluţie $213444 = 462^2$.

27. Să se găsiască un pătrat de forma *abcbc*, ştiind că cifra *a* şi grupele *bc* sunt pătrate perfecte şi că suma cifrelor este un cub perfect.

GH. APOSTOLESCU.

R. Se observă că $a = 1, 4, 9$, iar $bc = 16, 25, 36, 49, 64, 81$. Făcând combinaţiile posibile şi eliminând numerile pentru care suma cifrelor nu este un cub perfect, rămân 93636, 14949, 98181, din care numai $93636 = 306^2$.

PROBLEME PROPUSE

3971. *a, b, c* fiind 3 cifre diferite una de alta, cel mai mare număr de forma *abca* în care $b + c = 12a$ sau $b - c = 6a$, ca şi cel mai mare număr impar *abcd* în care $b + c = 6(a + d)$, este:

primul: cel mai mare dintre cele mai mici numere în cari b = mult. c, sau bc = mult. 31 şi cel mai mic dintre acelea în cari bca = mult. 7 şi 19;

celalt: cel mai mare dintre cele mai mici numere în cari bcd = mult. 7 şi 19, sau cel mai mic dintre acelea în cari $b - c = 3(a + d)$.

Dacă nu se pune condiţia de imparitate, *abcd* este cel mai mic număr (prim) în care bcd = mult. 7 şi 19, iar cd un număr prim.

LT.-COLONEL G. POTOPEANU.

*3972. Un funcţionar depune la o bancă sumele pe care le are disponibile şi poliţele pe care le are de încasat, şi împrumută de acolo sumele de care are nevoie. Pentru sumele, pe care le depune la Bancă, i se dă o dobândă de 8% însă numai cu începere dela aceiaşi zi a lunii următoare şi numai pentru miile de lei întregi pe care le are depuse. Pentru sumele ce împrumută dela Bancă, i se socoteşte 16% dobândă la suma întreagă cu începere chiar din ziua în care rămâne dator Băncii. Acelaşi procent de 16% se aplică şi la sconturi. Dobânda nu se adaogă la Capitaluri decât la încheierea de conturi sau la finele anului. La 1 Ianuarie 1930 funcţionarul aveà depusă de mai multe luni, suma de 3000 lei pentru care şi-a luat dobânzile cuvenite până atunci. La 2 Februarie depune la Bancă, pentru încasare, o poliţă de 8100 lei cu scadenţa la 2 Iulie 1930. La 20 Martie ia dela Bancă 15000 lei pentru a-şi plăti chiria. La 19 Aprilie depune la Bancă 8040 lei.

Se cere situaţia contului la 1 Iunie 1930.

I. IONESCU.

*3973. Care sunt puterile a 6-sea, mai mici ca 10000, pe care scriindu-le în alte sisteme de numeraţiune şi privite atunci ca scrise în sistemul zecimal, par a fi patrate sau cuburi.

M. A. FAŢE.

*3974. Să însemnăm în triunghiul ABC cu A_h, B_h, C_h picioarele înălţimilor, cu A_m, B_m, C_m mijloacele laturilor $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ şi cu O centrul cercului circumscris ABC. Perechile de drepte $(B_h A_m, B_h A_h)$ şi $(C_h A_h, C_h A_m)$ determină pe înălţimile CC_h şi BB_h respectiv segmentele $\overline{M_c N_c}$ şi $\overline{M_b N_b}$.

Să se demonstreze relațiunea

$$(R) \qquad \frac{\overline{M_b N_b}}{\overline{OB_m}} = \frac{\overline{M_c N_c}}{\overline{OC_m}} .$$

O. N. Țino.

3975. Fie A', B', C' mijloacele laturilor unui triunghiu ABC și M un punct în planul acestui triunghiu. Dreptele A'M, B'M și C'M taie respectiv pe B'C', C'A' și A'B' în A'', B'' și C''. Fie încă A_1, A_2 punctele unde dreptele A''B'' și A''C'' taie pe BC; B_1, B_2 și C_1, C_2 analoagele lor. Să se demonstreze că dacă dreptele AA_1, BB_1 și CC_1 sunt concurente și dreptele AA_2, BB_2 și CC_2 vor fi concurente.

Gh. Th. Gheorghiu-Gladiș.

3976. Se consideră un triunghiu ABC și fie P și Q punctele lui Apollonius, relative acestui triunghiu. Fie de asemeni, A_p și A_q cele de al doilea puncte de intersecție ale cercului APQ respectiv cu cercurile PBC și QBC. Se determină, în mod analog, punctele B_p și B_q, C_p și C_q. Să se demonstreze că cercurile circumscrise triunghiurilor ABC, $A_p B_p C_p$ și $A_q B_q C_q$ aparțin fascicolului punctual de cercuri, ce are ca puncte limită punctele P și Q.

Șerban Gheorghiu.

3977. Intr'un triunghiu oarecare mijloacele simedianelor exterioare sunt trei puncte pe o dreaptă.

Cezar Coșniță.

3978. Să se găsiască condiția ca ecuațiile

$$x^2 + px + q = 0 \quad , \quad x^3 + px + q = 0$$

să aibă o rădăcină comună și să se calculeze rădăcina comună.

M. Velea.

*3979. Să se rezolve ecuația:

$$\sin 7\theta + 5 \sin 5\theta - 10 \sin 3\theta + 16 \sin \theta = 0.$$

N. Ciorănescu.

3980. In triunghiul ABC se cunoaște latura $BC = a$, diferența laturilor $b - c = \frac{a}{2}$ și se știe că medianele CC', BB' corespunzătoare laturilor b și c verifică relația $CC' = k.\ BB'$, k fiind un parametru. Să se rezolve triunghiul ABC. Discuție. Să se afle unghiurile triunghiului ABC pentru cea mai mică valoare posibilă a lui k.

N. Abramescu.

Articolele, notele şi problemele însemnate cu * se referă la matematicile elementare (cursul de liceu).

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Aldea N. N. (3813, 15, 37, 99, 3905, 12, 32, 35, 36, 39, 43, 53, 56, 65, 66, 68); *Alexiu I.* (3968); *Antoniu Eleonora* (3136, 882, 968); *Arghiriade Em.* (N); *Buta Tr.* (3953); *Cinsky C.* (3947, 57); *Ciocoiu A. Gh.* (3943, 47, 61); *Constantinescu C. A.* (3817, 18, 24, 26, 39, 47, 54, 68, 89, 95, 912, 22, 56, 63); *Craiu N. I.* (3664); *Crivăţ I. V.* (3813, 17, 24, 939, 43, 56, 63, P); *Cuciureanu Şt.* (3947); *Curchi I.* (3955); *Deac I.* (3956, E, P); *Dobrogeanu A. N.* (3868, 956); *Epuran A. I.* (3842, 68, 95, 936, 43); *Florescu B. I.* (2414); *Gheorghiu C. Ad.* (2392, 3467, 509, 74, 640, 760, 815, P); *Ghişoiu I. P.* (3883, 912, 47, 55, 56, 63, 65, 67, 68, 69); *Gluşco N.* (3947, 48, 67); *Guran A. I.* (3947); *Ionescu-Bis P. H.* (3956, E); *Ionescu I. V.* (3899, 943, 56, 61, 63, 67, 68); *Lenco I.* (3948); *Mereuţă Em.* (3878, 956, 61, 63, 68); *Mihăileanu N. N.* (3938); *Murăroiu I.* (3589, 770, 888); *Natorniţă I. C.* (3868, 72, 943); *Negrea A. Mircea-Leonte* (3956, 65); *Nicolau-Dobridor I.* (A); *Niculescu A.* (A); *Oprescu Gh.* (3882, 88, 95, 925, 26, 47); *Paliţa C.* (3947, 56); *Parepeanu C. I.* (3894, 928, 43, 47, 56, 61, 68); *Patraulea R.* (3943); *Popa G. I.* (3943, 56); *Puta Tr.* (3936, 39, 47, 56); *Şerban I. C.* (3943); *Şerbănescu N. V. Fl.* (3947, 67, 68); *Simionescu D. Gh.* (P); *Stan I. Aurelian Sublt.* (3882, 89, 926, 28, 36, 39, 56, 65, 67, 68, E, N, P, R); *Vasiliu C. I.* (2144, 45, 795, 906, 3000, 19, 90, 228, 302, 457, 95, E); *Vasu Vasile* (3936, 39, 47, 53, 56, 63, 65, 67, 68); *Velea M.* (3939, 47, 56, 61, 62, 65, 68, E); *Velicescu Gh. Titu* (3818, 26, 39, 68, 99, 943, 48, 55, 56); *Vissarion C. I. V.* (3967, 68); *Zamfirescu Gh. I. Sublt.* (3332, 459, 88, 551, 936, P).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac deasemenea pe foaie aparte. *Foile vor aveà format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani completi broșați cu prețul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX și XXI care se vând cu prețul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV și XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecțiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția IV revăzută și adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu și G. Țițeica,** *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu și Șt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediția II revăzută și adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicațiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediția III-a revăzută și îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Țițeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* (Ediția II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Regiei Publice Comerciale «Monitorul Oficial și Imprimeriile Statului», B-dul Elisabeta 29, București I.

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călușei 23, București 4.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXVI.

NUMĂRUL 6. — FEVRUARIE 1931.

SUMARUL

1. Un răspuns şi o generalizare . . . . . † *V. Cristescu.*
2. Asupra dreptelor lui Simson . . . . . *N. Teodorescu.*
3. Note matematice: 20 — 24.
4. Bibliografie.
5. Cereri: 201.
6. Diverse.
7. Probleme rezolvate: 1364, 3302, 3518, 3740, 3753, 3759, 3868, 3899, 3901, 3957, 3962.
8. Exerciţii: 28 — 29.
9. Probleme propuse: 3981 — 3990.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

REGIA M. O., IMPRIMERIA NAŢIONALĂ

1931

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXXVI se compune din D-nii: Colonel **Gh. I. Liteanu** dela Marele Stat Major al Armatei; **G. A. Nichifor**, Doctor în Matematici, Conferenţiar la Universitatea din Bucureşti; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Regiei Publice Comerciale «Monitorul Oficial şi Imprimeriile Statului», Cassier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui GH. ILIESCU, Inginer, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela „*Gazeta Matematică*" („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 62, 78, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 310, 33, 55, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 82, 553, 87, 650, 79, 711, 29, 53, 64, 807, 76, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 233, 338, 53, 82, 405, 22, 30, 39, 56, 66, 77, 502, 03, 45, 56, 77, 80, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 65, 84, 92, 95, 709, 13, 17, 35, 58, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 56, 3005, 45, 69, 81, 127, 50, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 07, 08, 09, 10, 16, 18, 20, 50, 61, 79, 405, 24, 25, 72, 89, 91, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 20, 22, 27, 32, 47, 57, 65, 79, 81, 94, 99, 700, 03, 20, 33, 36, 80, 84, 93, 99, 804, 08, 10, 29, 35, 36, 44, 45, 48, 53, 64, 70, 80, 96, 98, 908, 09, 13, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 33, 34, 37, 40, 44, 49, 50, 51, 59, 64, 71, 72, 73, 75, 76, 77, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3203, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procurà dela „*Gazeta Matematică*" („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

UN RĂSPUNS ŞI O GENERALIZARE[1])

Din soluţia dată de mine problemei 2403 în *Gazeta Matematică* Vol. XXVII la pagina 284 şi următoarele, se poate observà că spre a simplificà calculele, m'am servit de relaţiile[2]):

$$(4)\quad \operatorname{tg}A\operatorname{tg}B + \operatorname{tg}B\operatorname{tg}C + \operatorname{tg}C\operatorname{tg}A = 1 + \frac{1}{\cos A\cos B\cos C}$$

$$(5)\quad \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A\cos B\cos C$$

care au loc între unghiurile unui triunghiu şi apoi am înlocuit cosinusurile şi sinusurile în funcţie de tangente.

Zic mai întâi că am dreptul să mă servesc de relaţiile (4) şi (5), deoarece enunţul problemei 2403 spune „*Se cunosc următoarele relaţiuni între cosinusurile şi sinusurile unghiurilor unui triunghiu...*, deci mă pot servi de orice relaţiune care are loc între unghiurile unui triunghiu.

Apoi relaţiunile (4) şi (5) nu cer cunoaşterea relaţiunei

$$(3)\quad \operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C = \operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C$$

căci demonstrarea acestei relaţiuni se bazează numai pe egalitatea

$$A + B + C = 180^0.$$

(A se vedeà *Culegere de Probleme, Trigonometrie,* XVII 3 şi 12).

Este adevărat că dacă înlocuim în relaţiunile (4) şi (5) cosinusurile şi sinusurile în funcţie de tangente, ambele relaţiuni ne conduc la relaţiunea (3), după cum ori şi ce relaţiune simetrică între liniile trigonometrice ale unghiurilor unui triunghiu, dacă le înlocuim în funcţie de tangente, trebuie să ne conducă la relaţiunea (3).

Relaţiunile (4) şi (5) conţin însă pe (3) sub formă implicită şi servindu-mă de ele nu am introdus în relaţiunile propuse (1) şi (2) pe (3) ca soluţie străină, deoarece relaţiunile propuse conţinând şi ele pe (3) sub formă implicită, întrebuinţarea relaţiunilor (4) şi

1) A se vedeà articolul **O problemă de trigonometrie** pagina 125.

2) Numerotarea formulelor comune ambelor articole, este cea din articolul D-lui Gh. Buiciu. Pentru celelalte formule, numerotarea este în continuare.

† V. C.

(5) la simplificarea relaţiunilor (1) şi (2) ne-ar fi condus la egalităţi sau relaţii identic nule.

D-l Gh. Buicliu în soluţia sa, trece *deadreptul la tangente* fără a mai face uz de vre-o relaţiune între liniile trigonometrice ale unghiurilor unui triunghiu.

Recunosc că metoda sa este mai directă, susceptibilă de generalizare şi poate mai în spiritul problemei 2403.

D-sa întrebuinţează drumul şi prescurtările de cari m'am servit eu, şi arată că ambele relaţiuni (1) şi (2) se reduc la relaţiunea

$$(10) \quad (u - w)\,[(u + w)\,(u^2 - w^2 - 4v) + 8w] = 0.$$

Insă până ajungi aici, calculele sunt foarte lungi şi laborioase, după cum oricine se poate încredinţă urmărindu-le. De aceea eu am părăsit această cale şi am simplificat calculele, servindu-mă de relaţiunile (4) şi (5), fără ca prin aceasta să mă îndepărtez de ceea ce-mi dă drept enunţul problemei.

Relaţiunea (10) se descompune în

$$(11) \qquad u - w = 0$$

$$(12) \qquad (u + w)\,(u^2 - w^2 - 4v) + 8w = 0.$$

D-l Gh. Buicliu spune apoi: «*Prin urmare dacă în* (1) *şi* (2), *în care* A, B, C **sunt unghiurile unui triunghiu,** *se înlocuesc cosinusurile şi sinusurile în funcţie de tangente, se deduce relaţiunea* (10), *adică una din relaţiunile* (11) *şi* (12) *sau simultan ambele aceste relaţiuni*».

Se poate însă lesne vedeà *à priori* că egalităţile (11) şi (12) nu pot există simultan de cât dacă am supune unghiurile A, B, C la unele ecuaţii de condiţii. Afară de aceasta, s'ar puteà întâmplà ca una din aceste egalităţi să fie o soluţie străină problemei, introdusă în cursul calculelor printr'o ridicare la patrat, sau un alt mod.

D-l Gh. Buicliu, verifică că relaţiunea (11), care e tot una cu (3), are loc între unghiurile unui triunghiu.

Cât priveşte egalitatea (12), D-sa servindu-se chiar de relaţia (11) care-i tot una cu (3), verifică că egalitatea (12) nu poate aveà loc între unghiurile unui triunghiu.

Prin urmare în soluţia sa, D-l Gh. Buicliu spre a îndepărtà egalitatea (12) se serveşte chiar de relaţia (3), iar soluţiei mele îi face acuzarea că utilizarea relaţiunilor (4) şi (5) ar puteà cere cu-

noașterea egalității (3). Și încă prin acest mijloc D-sa ajunge numai să arate că egalitatea (12) nu poate aveà loc între unghiurile unui triunghiu; cu alte cuvinte, chiar prin acest mijloc, D-sa arată ceeace egalitatea (12) nu reprezintă, fără a puteà arătà ceeace în adevăr reprezintă egalitatea (12). In cât din acest punct de vedere soluția D-sale are o lacună.

Modul însă, de a procedà al D-lui Gh. Buicliu are avantajul că ne permite a generalizà problema 2403 și a rezolvà problema generală cu următorul enunț:

Se cunosc următoarele relațiuni între cosinusurile și sinusurile a trei unghiuri oarecare A, B, C:

$$(1)\quad \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C = 1$$

$$(1')\quad \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C - 2\cos A \cos B \cos C = 1$$

$$(2)\quad \sin^4 A + \sin^4 B + \sin^4 C - 2\sin^2 A \sin^2 B - 2\sin^2 B \sin^2 C - 2\sin^2 C \sin^2 A + 4\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C = 0$$

și se cere să se găsească, înlocuind cosinusurile și sinusurile în funcție de tangentele trigonometrice, care este relația dintre unghiuri.

Voi procedà la fel cu D-l Gh. Buicliu, adică voi trece deadreptul dela cosinusuri și sinusuri la tangente și voi urmări întocmai calculele D-sale. Găsesc atunci că fiecare din relațiunile (1), (1') și (2) conduce la relațiunea

$$(10)\quad (u - w)\,[(u + w)\,(u^2 - w^2 - 4v) + 8w)] = 0$$

care se descompune în următoarele două

$$(11)\qquad u - w = 0.$$

$$(12)\qquad (u + w)\,(u^2 - w^2 - 4v) + 8w = 0.$$

Egalitatea (11) ne dă următoarea relațiune între unghiuri.
(A se vedea *Culegere de Probleme, Trigonometria,* VII, 27):

$$A + B + C = n\pi.$$

Să vedem acum la ce relațiune între unghiuri ne conduce egalitatea (12).

Observăm că (12) se poate scrie succesiv:

$$(u + w)\,[(u + w)^2 - 2uw - 2w^2 - 4v] + 8w = 0$$

$$(u + w)\,[(u + w)^2 - 2w(u + w) - 4v] + 8w = 0$$

$$(u+w)\,[(u+w)^2 - 2w(u+w) - 2u(u+w) + 2u(u+w) - 4v] + 8w = 0$$

$$(u+w)\,[(u + w)^2 - 2\,(v + w)^2 + 2u\,(u + w) - 4v] + 8w = 0$$

$$(u + w)[-(u + w)^2 + 2u(u + w) - 4v] + 8w = 0.$$

$$(13)\quad (u + w)^3 - 2u(u + w)^2 + 4v(u + w) - 8w = 0.$$

Să însemnăm cu P produsul

$$[(u + w) - 2x]\,[(u + w) - 2y]\,[(u + w) - 2z]$$

şi să dezvoltăm acest produs după puterile lui $(u + w)$ găsim

$$P = (u+w)^3 - 2(u+w)^2(x+y+z) + 4(u+w)(xy+yz+zx) - 8xyz$$

de unde ţinând seamă de (6) dela pagina 126:

$$P = (u + w)^3 - 2u(u + w)^2 + 4v(u + w) - 8w.$$

Rezultă atunci în virtutea relaţiunei (13) că P este nul.

Prin urmare pentru ca condiţia (12) să fie îndeplinită trebuie şi e suficient ca una oarecare din expresiunile

$$u + w - 2x \quad ; \quad u + w - 2y \quad ; \quad u + w - 2z$$

să fie nulă. Relaţiunea (12) ne conduce deci la una oarecare din relaţiunile

$$(14)\quad u + w - 2x = 0 \quad \text{sau} \quad -x + y + z = -xyz$$

$$(15)\quad u + w - 2y = 0 \quad \text{„} \quad x - y + z = -xyz$$

$$(16)\quad u + w - 2z = 0 \quad \text{„} \quad x + y - z = -xyz.$$

Să considerăm spre exemplu relaţiunea (14), care nu este de cât relaţiunea

$$-\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C = -\operatorname{tg}A\,\operatorname{tg}B\,\operatorname{tg}C$$

şi care se mai poate scrie

$$\operatorname{tg}(-A) + \operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C = \operatorname{tg}(-A)\,\operatorname{tg}B\,\operatorname{tg}C.$$

Această egalitate ne dă următoarea relaţiune între unghiuri. (A se vedeà *Culegere de Probleme, Trigonometrie,* VIII, 27):

$$(17)\qquad -A + B + C = n\pi.$$

In mod analog, relaţiunile (15) şi (16) ne dau respectiv

$$A - B + C = n\pi, \tag{18}$$

$$A + B - C = n\pi. \tag{19}$$

In rezumat, dacă între trei unghiuri oarecare A, B, C există una oarecare din relaţiunile (1), (1') sau (2), atunci *ar trebui* ca între acele unghiuri să avem una oarecare din relaţiunile (17), (18) sau (19) în care n este un întreg pozitiv sau negativ.

Se ştie însă (*Culegere de Probleme, Trigonometrie,* VIII, 29) că dacă între trei unghiuri oarecare există relaţiunea (1) şi dacă căutăm direct (adică fără a înlocui cosinusurile în funcţie de tangente) care este relaţia dintre unghiuri, atunci găsim că între unghiuri trebuie să avem una oarecare din relaţiunile

$$(20)\quad \begin{cases} A + B + C = (2n+1)\pi \\ -A + B + C = (2n+1)\pi \\ A - B + C = (2n+1)\pi \\ A + B - C = (2n+1)\pi. \end{cases}$$

In mod analog relaţiunea (1') ne dă, prin metoda directă, una din următoarele relaţii între unghiuri (a se compară, *Culegere de Probleme, Trigonometrie*, VII. 27 şi VIII. 27):

$$(21)\quad \begin{cases} A + B + C = 2n\pi \\ -A + B + C = 2n\pi \\ A - B + C = 2n\pi \\ A + B - C = 2n\pi. \end{cases}$$

Ne întrebăm atunci, cum se explică diferenţa între rezultatele obţinute prin metoda directă şi metoda prin tangente, căci formulele (17), (18), (19) sunt mai generale şi cuprind şi pe (20) şi pe (21).

Explicaţia este următoarea.

Procedând prin metoda tangentelor, când trecem dela egalitatea

$$2 + x^2 + y^2 + z^2 - x^2y^2z^2 = -2\,\Sigma\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}$$

la egalitatea

$$(9)\quad (2+x^2+y^2+z^2-x^2y^2z^2)^2 = 4(1+x^2+y^2+z^2+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2z^2$$

după cum se poate observà din calculele D-lui Gh. Buicliu, trebuie să ridicăm la patrat ambii membri ai egalităţii precedente lui (9), ceeace face că ori pornim dela (1) ori pornim dela (1'), ajungem în ambele cazuri tot la (9). Prin această ridicare la patrat se introduc deci soluţii străine şi anume dacă plecăm dela relaţia (1) se introduc ca soluţii străine soluţiile ce corespund relaţiei (1'), iar dacă plecăm dela (1') se introduc soluţiile relaţiei (1).

Rezultă de aici că relaţiei (1) îi convin în formulele (17), (18) şi (19) numai cazul când n este nepereche iar relaţiei (1') îi convine numai cazul când n este pereche.

Relaţiei (2) îi convine însă atât cazul când n este nepereche, cât şi cazul când n este pereche, adică formulele (17), (18) şi (19) aşa cum sunt scrise.

Pentru relaţia (2) explicaţia este următoarea:

Relaţia (2) conţine şi pe (1) şi pe (1') căci ea se poate obţine înmulţind membru cu membru aceste două relaţiuni puse sub forma:

$$(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C - 1) + 2\cos A \cos B \cos C = 0$$

$$(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C - 1) - 2\cos A \cos B \cos C = 0$$

şi neîntrebuinţând în restul calculelor decât formula fundamentală

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1.$$

Obţinem astfel succesiv:

$$(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C)^2 - 4\cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C = 0.$$

$$(22)\quad [2-(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)]^2-4(1-\sin^2 A)(1-\sin^2 B)(1-\sin^2 C)=0.$$

Dacă efectuăm calculele dăm tocmai peste relaţiunea (2).

Faptul că relaţia (2) este produsul relaţiunilor (1) şi (1') ne scuteşte de a mai face calcule pentru relaţia (2) şi putem scrie pentru ea deadreptul relaţia (10). De altfel e destul să privim relaţia (9) şi (22) pentru a vedeà că în fond ele sunt identice, cu singura deosebire că în (9) s'au înlocuit sinusurile în funcţie de tangente şi s'au alungat numitorii.

† V. Cristescu.

ASUPRA DREPTELOR LUI SIMSON

Voiu încercà să fac, o corelaţiune între câteva drepte ale lui SIMSON.

Notez cu: ABC triunghiul de referinţă; A'B'C' triunghiul său ortic; $A_1B_1C_1$ triunghiul său complimentar, A_2, B_2, C_2 punctele lui EULER ale înălţimilor; O, O_9, H centrul cercului circumscris, centrul cercului celor 9 puncte şi ortocentrul.

(1) *Dreptele lui* SIMSON *ale punctelor* A_1, B_1, C_1 *în raport cu triunghiul* A'B'C' *concură în* T, *centrul cercului lui* TAYLOR *al triunghiului* ABC.

Punctele A_1 A_2 sunt diametral opuse in cercul O_9; atunci proecţia, *a,* a lui A_1 pe B'C' este mijlocul lui B'C'. A_2 fiind punctul unde proecţia lui A_1 pe B'C' taie cercul circumscris, dreapta lui SIMSON a lui A_1 în raport A'B'C' va fi paralelă cu A_2A' care uneşte punctul A_2 cu vârful A' opus lui B'C' (după una din proprietăţile cunoscute ale dreptei lui SIMSON). Fie *b, c* mijloacele dreptelor C'A', A'B'. Triunghiul *abc* este complimentarul lui A'B'C'. Dreptele lui SIMSON considerate sunt bisectoare în acest triunghiu şi se ştie (ROUCHÉ et COMBEROUSSE Géométrie du triangle) că ele concură în T, centrul cercului lui TAYLOR al lui ABC.

(2) *Dreptele lui* SIMSON *ale punctelor* A_2, B_2, C_2 *în raport cu* A'B'C' *formează un triunghiu* $S_1S_2S_3$ *ortologic şi omotetic cu* ABC *şi egal cu* $A_1B_1C_1$.

Laturile lui $S_1S_2S_3$ trec prin *a, b, c* mijloacele laturilor lui A'B'C' deoarece proiecţiile respective ale lui A_2, B_2, C_2 pe B'C', C'A', A'B' cad în aceste puncte. Dar dreptele lui SIMSON ale punctelor A_1 şi A_2, diametral opuse, în raport cu acelaş triunghiu, trebuie să fie perpendiculare şi deci S_2S_3 e perpendiculară pe aT; aşa dar S_2S_3 e perpendiculară pe A'A, paralela ei.

Rezultă că S_2S_3 este paralelă cu BC şi deci triunghiurile ABC şi $S_1S_2S_3$ sunt omotetice. Perpendicularele lăsate din A, B, C pe S_2S_3, S_3S_1, S_1S_2 concură în H, ca înălţimi în ABC, şi deci triunghiurile ABC şi $S_1S_2S_3$ sunt şi ortologice.

Unghiul $\sphericalangle$ baS_3 este egal cu $\sphericalangle$ B'A'C, egal deci şi cu A, având laturile paralele şi îndreptate în sens contrar.

Rezultă că *abc* este triunghiul ortic al lui $S_1S_2S_3$ şi fiind egal cu triunghiul ortic al lui $A_1B_1C_1$, urmează că $S_1S_2S_3$ este egal cu $A_1B_1C_1$.

(3) *Centrul cercului lui* TAYLOR *al lui* ABC *este ortocentrul lui* $S_1S_2S_3$.

Reese din faptul că T este centrul cercului înscris în *abc*, triunghiul ortic al lui $S_1S_2S_3$.

Urmează că dreptele lui SIMSON ale punctelor A_1, B_1, C_1 în raport cu A'B'C' sunt înălțimi în $S_1S_2S_3$.

(4) *Dreptele* AS_1, BS_2, CS_3 *concură în* R, *centrul de gravitate al lui* A'B C'.

Intr'adevăr avem $S_1a = \frac{1}{2}$ AA'. Din triunghiurile asemenea aS_1R și A'AR avem:

$$\frac{aR}{RA'} = \frac{aS_1}{AA'} = \frac{1}{2},$$

deci R este la 2/3 a distanței dela A' și este prin urmare centrul de gravitate al lui A'B'C'.

(5) *Dreptele lui* SIMSON Σ_a, Σ_b, Σ_c *respectiv ale punctelor* A', B', C' *în raport cu triunghiul* $A_1B_1C_1$ *concură în* T, *centrul cercului lui* TAYLOR *al triunghiului* ABC.

(Proprietate ce face obiectul problemei 3346 din «*Gazeta Matematică*», anul 31 și asupra căreia nu insist).

(6) *Dreptele lui* SIMSON *ale punctelor* A_1, B_1, C_1 *în raport cu triunghiul* A B_2C_2 *sunt chiar laturile acestui triunghiu* $A_2B_2C_2$.

A_1 fiind diametrul opus lui A_2, proiecțiile sale pe A_2B_2 și A_2C_2 cad respectiv în B_2 și C_2, deci B_2C_2 este dreapta lui SIMSON al lui A_1. In acelaș mod deducem:

(7) *Dreptele lui* SIMSON *ale punctelor* A', B', C' *în raport cu triunghiul* $A_1B_1C_1$ *sunt chiar laturile triunghiului* $A_1B_1C_1$.

(8) *Dreptele lui* SIMSON *ale punctelor* A', B', C' *în raport cu triunghiul* A B_2C_2 *formează un triunghiu* S_a S_b S_c *omotetic și egal cu* A'B'C'.

Unghiul făcut de S_b S_c cu B_2C_2 are ca măsură jumătatea arcului A_1A' deoarece ele sunt dreptele lui SIMSON ale acestor puncte în raport cu același triunghiu $A_2B_2C_2$. Acest unghiu este egal cu $\sphericalangle C - \sphericalangle B$, ceeace se poate arătă ușor (în tr. isoscel $A_1B'C$) și deci este egal cu unghiul făcut de BC, (sau B_2C_2) cu B'C'. Deci rezultă că S_b S_c $\parallel$ B'C'. Fie α punctul unde S_b S_c taie pe B_2C_2 și β,γ punctele analoage. Avem $A'\alpha = \alpha H$ etc., deci $\alpha\beta\gamma$ este omotetic cu A'B'C' și egal cu complimentarul său. Rezultă însă că tot $\alpha\beta\gamma$ este și complimentarul lui

$S_a S_b S_c$ (sau acesta anticomplimentarul său), deci $S_a S_b S_c$ este şi egal cu A'B'C'.

(9) *Centrul cercului lui* TAYLOR *al lui* ABC *este centrul cercului înscris în* $S_a S_b S_c$.

Avem $S_a \alpha$ egală şi paralelă cu $A'a$ ca mediane în triunghiuri omotetice egale. Figura $S_a aA'\alpha$ este un paralelogram. Diagonalele sale se taie în M, mijlocul lor. Dar şi $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ se taie în M.

Acest punct este deci centrul de omotetie al lui A'B'C' cu $S_a S_b S_c$ şi al lui *abc* cu $\alpha\beta\gamma$. Dar în aceste triunghiuri T şi H sunt centrele cercurilor înscrise şi sunt simetrice în raport cu M. H este centrul cercului înscris în A'B'C şi cum T este simetricul său, îi corespunde în $S_a S_b S_c$.

(10) *Dreptele* $S_a A'$, $S_b B'$, $S_c C'$, $S_1 A_2$, $S_2 B_2$, $S_3 C_2$ *sunt concurente în* M.

$S_1 a$ este egală şi paralelă cu αA_2, deci figura $aA_2 \alpha S_1$ este un paralelogram. Diagonalele sale se taie în părţi egale şi deci şi $S_1 A_2$ trece prin M mijlocul lui $a\alpha$. La fel celelalte.

(11) *Punctele* T, M, H *sunt coliniare.*

Aceasta este evident, T fiind simetricul lui H în raport cu M.

(12) *Punctele* S_1, S_2, S_3, S_a, S_b, S_c sunt conciclice.

Figura $S_a S_3 S_b S_1 S_c S_2$ este simetrica figurii $A'C_2$ $B'A_2$ $C'B_2$, fiindcă admite pe M ca centru de simetrie. Insă punctele A_2, B_2, C, A', B', C' sunt conciclice aşa că rezultă şi pentru S, S_2, S_3, S_a, S_b, S_c acelaş lucru. Centrul cercului circumscris O'_9 va fi simetricul lui O_9 în raport cu M.

(13) Σ_a, Σ_b, Σ_c *dreptele lui* SIMSON *ale punctelor* A', B', C' *în raport cu triunghiul* $A_1 B_1 C_1$ *sunt perpendiculare pe laturile lui* $S_a S_b S_c$.

Intr'adevăr, am arătat că unghiul făcut de $S_b S_c$ cu $B_2 C_2$ are ca măsură $\frac{1}{2}$ arc $A_1 A'$. Unghiul făcut de Σ_a dreapta lui SIMSON a lui A' şi de $B_1 C_1$, a lui A_2 în raport cu $A_1 B_1 C_1$, are ca măsură $\frac{1}{2}$ arc $A_2 A'$. Adunând, găsim că unghiul (Σ_a, $S_b S_c$) are ca măsură $180^0 - \frac{A_1 A_2}{2} = 90^0$.

De aci o serie de consecinţe importante:

Să notăm cu P_1, P_2, P_3; Q_1, Q_2, Q_3 intersecţiile (Σ_a, *bc*) etc., (Σ_a, $S_b S_c$).

(14) *Dreptele* aP_1, bP_2, cP_3, *concură în* K, *punctul lui* LEMOINE *al lui* ABC.

Se ştie că dacă T este centrul cercului înscris în *abc*, atunci P_1, P_2, P_3 sunt punctele de contact ale cercului înscris în *abc* cu laturile şi deci aP_1, bP_2, cP_3 concură în K, punctul lui GERGONNE al acestui triunghiu *abc*; dar se ştie că acest punct coincide cu K, punctul lui LEMOINE al lui ABC.

(15) *Grupele de puncte* (A, *a*, P_1); (B, *b*, P_2); (C, *c*, P_3) sunt colineare.

Se ştie că simedianele lui ABC trec prin *a*, *b*, *c* şi se vede uşor (fiindcă ele sunt locul mijloacelor antiparalelelor la laturile triunghiului) că A, *a*, K şi deci A, *a*, P_1, sunt coliniare etc.

(16) *Dreptele* $S_a Q_1$, $S_b Q_2$, $S_c Q_3$ *concură în* P, *punctul lui* GERGONNE *al lui* $S_a S_b S_c$.

T este centrul cercului înscris în $S_a S_b S_c$, Q_1, Q_2, Q_3 punctele de contact ale cercului înscris cu laturile şi deci transversalele $S_a Q_1$, $S_b Q_2$, $S_c Q_3$ concură în punctul lui GERGONNE al acestuia.

(17) *Dreptele* S_1P_1, S_2P_2, S_3P_3 *sunt concurente într'un punct* S.

Aşi aveà nevoie pentru aceasta de teorema: *dreptele ce unesc centrele cercurilor exînscrise cu punctele de contact ale cercului înscris sunt concurente.* Deoarece n'am găsit-o în cărţile mele, voi căutà s'o stabilesc.

$$\sphericalangle\, bP_1P_3 = \sphericalangle\, bTP_3 = 90^0 - \sphericalangle\, TbP_3 = 90 - \frac{180 - 2B}{2} = B.$$

Dar $\sphericalangle\, S_1bc = \hat{B}$, deci P_1P_3 e paralelă cu S_1S_3 şi deci triunghiurile $S_1S_2S_3$ şi $P_1P_2P_3$ sunt omotetice. Este atunci uşor de văzut că S este centrul lor de omotetie.

(18) *Punctele* S, K, R *sunt coliniare.*

Rezultă din omotetia triunghiurilor: ABC, $S_1S_2S_3$, $P_1P_2P_3$, căci se ştie că centrele de omotetie sunt coliniare.

(19) *Dreptele* AQ_1, BQ_2, CQ_3 *sunt concurente în* Q.

Triunghiurile ABC şi $Q_1Q_2Q_3$ sunt omotetice şi deci razele omoloage concură în centrul Q de omotetie.

(20) *Punctele* Q, T, K *sunt coliniare.*

Rezultă din omotetia triunghiurilor: ABC, $P_1P_2P_3$, $Q_1Q_2Q_3$ ale căror trei centre sunt coliniare.

(21) S_1Q_1, S_2Q_2, S_3Q_3 *sunt concurente în* N.

Triunghiurile $S_1S_2S_3$ şi $Q_1Q_2Q_3$ sunt omotetice.

(22) *Punctele* N, S, T *sunt coliniare.*

Rezultă din omotetia triunghiurilor:

$$S_1S_2S_3,\ P_1P_2P_3,\ Q_1Q_2Q_3.$$

(23) *Punctele* Q, R, N *sunt colineare.*

Rezultă din omotetia triunghiurilor:

$$ABC,\ S_1S_2S_3,\ Q_1Q_2Q_3.$$

(24) *Laturile lui* $P_1P_2P_3$ *taie pe* ABC *în 6 puncte conciclice.*

Triunghiurile ABC şi $P_1P_2P_3$ omotetice au ca centru de omotetie pe K punctul lui LEMOINE, or atunci după teorema 1035 din *Exercices de Géométrie* par F. G. M., laturile lui $P_1P_2P_3$ prelungite taie pe ABC în 6 puncte pe un acelaş cerc TUCKER, al cărui centru ω_1 este pe OK.

(25) *Antiparalelele duse din* P_1, P_2, P_3 *la* ABC *taie laturile în 6 puncte conciclice.*

Vezi aceiaşi teoremă: regăsim cercul lui TAYLOR.

(26) *Antiparalelele duse din* A, B, C *la* $P_1P_2P_3$ *taie laturile acestuia în 6 puncte conciclice.*

N. TEODORESCU.

NOTE MATEMATICE

20. *Societăţile Matematice.* In *Boletino Matematico,* No. 9 din anul 1930, D-l ENRIQUE SPARN publică un articol asupra «*Societăţilor matematice cu cel mai mare număr de membri*». Acolo se arată că numai Germania are 4 societăţi cu peste 100 membri, că Statele Unite, Anglia şi Rusia au 3; Italia 2; iar Franţa, Olanda, Cehoslovacia, Spania, Austria, Ungaria, Polonia, Danemarca şi India Engleză câte una. Autorul acelui articol nu aveà cunoştinţă de starea de lucruri dela noi şi de aceea numai la urmă, după o comunicare făcută de D-l B. I. BAIDAFF, citează şi România ca având Societatea «*Gazeta Matematică*» cu 143 membri la începutul lui Septemvrie 1930. Nu se arată *Societatea Matematică Română* cu 225 membri.

Cea mai puternică e Societatea: «*The national Council of Teachers of Mathematics*» din Statele Unite, cu circa 5000 de membri. După aceasta vine Societatea cehoslovacă de matematică şi fizică din Praga, întemeiată la 1862, cu 2113 membri şi cu o bibliotecă de 11000 volume. Cu peste 1000 membri mai sunt: Asociaţia matematică din America dela 1915 cu 1950 membri; Socie-

tatea matematică din New-York, dela 1888, cu 1800 membri şi cu o bibliotecă de 7500 volume; Asociaţia matematică din Anglia cu 1700 membri, şi Asociaţia matematicianilor germani din Berlin cu 1105 membri. Societatea matematică din Franţa are 650 de membri; Cercul matematic din Palermo are 387 membri şi 8500 volume. Vin apoi: Societatea matematică din Londra din 1865 cu 420 membri; Societatea Eötvös de matematică şi fizică din Budapesta cu 400 membri; Societatea pentru matematici aplicate şi mecanică din Berlin cu 400 membri; Societatea matematică din Edinburg cu 310 membri; Societatea matematică din Berlin cu 260 membri; Uniunea matematică italiană cu 250 membri, cu sediul la Bologna. O veche Societate este cea din Amsterdam înfiinţată la 1778, care are azi 250 membri şi o bibliotecă de 7200 volume; Societatea matematică din Calcuta are 205 membri; cea din Polonia 179, cea din Spania 140, cea din Viena 123; Rusia are câte o Societate de fizico-matematici la Leningrad şi Kazan şi una matematică la Moscova din 1867 cu 111 membri şi o bibliotecă de 10000 volume. Cea mai veche Societate e cea din Hamburg cu 106 membri, înfiinţată la 1690. Societatea matematică din Copenhaga are 100 membri.

La această cifră se opreşte D-l Sparn.

La noi forţele matematice sunt împărţite în mai multe Societăţi şi grupuri de scos reviste de matematici pure şi aplicate, sau împreunate cu alte Societăţi ştiinţifice. O statistică a lor este de făcut.

I. I.

21. *Asupra problemei 3918.* Soluţiunea acestei probleme dată la pag. 35 vol. XXXVI, a fost publicată din eroare. Dealtfel, ea nu corespunde enunţului, deoarece se rezolvă tot cu ajutorul formulei care dă rădăcinile unei ecuaţiuni de gr. II. Rezultatele date sunt absurde căci se obţine

$$x'' = \sin a = -\frac{\sqrt{5}+1}{2} = -1{,}618\ldots$$

în consecinţă, chestiunea rămâne încă deschisă, problema fiind considerată nerezolvată.

Ion S. Antoniu.

BIBLIOTECA CENTRALĂ a „ASOCIAŢIUNII" SIBIIU

22. *Asupra Notei No. 5 Vol. XXXV.*

Ca extindere la: „*Curiosités arithmetiques*“ par V. THÉBAULT găsesc pentru patratele de 8 cifre al căror număr de două cifre dela dreapta este multiplu al celui de două cifre dela stânga:

$\overline{4004}^2 = 16032016$
$\overline{4008}^2 = 16064064$
$\overline{4014}^2 = 16112196$
$\overline{4036}^2 = 16289296$
$\overline{4042}^2 = 16337764$
$\overline{4046}^2 = 16370116$
$\overline{4054}^2 = 16434916$
$\overline{4058}^2 = 16467364$
$\overline{4064}^2 = 16516096$
$\overline{4086}^2 = 16695396$
$\overline{4092}^2 = 16744464$
$\overline{4096}^2 = 16777216$
$\overline{4104}^2 = 16842816$
$\overline{4108}^2 = 16875664$
$\overline{4114}^2 = 16924996$
$\overline{4244}^2 = 18011536$
$\overline{4256}^2 = 18113536$
$\overline{4294}^2 = 18438436$
$\overline{4306}^2 = 18541636$
$\overline{4344}^2 = 18870336$
$\overline{4356}^2 = 18974736$
$\overline{4374}^2 = 19131876$
$\overline{4376}^2 = 19149376$
$\overline{4424}^2 = 19571776$
$\overline{4426}^2 = 19589476$
$\overline{4622}^2 = 21362884$
$\overline{4628}^2 = 21418384$
$\overline{4672}^2 = 21827584$
$\overline{4678}^2 = 21883684$

$\overline{4712}^2 = 22202944$
$\overline{4738}^2 = 22448644$
$\overline{4762}^2 = 22676644$
$\overline{4788}^2 = 22924944$
$\overline{4813}^2 = 23164969$
$\overline{4837}^2 = 23396569$
$\overline{4863}^2 = 23648769$
$\overline{4887}^2 = 23882769$
$\overline{4936}^2 = 24364096$
$\overline{4964}^2 = 24641296$
$\overline{4968}^2 = 24681024$
$\overline{4982}^2 = 24820324$
$\overline{4986}^2 = 24860196$
$\overline{5005}^2 = 250\,0025$
$\overline{5015}^2 = 25150225$
$\overline{5025}^2 = 25250625$
$\overline{5035}^2 = 25351225$
$\overline{5045}^2 = 25452025$
$5055^2 = 25553025$
$\overline{5065}^2 = 25654225$
$\overline{5075}^2 = 25755625$
$\overline{5085}^2 = 25857225$
$\overline{5095}^2 = 25959025$
$5209^2 = 27133681$
$\overline{5259}^2 = 27657081$
$\overline{5291}^2 = 27994681$
$\overline{5316}^2 = 28254856$
$\overline{5322}^2 = 28323684$
$\overline{5328}^2 = 28387584$

$\overline{5334}^2 = 28451556$
$\overline{5366}^2 = 28793956$
$\overline{5372}^2 = 28858384$
$\overline{5378}^2 = 28922884$
$\overline{5384}^2 = 28987456$
$\overline{5423}^2 = 29408929$
$\overline{5427}^2 = 29452329$
$\overline{5472}^2 = 29953729$
$\overline{5477}^2 = 29997529$
$\overline{5658}^2 = 32012964$
$\overline{5664}^2 = 32080896$
$\overline{5686}^2 = 32330596$
$\overline{5692}^2 = 32398864$
$\overline{5708}^2 = 32581264$
$\overline{5714}^2 = 32649796$
$\overline{5736}^2 = 32901696$
$\overline{5742}^2 = 32970564$
$\overline{6006}^2 = 36072036$
$\overline{6044}^2 = 36529936$
$\overline{6056}^2 = 36675136$
$\overline{6174}^2 = 38118276$
$\overline{6176}^2 = 38142976$
$\overline{6224}^2 = 38738176$
$\overline{6226}^2 = 38763076$
$\overline{6421}^2 = 41229241$
$\overline{6429}^2 = 41332041$
$\overline{6471}^2 = 41873841$
$\overline{6479}^2 = 41977441$
$\overline{6522}^2 = 42536484$
$\overline{6528}^2 = 42614784$
$\overline{6638}^2 = 44063044$
$\overline{6662}^2 = 44382244$
$\overline{6688}^2 = 44729344$
$\overline{6936}^2 = 48108096$
$\overline{6964}^2 = 48497296$
$\overline{6986}^2 = 48804196$
$\overline{7007}^2 = 49098049$
$\overline{7043}^2 = 49603849$
$\overline{7057}^2 = 49801249$
$\overline{7484}^2 = 56010256$
$\overline{7516}^2 = 56490256$
$\overline{7534}^2 = 56761156$
$\overline{7819}^2 = 61136761$
$\overline{7831}^2 = 61324561$
$\overline{7869}^2 = 61921161$
$\overline{8008}^2 = 64128064$
$\overline{8042}^2 = 64673764$
$\overline{8058}^2 = 64931364$
$\overline{8313}^2 = 69105969$
$\overline{8337}^2 = 69505569$
$\overline{8363}^2 = 69939769$
$\overline{8724}^2 = 76108176$
$\overline{8726}^2 = 76143076$
$\overline{9009}^2 = 81162081$
$\overline{9041}^2 = 81739681$
$\overline{9172}^2 = 84125584$
$\overline{9178}^2 = 84235684$
$\overline{9467}^2 = 89624089$
$\overline{9483}^2 = 89927289$
$\overline{9814}^2 = 96314596$
$\overline{9836}^2 = 96746896$

VIRGILIU C. POPESCU.

23. *Asupra problemei 138 din «Boletin Matematico»*. In această problemă se cereà să se facă calculabilă prin logaritmi expresiunea:

$$E = \sin a + \sin b + \sin c - \sin(a + b + c)$$

şi se găsià:

$$E = 4\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{c+a}{2}$$

analog se poate arătà că:

$$\cos a+\cos b+\cos c+\cos(a+b+c) = 4\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{b+c}{2}\cos\frac{c+a}{2}$$

$$\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b+\operatorname{tg} c-\operatorname{tg}(a+b+c) = \frac{\sin(a+b)\sin(b+c)\sin(c+a)}{\cos a\cos b\cos c\cos(a+b+c)}$$

iar dacă

$$a + b + c = \pi$$

avem:

$$\sin a + \sin b + \sin c = 4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}$$

$$\cos a + \cos b + \cos c - 1 = 4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}$$

şi mai general dacă:

$$a + b + c = 2n\pi$$

$$\sin a + \sin b + \sin c = (-1)^{n-1}\, 4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}$$

$$1 + \cos a + \cos b + \cos c = (-1)^{n}\ 4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}$$

sau dacă:

$$a + b + c = (2n + 1)\pi,$$

avem :

$$\sin a + \sin b + \sin c = (-1)^n \, 4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}$$

$$\cos a + \cos b + \cos c - 1 = (-1)^n \, 4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2} \cdot$$

Ca o complectare se poate vedeà şi «*Exercices de trigonométrie*» par F. G. M. pag. 61 şi u.

† Tr. A. Dordea.

24. *Asupra construcţiei centrelor de curbură ale podarelor curbelor plane.*

In nota de faţă vreau să fac legătura între 2 construcţii ale centrelor de curbură la podare, una găsită în A. Manheim „Géometrie descriptive" şi alta luată din „Curs de geometrie pură infinitezimală" a D-lui profesor N. Abramescu, dela Universitatea din Cluj.

Voi plecà dela cea a D-lui profesor Abramescu şi prin consideraţiuni de geometrie elementară, voi găsì pe cealaltă. Se ştie de exemplu că pentru a le demonstrà pe fiecare în parte, trebuie să utilizezi, fie relaţia lui Manheim, fie a lui Newton, relativă la arcele de curbă şi segmentele de normală, corespunzătoare.

Construcţia în primul caz este:

Fie M un punct al curbei (M), şi C centrul de curbură în M. Fie A punctul în raport de care considerăm podara curbei plane (M), P proecţia lui A pe tangenta în M la curbă şi N proecţia lui A pe normala în M. Se proectează centrul de curbură C, pe AM în H şi apoi punctul H pe normala MN în I.

Centrul de curbură R *al curbei podare în raport de* A, *este intersecţia normalei* PN *cu dreapta* AI.

Să facem acum următoarele construcţii:

Fie ν intersecţia lui HI cu normala PN la podară. Pe ν îl proectăm în t pe dreapta AN.

Observăm că, prin faptul ANMP este dreptunghiu, patrulaterul HANν este un trapez isoscel, deci inscriptibil în cercul AHνN. Acest cerc însă, trece şi prin centrul de curbură C, deoarece unghiurile AHC şi ANC sunt unghiuri drepte. Deci cercul AHνNC este descris ca diametru pe AC.

Ceva mai mult ν fiind pe diagonala dreptunghiului IANM, rezultă că dreapta tI e paralelă cu diagonala AM. Deci dreptele AI şi tM se intersectează pe normala PN, în centrul de curbură R, al podarei.

Am dat astfel peste construcţia lui A. MANHEIM:

Fie A *un punct fix în planul curbei* (M), *care se proectează în* P *şi* N *respectiv pe tangenta şi normala în* M *la curbă şi fie* C *centrul de curbură la* (M) *în* M.

Cercul de diametru AC *taie a 2-a oară normala* PN *la podară în* ν. *Proecţia lui* ν *pe dreapta* AN *este t.*

Intersecţia normalei PN *cu dreapta* Mt, *este centrul de curbură* R, *la podara* (P) *a curbei* (M) *în raport de punctul* A.

Observând că cercul PANM înfăşoară podara (P) a curbei (M) şi că centrul său descrie homotetica de centru A şi raport $\frac{1}{2}$ a curbei (M), problema se poate enunţă astfel:

Să se găsească centrul de curbură în punctul de contact al unui cerc ce trece printr'un punct fix şi are centrul pe o curbă dată, cu înfăşurătoarea sa.

LOCOT. MIHAIL I. FOCŞENEANU.

BIBLIOGRAFIE

Bulletin of the American mathematical Society. Vol. XXXVI. No. 12. Decemvrie 1930. New-York. Metode în şirurile de puncte şi teoria funcţiunilor reale, de H. BLUMBERG. Soluţiuni discontinui în calculul variaţiunilor, de L. M. GRAVES. Un principiu eronat în teoria numerelor, de D. H. LEHMER. O anumită problemă de aproximaţie în domeniul complex, de D. JACKSON. Privitor la quasi-k-ori transivivitate a grupurilor de permutaţiuni, de R. D. CARMICHAEL. O serie de ecuaţii funcţionale reunite ciclic, de W. M. WHYBURN. Corelaţiunea şi teoria grupurilor, de D. J. STRUIK. Notă asupra existenţei unei funcţiuni pozitive ortogonală unei serii date de funcţiuni, de N. H. Mc COY. Numărul reprezentărilor în unele forme cuadratice senare, de E. T. BELL. Exiztenţa teoremei valorii medii a lui GAUSS. Teoremă asupra cercurilor în vecinătatea punctelor singulare izolate ale funcţiunilor armonice, de G. E. RAYNOR. O notă despre cactoide, de J. H. ROBERTS.

Mathesis. Tomul XLIV. No. 10. Decemvrie 1930. Gembloux. Asupra transversalelor reciproce, de CL. SERVAIS. Asupra unei afinităţi complexe, de R. GOORMAGHTIGH. Notă asupra procedeului de demonstraţie indirectă la geometrii anticităţii greci, de PAUL VER EECKE. Suprafeţe minime şi congruienţe isotrope, de P. LIBOIS.

Anales de la Sociedad cientifica Argentina. Tomul CX. Fascicola V. Noemvrie 1930. Buenos-Aires.

Universidad nacional de la Plata. *Contribucion al Estudio de las ciencias fisicas y matematicas.* Serie tecnica. Volumul IV. Fascicola 2. No. 91. Septemvrie 1930. La Plata. Calculul reacţiunilor de legătură ale unei bare rigide, de P. LONGHINI. Variaţiunea stării de scurgere şi determinarea nivelului de apă corespunzător, de A. A. MARCHETTI.

Boletin matematico. Anul III. No. 9. Septemvrie-Noemvrie 1930. Buenos-Aires. † Inginerul Profesor ARTURO SALLOVITZ. O clasă de ecuaţii elementare, de G. TZITZEICA. (Reprodus din *Gazeta Matematica*). Demonstraţia teoremei lui BÉZOUT, de J. TSCHLEK. Societăţi de matematică cu cel mai mare număr de membrii, de E. SPARN.

Journal de mathématiques élémentaires, publié par H. VUIBERT. Anul 55. No. 7. Ianuarie 1930. Paris.

Idem. No. 8. Ianuarie 1930.

Revista matematică din Timişoara. Anul X. No. 11. Ianuarie 1931. Timişoara. Relaţii metrice deduse cu ajutorul inversiunii, de CEZAR COŞNIŢĂ.

Vito Volterra. *Leçons sur la Théorie mathématique de la lutte pour la vie.* Paris. Gauthier-Villars et C-ie. 1931.

Incercări de aplicarea matematicilor la studiul fenomenelor biologice datează de mult. Bibliografiile matematicilor aplicate arată numeroase lucrări anuale în această direcţiune. Celebrul matematician italian VOLTERRA publică acum în un volum de 214 pagini conferinţele pe care le-a ţinut la Paris în iarna 1928-1929, cu unele adaose ale redactorului acelor conferinţe, MARCEL BRELOT. Despre această chestiune D-l VOLTERRA a întreţinut în Mai 1929 şi pe membrii Societăţii române de matematică, după Congresul matematicianilor români din acel an, în o conferinţă ţinută la Bucureşti.

Ideia acestei lucrări a fost dată autorului în 1925 de Dr. D'ANCONA care observase că din cauza reducerii pescuitului pe timpul războiului proporţia de peşti devoratori ai altor specii a sporit şi apoi a oscilat, şi a cerut D-lui VOLTERRA ca să vază dacă nu se poate scoate o lege matematică. Rezultatele cercetărilor analitice ale sale, făcute pe baza unor ipoteze cât se poate mai apropiate de natura faptelor, sunt coprinse în această broşură. Astfel, dacă N e numărul unor indivizi izolaţi atunci se ia:

$$dN = \varepsilon N\, dt,$$

pentru sporirea numărului lor în timpul dt, unde ε e constant, în care caz egalitatea ar corespunde legei lui MALTHUS, — sau e funcţiune de timpul la care se calculează sporul, sau depinde şi de alte condiţiuni, ca de exemplu de ereditate, adică creşterea depinde nu numai de starea actuală ci şi de stările anterioarele timpului t. Problema cu modul acesta se complică şi rezolvarea ei cere cunoştinţa matematicilor superioare, ca ecuaţiile integrale şi integro-diferenţiale, astfel că studiul nu se poate urmări fără asemenea cu-

noştinţe. Din studiul matematic al chestiunilor pe care şi le-a pus autorul s'au dedus unele legi care urmează să fie controlate prin experienţă şi a se deduce astfel pânăla ce punct ele concordă cu realitatea lucrurilor. Aşa de exemplu se demonstrează că dacă în acel mediu sunt două specii din care una se hrăneşte cu alta, fluctuaţiunile lor sunt periodice, că dacă din ele se distruge proporţional cu numărul lor, media speciei devorante creşte şi a celeilalte descreşte, etc.

Broşura coprinde următoarele părţi. O introducere în care se dă principiile metodei de calcul. Cap. I se ocupă de cazul coexistenţei a două specii, care au aceiaşi hrană sau că una se hrăneşte cu alta, sau au acţiuni mutuale între ele. Cap. II coprinde cazul unui număr oarecare de specii coexistente, cu aceiaşi hrană sau care devorează unele pe altele, urmat de o notă asupra determinanţilor şi a sistemelor de ecuaţii lineare. Cap. următor continuă acelaşi studiu pe baza unor ipoteze mai largi, şi se ocupă şi de sistemele conservative şi disipative. La fine este o notă asupra formelor cadratice. Cap. IV se ocupă cu acţiunile ereditare în biologie şi mecanică. Ca fenomene ereditare în mecanică sunt reziduul elastic, hysteresis în fizică, etc. Prin analogie cu chestiunile deja tratate în acest domeniu se studiază şi ereditatea biologică, dar aci nu mai sunt suficiente ecuaţiile cu derivate parţiale pentru rezolvarea chestiunilor, deoarece starea la un moment dat depinde de cea actuală şi de o infinitate de stări anterioare. De aci nevoia ecuaţii cu derivate funcţionale pentru studiul unor asemenea chestiuni. In acest capitol se studiază energetica ereditară şi în o notă se dă oarecare noţiuni de ecuaţiile integrale şi integrodiferenţiale. In ultimul Capitol se face o concluzie a celor tratate: se face un istoric al chestiunilor de echilibru biologic şi se dă indicaţiuni bibliografice asupra chestiunilor tratate.

Lucrarea constituie o nouă extindere a matematicilor în domeniul ştiinţelor aplicate şi dovedeşte că oricât de înalte ar fi speculaţiunile matematice ele îşi găsesc cu timpul aplicaţiuni în ştiinţele tecnice şi naturale, ştiinţe care la rândul lor impun uneori crearea de noi resurse matematice.

I. I.

R. De **Montessus de Ballore.** *Probabilités et Statistiques.* Paris. Librairie scientifique Hermann et C-ie. Paris 1931.

Broşura de 212 pagini conţine cursul făcut de autor la *Oficiul naţional meteorologic din Franţa.* Broşura începe cu o prefaţă scrisă de M. Alliaume, profesor la Universitatea din Louvain. Autorul dă apoi definiţiuni şi indică diferite feluri de probabilităţi. Aci găsim noţiunea de *probabilitate întărită,* ca de exemplu în cazul probabilităţii de vindecare a unuia care suferă deodată de două boli; *probabilităţi rezultante,* ca a unei ploi produse de nori ce vin din direcţiuni opuse. Capitolul I se termină cu unele aplicaţiuni. Cel următor se ocupă cu probele repetate. Cap. III se ocupă cu tabele pentru funcţiunea lui Laplace sau cu *legea hasardului.* Capitolul următor se ocupă de *modă,* numind astfel ordonata maximă a curbei:

$$y = m!\, p^{mp-x} q^{mq+x} / (mp - x)!\, (mq + x)!.$$

In Cap. V se studiază rolul distributiv al constantelor m, p, q. In Cap. VI se introduce constanta de deplasare; în Cap. VII se studiază momentele şi formule de somaţiune. Cap. VIII se ocupă de medii. Cap. IX cu o lege de probabilitate simplă, şi de ecarturi absolute şi relative, iar în Cap. următor cu existenţa de statistici care urmează acea lege. In Cap. XI se aplică studiul făcut la diferite statistici. In Cap. XII se studiază cazul datelor unilaterale. In Cap. XIII se dă o privire asupra statisticilor superioare, iar în cel următor se vorbeşte de statistici continui şi discontinui.

Chestiunile sunt expuse cu claritate şi din studiul făcut de autor reese foloasele pe care ele le pot aduce statisticianilor, fizicianilor, actuarilor, etc.

I. I.

Valeriu Alaci. *Géométrie analitique des polygones et des polièdres convexes.* (Extras din *Bulletin scientifiques de l'École Polytechnique* de Timişoara, Tome III. Fasc. 3—4). Timişoara 1930.

Autorul şi-a propus să complecteze geometria analitică prin găsirea ecuaţiilor figurilor formate din drepte, ca unghiuri, poligoane, sau din plane, ca unghiurile diedre şi triedre, poliedre, etc. Incercări izolate se cunoşteau în această direcţie.

Aşa ecuaţia:

$$y = a + \sqrt{(x - b)^2},$$

în care radicalului i se dă numai semnul $+$, reprezintă un unghiu drept, sau mai bine zis, laturile lui.

Autorul se serveşte de expresiunea analitică:

$$\int_0^{\infty} (\sin ax)\, dx/a,$$

care ia valorile $-\frac{1}{2}\pi$, 0 sau $\frac{1}{2}\pi$ după cum x e negativ, zero sau pozitiv. Ecuaţiile ce se găsesc nu dau însă şi vârfurile unghiurilor, liniilor frânte, poligoanelor, poliedrelor şi muchiilor acestora. Se stabileşte ecuaţiile unghiului şi ale laturilor lui, a unei semidrepte, a unui segment de dreaptă, a triunghiului, patrulaterului şi poligoanelor convexe cu diverse cazuri particulare. Apoi se trece la geometria în spaţiu şi se dă ecuaţiile diedrelor, semiplanului segmentului de plan dintre două drepte, ecuaţiile unghiurilor, poliedre convexe, ale paralelipipedelor, prismelor, piramidei; se studiază probleme de intersecţii. La fine se dă ecuaţia conturului format de două arce de curbă, ecuaţia triunghiului curbiliniu, a patrulaterelor curbilinii. Broşura se termină cu ecuaţia octaedrului regulat. Ea conţine şi diverse aplicaţiuni.

Broşura e mai mult de un interes de curiositate de cât de utilitate, dar nu trebuie uitat că multe chestiuni pornite din curiositate şi spirit de generalizare, şi-au găsit cu timpul aplicaţiuni cu totul de natură practică. Matematicianul nu trebuie să se preocupe numai de ce este folositor imediat, ci de ce ar puteà fi de folos generaţiunilor viitoare, după cum a spus H. Poincaré

I. I.

D. V. Ionescu. *Memorii de titluri şi lucrări.* Cluj 1930.

CERERI

201. Care sunt studiile publicate la noi în privinţa vechilor unităţi de măsură şi vechilor monede întrebuinţate ?

I. IONESCU.

DIVERSE

Societatea Română de matimatică şi-a constituit astfel biuroul pe anul 1931 : Preşedinte D. GERMANI, Profesor de hidraulică la Şcoala Politecnică din Bucureşti. Vice-Preşedinte A. ANGELESCU. Casier AL. FRODA. Secretari GH. MIHOC şi E. BALLAN. Membri în Comitet V. VÂLCOVICI, P. SERGESCU şi FL. VASILESCU. Bibliotecar V. BĂDULESCU. Redactori ai Buletinului GH. ŢIŢEICA, D. POMPEIU, R. RACLIŞ. Cenzori G. BORNEANU, G. SUDAN, D. BARBILIAN. Cenzori supleanţi CR. MATEESCU, E. ABASON şi O. ŢINO.

Societatea a ţinut şedinţă în seara zilei de 12 lanuarie când D-l D. BARBILIAN a făcut o comunicare despre unele configuraţii de omografii şi în seara zilei 26 lanuarie D-l C. CIORĂSCU : Asupra funcţiunilor armonice conjugale şi E. BALLAN : Asupra unei probleme generale de mecanica statistică.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1364. *Să se găsească numai cu compasul diametrul unei bare cilindrice circulare cu capetele rupte neregulat.*

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-l IULIAN ALEXIU (Student).

Aşezăm bara pe o masă perfect plană în poziţia (A). Punem un vârf al compasului în un punct O al barei şi cu celălalt vârf descrim pe masă un arc de cerc (C). Rostogolim bara pe plan cu atenţiune, fără lunecare, până ce vine în o altă poziţiune (A').

Punctul O va luà în spaţiu poziţiunea O'. Facem din O' aceiaşi operaţiune ca şi din O trasând arcul (C') aşa însă ca el să taie primul arc în două puncte M şi N. Din M şi N, cu aceiaşi deschizătură de compas, descrim pe cilindru două arce care se vor tăià în punctul P. Procedând la fel mai găsim un alt punct P'.

Punctele O', P, P' se găsesc evident pe o secţiune dreaptă a barei. Cu distanţele O'P, O'P', PP' vom construi un triunghiu plan căruia îi vom circumscrie un cerc. Raza acestui cerc va fi raza căutată a cilindrului.

Pentrucă punctele P şi P' se găsesc prea apropiate pe cilindru, am puteà găsì pe P', după ce am găsit pe P, rostogolind puţin bara pe masă pânăce cele două puncte sunt suficient de depărtate ca să putem aveà o construcţie mai precisă a cercului circumscris.

Mai putem găsì puncte pe secţiunea dreaptă şi în modul următor. Din O' şi P descrim cu compasul arce pe suprafaţa cilindrului cu aceiaşi deschizătură de compas, care se vor tăià în R şi R'. Din aceste puncte cu aceiaşi deschidere de compas descrim două arce care se taie în S şi S' pe aceiaşi secţiune dreaptă cu O' şi P. Punctele R şi R' sunt pe o aceiaşi generatoare a cilindrului.

Notă. Observaţiunile pe care le-am făcut la pagina 103 îşi au locul şi aci. Problema nu e rezolvată numai cu compasul, ci şi cu alt instrument, *planul material* sau *marmura,* cum îi zic inginerii de construcţiuni metalice. Pentru ca soluţiunea să dea rezultate bune, ar trebui un cilindru şi un plan luciu şi atunci lunecările sunt inevitabile. Din punct de vedere matematic, problema e rezolvată mai precis ca în soluţia dela pag. 103. Problema rămâne încă nerezolvată, căci se cere numai utilizarea compasului.

I. I.

PROBLEMA 3302. *Să se demonstreze identitatea:*

$$C_{pk+n}^{n} - C_{p}^{1} C_{(p-1)k+n}^{n} + C_{p}^{2} C_{(p-2)k+n}^{n} - \ldots + (-1)^{p} C_{p}^{p} C_{n}^{n} = 0$$

pentru $p > n$. *Să se găsească o expresie condensată a primei părţi.*

M. GHERMĂNESCU.

Soluţia D-lui I. C. VASILIU (Elev Inginer).

Să notăm cu E prima parte.

$$E = \sum_{i=0}^{p} (-1)^{i} C_{p}^{i} C_{(p-i)k+n}^{n} = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{p} (-1)^{i} C_{p}^{i} [(p-i)k+n] \ldots [(p-i)k+1]$$

care ne face să considerăm suma:

$$S = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i C_p^i x^{(p-i)k+n} = x^n \sum_{i=0}^{p} (-1)^i C_p^i (x^k)^{p-i}$$

$$\therefore \qquad S = x^n (x^k - 1)^p$$

$$\frac{d^n S}{dx^n} = n!\, E.$$

Dar dacă $p > n$ derivata de ordinul n va conţine ca factor $x^k - 1$. Pentru $x = 1$ E va fi deci zero. Identitatea e demonstrată.

Primul membru se poate scrie:

$$E = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n x^n (x^k - 1)^p}{dx^n} \right]_{x=1}.$$

Notă. Identitatea propusă am întâlnit-o cu ocazia studiului unei clase de polinoame ortogonale

$$P_n(x) = \frac{e^{x^k}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[e^{-x^k} x^n \right]$$

pe cari le-am comunicat Soc. Rom. de Matematici în şedinţa dela 8 Dec. 1924.

M. G.

PROBLEMA 3518. *Dacă* d *este un divizor oarecare al unui număr întreg, iar* φ *simbolul indicatorului, să se arate că*

$$\Sigma \varphi(d^2) = \Sigma d \varphi(d).$$

Problema se poate extinde în cazuri mai generale?

C. H. Nicolau.

Soluţie şi generalizare dată de D-nii: Gh. Balaban, Gh. Călin, Ulpiu Florescu şi Gh. Th. Gheorghiu-Gladiş.

Fie

$$d = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda$$

avem

$$d^n = a^{n\alpha} b^{n\beta} c^{n\gamma} \ldots l^{n\lambda}$$

apoi

$$\varphi(d) = a^{\alpha-1}\, b^{\beta-1}\, c^{\gamma-1} \ldots l^{\lambda-1}(a-1)(b-1)(c-1)\ldots(l-1)$$

$$\varphi(d^n) = a^{n\alpha-1}\, b^{n\beta-1}\, c^{n\gamma-1} \ldots l^{n\lambda-1}(a-1)(b-1)(c-1)\ldots(l-1)$$

comparând aceste relaţiuni, deducem

$$\varphi(d^n) = d^{n-1}\varphi(d)$$

scriind relaţiunile analoage, corespunzătoare tuturor divizorilor numărului dat şi adunându-le membru cu membru, obţinem

$$(1) \qquad \Sigma\varphi(d^n) = \Sigma d^{n-1}(d).$$

Notă. 1°. D-l Gh. Th. Gheorghiu-Gladiş enunţă şi generalizarea

$$\Sigma[\varphi(d^n)]^n = \Sigma[d^{n-1}\varphi(d)].$$

2°. O altă generalizare a încercat şi D-l Gh. Călin.

3°. O generalizare care o cuprinde pe cea din soluţia dată problemei de mai sus este următoarea

$$\Sigma\varphi(d^n) = \Sigma d^k \varphi(d^{n-k}).$$

Pentru $k = n-1$, obţinem generalizarea dată de (1), care cuprinde la rândul său problema propusă pentru $n = 2$.

M. G.

PROBLEMA 3740. *Să se calculeze derivatele funcţiunilor*

$$u = \operatorname{arc\,tg}\frac{5(x^2-1)^2-4}{x[20-(x^2-5)^2]}, \qquad v = 5\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{x+1}$$

şi să se explice rezultatul.

Gh. Th. Gheorghiu.

Soluţie dată de Dnii: I. V. Mătieş, S. Ţilenschi (Studenţi Cluj), P. Ghişoiu (Elev Şc. Politehnică, Buc.), Negrea Mircea Leonte, Adrian Gheorghiu şi Cezar Coşniţă (Studenţi Buc.)

Calculând derivatele după regulele cunoscute, găsim

$$u' = v' = \frac{5}{1+x^2}$$

ceeace arată că funcţiunile u şi v diferă printr'o constantă.

Pentru a explică acest rezultat, să căutăm direct relaţia între cele două funcţiuni, eliminând pe x.

Avem succesiv

$$\frac{x-1}{x+1} = \operatorname{tg}\frac{v}{5} \quad \therefore \quad x = \frac{1+\operatorname{tg}\dfrac{v}{5}}{1-\operatorname{tg}\dfrac{v}{5}} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{v}{5}\right) = \operatorname{tg} w$$

apoi

$$\operatorname{tg} u = \frac{5x^4 - 10x^2 + 1}{-5x - 10x^3 - x^5} = -\frac{5\operatorname{tg}^4 w - 10\operatorname{tg}^2 w + 1}{5\operatorname{tg} w + 10\operatorname{tg}^3 w + \operatorname{tg}^5 w}.$$

Membrul al doilea reprezintă însă tocmai — cot5w, deci

$$\operatorname{tg} u = -\operatorname{cot} 5w$$

din care deducem

$$\cos(u - 5w) = 0$$

$$u - 5w = u - v - \frac{5\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

sau

$$u - v = \frac{\pi}{4}(4k + 7).$$

Generalizare dată de D-l I. V. Măties şi Adrian Gheorghiu.

Funcţiunile

$$u = \operatorname{arc\,tg} \frac{1 - \dfrac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dfrac{n\ldots(n-3)}{4!}x^4 \ldots}{\dfrac{n}{1}x - \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dfrac{n\ldots(n-4)}{5!}x^5 \ldots}$$

$$v = n \operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{x+1}$$

au aceiaşi derivată şi deci diferă printr'o constantă.

Urmărind mersul de mai sus, eliminarea lui x între u şi v conduce la relaţia

$$\operatorname{tg} u = -\operatorname{cot} nw$$

din care

$$u - v = \frac{\pi}{4}(4k + n + 2).$$

Notă. 1°. Au arătat numai că u şi v au derivatele egale D-nii: C. Ionescu-Ţiu şi C. Dan.

2°. D-l A. Gheorghiu a considerat funcţiunea v mai generală

$$v = n \operatorname{arc\,tg} \frac{x - a}{1 + ax}.$$

M. G.

PROBLEMA 3753. *Să se calculeze suma primilor* n *termeni ai şirurilor:*

$$S_1 = 1 + 21 + 321 + 4321 + 54321 + \ldots$$

$$S_2 = 1 + 41 + 941 + 16941 + 2516941 + \ldots$$

$$S_3 = 1 + 81 + 2781 + 642781 + 125642781 + \ldots$$

Tr. A. Dordea.

Soluţie şi generalizare, date de D-l P. I. Ghişoiu (Şc. Politecnică, Bucureşti).

Numerele cari formează părţile lui S_1 se pot scrie

$$1 = 1$$

$$21 = 1 + 2 \cdot 10$$

$$321 = 1 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 10^2$$

$$4321 = 1 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^3$$

. . . . . .

$n(n-1)\ldots 321 = 1 + 2.10 + 3.10^2 + \ldots + (n-1)\,10^{n-2} + n10^{n-1}$

$\therefore\ S_1 = n + 2(n-1)\,10 + 3(n-2)\,10^2 + \ldots + (n-1)\,[n-(n-2)]\,10^{n-2} + n[n-(n-1)]\,10^{n-1}$

$\therefore\ S_1 = [1 + 2.10 + 3.10^2 + \ldots + n10^{n-1}] - [2.10 + 3.2.10^2 + 4.3.10^3 + \ldots + n(n-1)10^{n-1}]$

sau simbolic

$$S_1 = n\sum_1^n i10^{i-1} - \sum_1^n i(i-1)\,10^{i-1}.$$

In mod analog se găseşte

$$S_2 = n\sum_1^n i^2 10^{i-1} - \sum_1^n (i-1)\,i^2 10^{i-1}$$

$$S_3 = n\sum_1^n i^3 10^{i-1} - \sum_1^n (i-1)\,i^3 10^{i-1}.$$

Calculul lui S_1. Se ştie că

$$(1) \qquad 1 + X + X^2 + \ldots + X^n = \frac{X^{n+1} - 1}{X - 1}.$$

Derivând pe (1) se găseşte

$$(2) \quad 1 + 2X + 3X^2 + \ldots + nX^{n-1} = \frac{nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1}{(X-1)^2}.$$

Derivez pe (2), iar rezultatul îl înmulţesc cu X şi găsesc:

$$(3) \quad \sum_1^n i(i-1)\,X^{i-1} = \frac{n(n-1)\,X^{n+2} - 2(n^2-1)\,X^{n+1} + n(n+1)\,X^n - 2X}{(X-1)^3}.$$

Dacă se înmulţeşte (2) cu n iar din rezultat se scade (3), se obţine suma S_1 într'un sistem de numeraţie X, anume

$$(4) \qquad S'_1 = \frac{nX^{n+2} - (n+2)\,X^{n+1} + (n+2)X - n}{(X-1)^3}.$$

Inlocuind în (4) pe X prin 10, se găseşte că valoarea lui S_1 în sistemul zecimal este

$$S_1 = \frac{n10^{n+2} - (n+2)\,10^{n+1} + 9n + 20}{9^3} = \frac{(9n-2)\,10^{n+1} + 9n + 20}{9^3}.$$

Calculul lui S_2. Inmulţesc pe (2) cu X şi derivez rezultatul.

Obţin

$$(5)\quad \sum_1^n i^2X^{i-1} = \frac{n^2X^{n+2}-(2n^2+2n-1)X^{n+1}+(n+1)^2X^n-X-1}{(X-1)^3}.$$

Derivând pe (5) şi înmulţind rezultatul cu X, se găseşte

$$(6)\ \sum_1^n i^2(i-1)X^{i-1} = \frac{n^2(n-1)X^{n+3}-(3n^3-5n+2)X^{n+2}+(n+1)(3n^2-4)X^{n+1}-n(n+1)^2X^n+2X^2+4X}{(X-1)^4}$$

Dacă se înmulţeşte (5) cu n iar din rezultat se scade (6), se găseşte valoarea lui S_2 într'un sistem de numeraţie X, adică

$$S'_2 = \frac{n^2X^{n+3}-2(n^2+2n-1)X^{n+2}+(n+2)^2X^{n+1}-(n+1)X^2-4X+n}{(X-1)^4}.$$

Făcând aici pe X egal cu 10, se găseşte a doua sumă cerută

$$S_2 = \frac{n^2 10^{n+3}-2(n^2+2n-1)10^{n+2}+(n+2)^2 10^{n+1}-99n-140}{9^4}$$

sau

$$S_2 = \frac{(81n^2-36n+24)10^{n+1}-99n-140}{9^4}$$

Calculul lui S_3. Inmulţind pe (5) cu X şi derivând rezultatul, se găseşte:

$$(7)\ \sum_1^n i^3X^{i-1} = \frac{n^3X^{n+3}-(3n^3+3n^2-3n+1)X^{n+2}+(3n^3+6n^2-4)X^{n+1}-(n+1)^3X^n+X^2+4X+1}{(X-1)^4}.$$

Derivând pe (7) şi înmulţind rezultatul cu X, se găseşte:

$$(8)\quad \sum_1^n (i-1)\,i^3X^{i-1} =$$

$$\frac{(n-1)n^3X^{n+4}-(4n^4-9n^3+7n-2)X^{n+3}+(6n^4+6n^3-15n^2-9n+14)X^{n+2}-(4n^4+8n^3-3n^2-15n-8)X^{n+1}+n(n+1)^3X^n-2X^3-14X^2-8X}{(X-1)^5}$$

Inmulţind pe (7) cu n şi scăzând din rezultat pe (8), se găseşte valoarea lui S_3 într'un sistem de numeraţie X. Anume, se găseşte

$$S'_3 = \frac{n^3X^{n+4}-(3n^3+6n^2-6n+2)X^{n+3}+(3n^3+12n^2+6n-14)X^{n+2}-(n^3+6n^2+12n+8)X^{n+1}+(n+2)X^3+(3n+14)X^2-(3n-8)X-n}{(X-1)^5}$$

sau făcând pe X egal cu 10, avem

$$S_3 = \frac{n^3 10^{n+4}-(3n^3+6n^2-6n+2)10^{n+3}+(3n^3+12n^2+6n-14)10^{n+2}-(n^3+6n^2+12n+8)10^{n+1}+1269n+3480}{9^5}.$$

Numărătorul se poate pune, prin calcule uşor de urmărit, în funcţie de 10^{n+1} aşa cum s'a găsit S_1 şi S_2, adică

$$S_3 = \frac{(729n^3 - 486n^2 + 648n - 348)10^{n+1} + 1269n + 3480}{9^5}.$$

Notă. 1°. D-l H. P. Ionescu-Biss a dat o foarte bună soluţie şi generalizare pe o cale analoagă.

2°. Rezultatele date de D-l P. I. Ghişoiu, în soluţia trimisă de D-sa, au fost puse sub formele găsite în *Gazeta Matematică*, Vol. XXXI, pag. 340, cu ocazia rezolvării problemii 3024.

Gh. B.

PROBLEMA 3759. *Să se arate că dacă* p *e un număr prim, ecuaţia ce se obţine din ecuaţia*

$$(1) \qquad x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1 = 0$$

înlocuind pe $x + \frac{1}{x}$ *prin* y, *are toate rădăcinile reale şi cuprinse între* $+2$ *şi* -2.

D. Georgescu-Piteşti.

Soluţie dată de D-nii: Gh. Th. Gheorghiu-Gladiş (Student), P. Ghişoiu (Elev Şc. Politehnică) şi E. Crăciunescu (Student).

Ecuaţia dată se poate scrie

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} = 0$$

şi are ca rădăcini

$$x_k = \cos\frac{2k\pi}{p} + i \sin\frac{2k\pi}{p} \quad (k = 0, 1, \ldots p - 1).$$

Ecuaţia în y ce se capătă prin transformarea din enunţ, va avea ca rădăcini expresiile

$$I_k = x_k + \frac{1}{x_k} = \left(\cos\frac{2k\pi}{p} + i \sin\frac{2k\pi}{p}\right) + \left(\cos\frac{2k\pi}{p} + i \sin\frac{2k\pi}{p}\right)^{-1}$$

$$\therefore \qquad I_k = 2\cos\frac{2k\pi}{p} \quad (k = 1, 2, \ldots p - 1).$$

Se vede uşor că

$$-2 < I_k < 2.$$

Nota autorului. In „Ex. d'Algèbre" par AUBERT et PAPELIER se demonstrează la pag. 302, pornind dela alte consideraţiuni, că polinomul $P_n = y^n + \frac{1}{y_n}$, unde $y + \frac{1}{y} = x$, are toate rădăcinele reale şi cuprinse între -2 şi $+2$.

M. G.

PROBLEMA 3868. *Să se arate că bisectoarea interioară a unghiului* A *al unui triunghiu* ABC *este dată şi de relaţia*

$$\alpha = \frac{b\sin C}{\sin(\frac{1}{2}A + C)}.$$

M. GHERMĂNESCU.

Soluţie dată de D-rele: ELEONORA ANTONIU (Studentă) şi ZOE ROZOPOL (Lic. Regina Maria, Buc.) precum şi de D-nii: I. ALEXIU, N. ALDEA, N. ANTONESCU, ŞT. ARGEŞEANUL, C. AVRAM, A. BĂDESCU, R. BANDEL, I. BOIAN, I. BORŞ, I. BULANCEA, A. CONSTANTINESCU, C. COŞNIŢĂ, V. CRIVĂŢ, C. DAN, I. DEAC, P. DELEANU, N. DOBROGEANU, N. DONCIU, V. DRĂGUŢ, R. DUMITRAŞCU, D. GEORGESCU, P. GHIŞOIU, M. GROSSU, A. HALPERIN, C. HEYTMANEK, HAR. P. IONESCU, HAR. P. IONESCU-BIS, T. JOVMIR, C. LUPESCU, E. MAREŞ, B. MENDEL, E. MEREUŢĂ, D. MILITARU, C. NATORNIŢĂ, L. NEGREA, I. PAREPEANU, GH. PĂUN, I. POPA, C. POPESCU, A. PURDILĂ, CR. RÂMNICEANU, R. RĂŞCANU, GH. SÂMBOTIN, I. ŞOVA, SLT. A. STAN, A. ŞTEFĂNESCU-GOANGĂ, M. ŢINCRA, M. UNGHEANU, V. VASU, M. VELEA, N. N. VELICESCU, T. GH. VELICESCU, N. ZAHARIA, C. ZITTI şi I. EPURAN.

Fie D piciorul bisectoarei unghiului A; în triunghiul ACD avem

$$\frac{AD}{\sin C} = \frac{AC}{\sin ADC}$$

însă

$$\sin ADC = \sin(180^0 - C - \tfrac{1}{2}A) = \sin(\tfrac{1}{2}A + C)$$

deci,

$$AD = \alpha = \frac{b\sin C}{\sin(\frac{1}{2}A + C)}.$$

Notă. 1°. D-l PETRICĂ I. IOAN (Şc. conductori Cluj) ajunge la relaţia

$$\alpha = \frac{c\sin B}{\sin(\frac{1}{2}A + C)}$$

şi conchide textual:

Relaţia din enunţ este deci **greşită,** *ea nu are loc decât în cazul triunghiurilor isoscele şi echilaterale,* fără să observe că în orice triunghiu

$$c\sin B = b\sin C.$$

Deci... n'ar strică mai multă atenţie la rezolvarea problemelor elementare.

2°. D-l N. O. ZAHARIA arată că relaţia de mai sus a fost stabilită şi de D-sa în articolul „Inegalităţi trigonometrice" G. M. XXXV, pag, 51. Nu era greu aşa ceva, cu atât mai mult cu cât trebuie să fie mulţi alţii, cari au stabilit-o cu mult înaintea noastră, a amândorura!!.

M. G.

PROBLEMA 3899. *Să se demonstreze identitatea*

$$\sin^2(\tfrac{1}{2}A + C) + \sin^2\tfrac{1}{2}A - 2\sin(\tfrac{1}{2}A + C)\sin\tfrac{1}{2}A\cos C = \sin^2 C$$

A, B, C *fiind unghiurile unui triunghiu.*

M. GHERMĂNESCU.

I. *Soluţie* dată de D-nii: N. ALDEA, I. ALEXIU, M. CIOC, HR. DĂSCĂLESCU, R. DUMITRAŞCU, VICTOR IONESCU, T. JOVMIR, E. MEREUŢĂ, I. PAREPEANU şi N. VELICESCU.

Dezvoltând în primul membru şi reducând termenii asemenea, putem scrie succesiv

$$\sin^2\tfrac{1}{2}A - \sin^2\tfrac{1}{2}A\cos^2 C + \sin^2 C\cos^2\tfrac{1}{2}A = \sin^2\tfrac{1}{2}A(1-\cos^2 C) + \sin^2 C\cos^2\tfrac{1}{2}A$$

$$= \sin^2\tfrac{1}{2}A\sin^2 C + \sin^2 C\cos^2\tfrac{1}{2}A = \sin^2 C(\sin^2\tfrac{1}{2}A + \cos^2\tfrac{1}{2}A) = \sin^2 C.$$

II. *Soluţie* dată de D-nii: I. BOIAN, A. CONSTANTINESCU, V. IONESCU, C. LUPESCU, F. MĂRGĂRIT, B. MENDEL, L. NEGREA şi TITU VELICESCU.

Primul membru se poate scrie succesiv

$$\sin(\tfrac{1}{2}A + C)[\sin(\tfrac{1}{2}A + C) - 2\sin\tfrac{1}{2}A\cos C] + \sin^2\tfrac{1}{2}A =$$

$$\sin(\tfrac{1}{2}A + C)[\sin C\cos\tfrac{1}{2}A - \sin\tfrac{1}{2}A\cos C] + \sin^2\tfrac{1}{2}A =$$

$$\sin(\tfrac{1}{2}A + C)\sin(C - \tfrac{1}{2}A) + \sin^2\tfrac{1}{2}A\sin^2 C - \sin^2\tfrac{1}{2}A + \sin^2\tfrac{1}{2}A = \sin^2 C$$

în virtutea identităţii

$$\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta.$$

III. *Soluţie* dată de D-nii: CEZAR COŞNIŢĂ, SUBLT. A. STAN şi A. BĂDESCU.

In orice triunghiu avem relaţia, omogenă în *a, b, c:*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

sau, înlocuind laturile prin valori proporţionale

$$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B \sin C \cos A.$$

Dacă aplicăm acum această relaţiune triunghiului AEC, obţinut ducând bisectoarea AE a unghiului A, în care unghiurile au respectiv valorile C, $\pi - (\frac{1}{2}A + C)$, $\frac{1}{2}A$, obţinem

$$\sin^2 C = \sin^2(\tfrac{1}{2}A + C) + \sin^2 \tfrac{1}{2}A - 2\sin(\tfrac{1}{2}A + C)\sin \tfrac{1}{2}A \cos C$$

adică relaţia din enunţ.

Notă. 1°. Identitatea propusă este de altfel adevărată pentru două unghiuri oarecari α, β, lucru ce se observă uşor din primele două soluţii, observaţie făcută numai de D-l P. I. GHIŞOIU.

2°. D-l M. VELEA a stabilit identitatea propusă, pornind dela relaţia

$$\sin(C + \tfrac{1}{2}A)\sin(C - \tfrac{1}{2}A) = \sin^2 C - \sin^2 \tfrac{1}{2}A.$$

3°. Soluţii mai lungi au trimis D-nii: I. DEAC, N. DOBROGEANU, N. DONCIU, HAR. P. IONESCU-BISS şi GH. PĂUN.

M. G.

---

*PROBLEMA 3901. *Se cer patratele* abcd *şi* cbad *în care* c *e patrat, iar* b *sau* d *arată rangul în număr, în sensul scrisului.*

C. G. LUPESCU.

Soluţie dată de D-nii: VLADIMIR I. CRIVĂŢ, ION GH. POPA (Oltenita), HARALAMB P. IONESCU-BISS (Oltenita) şi N. N. ALDEA (student).

Din problemă rezultă că $b = 2$ şi $d = 4$, nu arată însă simultan rangul în număr, în sensul scrisului. Vom studia deci problema în ambele cazuri.

1) $b = 2$.

Ţinând seamă de ultimele două cifre ale unui patrat perfect, că a şi c sunt cifre semnificative, că c este patrat, vom aveà următorul tablou de valori:

c	1	4			9
d	6	1	4	9	
a	1, 3, 5, 7, 9	2, 4, 6, 8	2, 4, 6, 8	2, 4, 6, 8	1, 3, 5, 7, 9

Cu aceste valori putem formà 22 numere de forma $abcd$, şi anume:

1216, 3216, 5216, 7216, 9216, 2241, 4241, 6241, 8241, 2244, 4244, 6244, 8244, 2249, 4249, 6249, 8249, 1296, 3296, 5296, 7296, 9296.

Dintre aceste, numai 3 sunt patrate perfecte:

$$9216 = 96^2 \; ; \; 6241 = 79^2 \text{ şi } 1296 = 36^2.$$

Cu cifrele acestor numere formăm pe următoarele de forma $cbad$:

1296 , 4261 şi 9216

primul şi ultimul fiind patrate, rezultă că avem soluţiile:

$$abcd = 1296 = 36^2 \text{ şi } cbad = 9216 = 96^2$$

şi vice-versa.

2) $$d = 4.$$

Ţinând seamă că c este patrat, iar cd terminaţie de patrat, rezultă că $c = 4$, deci vom aveà numere de forma: $4b\,a4$.

Dar:

$$64^2 \leqslant 4b\;a4 \leqslant 70^2.$$

Ori ridicând la pătrat numerele dela 64 la 70 găsim numai patratul: $4624 = 68^2$, care însă nu este soluţie, căci numărul:

$$abcd = 2644$$

nu este patrat perfect.

In acest caz problema nu are soluţie.

Au rezolvat problema pe alte căi D-nii: Em. Mereuță, Moțoc D. Mircea și Ioan C. Boian.

Au interpretat diferit problema, dând soluțiuni bune, D-nii: Mihail Velea, A. Em. Bădescu, I. C. Parepeanu, T. Gh. Velicescu și V. I. Ionescu.

Au dat soluțiuni mai lungi sau prin mai multe încercări, D-nii: I. C. Șova și B. Mendel.

Redijarea problemei s'a făcut după soluția D-lui V. Crivăț.

I. L.

PROBLEMA 3957. *Să se rezolve ecuația:*

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0.$$

I. Curchi.

Dacă în relația

$$\cos a + \cos(a + r) + \cos(a + 2r) + \ldots + \cos[a + (n-1)r] = \frac{\sin\frac{nr}{2}}{\sin\frac{r}{2}} \cdot \cos\left[a + \frac{(n-1)r}{2}\right].$$

(Bourlet. Trigonométrie rectiligne, pag. 103)

înlocuim pe a și r prin $2x$, rezultă că rădăcinele ecuației

$$\cos 2x + \cos 4x + \ldots + \cos 2nx = 0 \quad (\alpha)$$

sunt date de ecuațiile

$$(1) \qquad \cos(n+1)x = 0 \quad \text{și} \quad (2) \quad \frac{\sin nx}{\sin x} = 0.$$

Or, $\sin nx$ fiind egal cu

$$C_n^1 \cos^{n-1} x \sin x - C_n^3 \cos^{n-3} x \sin^3 x + C_n^5 \cos^{n-5} x \sin^5 x - \ldots$$

a doua serie de rădăcini este dată de ecuația

$$C_n^1 \cos^{n-1} x - C_n^3 \cos^{n-3} x \sin^2 x + C_n^5 \cos^{n-5} x \sin^4 x - \ldots = 0 \quad (3)$$

care, conținând puteri *pare* de $\sin x$, se poate exprimă rațional în funcție numai de $\cos x$ (înlocuind pe $\sin^2 x$ prin $1 - \cos^2 x$).

Problema 3957 este un caz particular al ecuației (α) pentru $n = 4$.

Ecuațiile (1) și (2) sau (3) devin în acest caz

$$(1') \qquad \cos(4+1)x = \cos 5x = 0 \quad \text{și}$$

$$(2') \quad \frac{\sin 4x}{\sin x} = \frac{2\sin 2x\ \cos 2x}{\sin x} = \frac{4\sin x \cos x\ \cos 2x}{\sin x} = 4\cos x \cos 2x = 0$$

sau

$$(3') \quad \frac{4}{1}\cos^3 x - \frac{4\times 3\times 2}{1\times 2\times 3}\cos x \sin^2 x = 4\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$= 4\cos x\,(2\cos^2 x - 1) = 4\cos x \cos 2x = 0.$$

Direct, problema 3957 se rezolvă punând succesiv ecuația dată E sub forma

$$E = (\cos 8x + \cos 2x) + (\cos 6x + \cos 4x) = 2\cos 5x \cdot \cos 3x + 2\cos 5x \cdot \cos x$$

$$= 2\cos 5x\,(\cos 3x + \cos x) = 4\cos 5x \cdot \cos 2x \cdot \cos x = 0$$

$$\therefore \qquad \cos 5x = 0 \quad , \quad \cos 2x = 0 \quad , \quad \cos x = 0$$

$$\therefore \quad 5x = 2m\pi \pm \frac{\pi}{2} \quad , \quad x_1 = \frac{1}{10}(2h \pm 1)\,\pi = \frac{k\pi}{10}$$

$$2x = 2m\pi \pm \frac{\pi}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{1}{4}(2h \pm 1)\,\pi = \frac{k\pi}{4}$$

$$x = 2m\pi \pm \frac{\pi}{2} \quad , \quad x_3 = \frac{1}{2}(2h \pm 1)\,\pi = \frac{k\pi}{2}$$

k fiind un număr întreg, impar, pozitiv sau negativ.

Au rezolvat ecuația generalizată (α), luând însă $\sin nx = 0$ (în loc de $\sin nx/\sin x = 0$), Domnii: Titu Gh. Velicescu, Vladimir I. Crivăț, Petre I. Ghișoiu, N. N. Aldea, Haralamb Ionescu-Biss, Emilian Mereuță, Floricel V. N. Șerbănescu și Nicolae N. Mihăileanu.

Au rezolvat ecuația propusă D-ra Eleonora Antoniu și D-nii: Sub.-Lt. Aurelian I. Stan, Iulian Alexiu, Mircea Leonte, A. Negrea și Mihail Velea.

Au rezolvat parțial problema 3957 Domnii: Traian Puta, Iuliu Deac, I. C. Parepeanu, Ștefan Cuciureanu, Vasu Vasile, Victor I. Ionescu și Ioan S. Antoniu.

Lt.-Colonel G. Potopeanu.

PROBLEMA 3962. *Se dă fracţia 12/25. Să se mai scrie o cifră după 12 şi una după 25, aşa ca noua fracţie cu trei cifre la numărător şi trei cifre la numitor să se transforme exact în fracţie zecimală.*

I. IONESCU.

O fracţiune ordinară *nereductibilă* se transformă exact în fracţie zecimală când numitorul său, descompus în factori primi, conţine ca factori primi numai pe 2 şi 5 sau numai pe unul din aceştia. Numitorul putând fi unul din numerele 250, 251, ... 259 vom îndepărtà pe cele ce nu conţin nici unul din aceşti factori, de oarece numărătorul fiind mai mic ca numitorul, oricât s'ar simplificà fracţiunea ea va aveà la numitor alţi factori primi decât 2 şi 5. Vom reţine dar ca numitori numerele 250, 252, 254, 255. 256, 258, care descompuse în factori primi ne dau:

$250=2\times5^3$; $252=2^2\times63$; $254=2\times127$; $255=5\times51$; $256=2^8$; $258=2\times129$

De acì se vede că dacă luăm la numitor pe 250 sau pe 256 numărătorul poate fi oricare şi deci după 12 dat putem scrie pe oricare din cele zece cifre 0, 1, 2,...9. Dacă luăm pe 252 trebuie ca în numărător să avem factorul 63. Căutând să împărţim pe 12* prin 63 se găseşte că a treia cifră a numărătorului e 6 şi de acì ese fracţia 126/252. Dacă luăm la numitor pe 254 se vede imediat că numărătorul trebuie să fie 127. Dacă luăm pe 255, numărătorul trebuie să se împartă cu 51. Dar $2 \times 51 < 12^*$ şi $3 \times 51 > 12^*$. Deci nu avem soluţie cu acest numitor. In fine dacă luăm numitorul 258 se vede imediat că numărătorul trebuie să fie 129.

Problema admite dar următoarele 23 soluţiuni:

120/250=0,48. 121/250=0,484. 122/250=0,488. 123/250=0,492.

124/250=0,496. 125/250=0,5. 126/250=0,504. 127/250=0,508.

128/250=0,512. 129/250=0,516.

126/252=0,5.

127/254=0,5.

120/256=0,46875. 121/256=0,47265625. 122/256=0,4765625.
123/256=0,48046875, 124/256=0,484375. 125/256=0,48828125.
126/256=0,4921875, 127/256=0,49609375. 128/256=0,5,
129/256=0,50390625.

129/258=0,5.

MIHAIL VELEA.

D-nii: C. RUSU, H. IONESCU, V. CRIVĂŢ, N. Z. POPA şi N. N. MIHĂILEANU au rezolvat complect problema.

D-nii: A. C. CONSTANTINESCU şi G. A. CIOCOIU au dat numai soluţiile cu numitorii 250 şi 256, neţinând seama de fracţii reductibile.

D-nii: M. CHIŢU, I. PAREPEANU, S. CĂLINESCU, C. ANDREESCU şi N. MAREŞ au dat soluţiile cu numărul 250 şi pe cele egale cu 0,5.

D-nii: I. POMPEANU, C. VÂRLAN şi C. CINSKY au dat soluţiile egale cu 0,5.

D-l V. I. IONESCU a dat soluţia 125/250.

*EXERCIŢII

28. Se cer patratele:

$$abcdde = N^2 \quad , \quad abedde = (N+2)^2.$$

HARALAMB P. IONESCU-BISS.

R. Prin diferenţă avem:

$$1000\,(e-c) = 4\,(N+1) \quad \therefore \quad 250\,(e-c) = N+1$$

$$\therefore \quad N = 10m + 9 \quad \therefore \quad 25\,(e-c) = m+1$$

cum: $329 \leqslant N \leqslant 999$

avem: $32 \leqslant m \leqslant 99$

cum: $m + 1 = M25$

avem: $m = 49 \;,\; 74$

sau $N = 499 \;,\; 749.$

Soluţii sunt deci:

$$499^2 = 249001 \quad , \quad 749^2 = 561001$$

$$501^2 = 251001 \quad , \quad 751^2 = 564001.$$

Primele două nu satisfac condiţiile problemei şi deci numai ultimele două sunt soluţii.

29. Dacă punem $a/b = m$, atunci există relaţiunea:

$$\left(\frac{a+m}{b+1}\right)^2 + \frac{a+m}{b+1-(a+m)} + \frac{a+m}{(b+1)+(a+m)} = \frac{(1-m^2)\,m^2+2m}{1-m^2}\,.$$

ILIE FOCA.

R. Dacă notăm respectiv cu A, B, C cei trei termeni din primul membru al relaţiunii şi aplicăm proporţiei $a/b = m/1$ proprietăţile cunoscute, obţinem:

$$A = m^2 \;;\; B = \frac{m}{1-m} \;;\; C = \frac{m}{1+m}\,.$$

Inlocuind aceste valori în relaţia propusă şi efectuând operaţiile din primul membru, obţinem imediat verificarea egalităţii.

PROBLEME PROPUSE

*3981. Din fracţia 840/108 se scade o fracţie care are numărătorul 100. Care este numitorul fracţii scăzătoare, ştiind că restul e un număr intreg şi care este acel rest?

I. IONESCU.

*3982. Numărul de ordine *abcd* al unei probleme propuse, publicată în 1929 — 1930 în «Gazeta Matematică», se bucură de următoarele proprietăţi:

1) $$a + b + c + d = 13.$$

2) Numerele *ab, bc, ca* sunt divizibile prin 13.

Câte probleme, al căror număr de ordine se bucură de aceleaşi proprietăţi, s'au mai publicat în «Gazeta Matematică«?

Câte se vor mai publică?

MIRON NICOLESCU.

*3983. Fie $E\left(\frac{N}{i}\right)$ simbolul lui LEGENDRE, adică numărul întregilor cuprinşi în fracţia $\left(\frac{N}{i}\right)$ şi fie $n(N)$ numărul divizorilor lui N; să se arate că:

$$\sum_{i=1}^{i=N}\left[E\left(\frac{N}{i}\right) - n(i)\right] = 0.$$

IOAN B. FLORESCU.

*3984. Se consideră tetraëdrul SABC în care facem o secţiune oarecare DEF (punctele D, E, F aflându-se respectiv pe SA, SB, SC). Dedesubtul acestei secţiuni şi paralel cu baza ABC facem o a doua secţiune D'E'F' (punctele D', E', F' corespund punctelor D, E, F).

Fie G, H, K intersecţiunile diagonalelor patrulaterelor DD'E'E, E'F'F, FF'D'D, iar M, N, P punctele unde dreptele SG, SH, SKF, întâlnesc pe AB, BC, CA.

Să se arate că dreptele AN, BP, CM sunt concurente.

CEZAR COŞNIŢĂ.

*3985. In planul unui patrulater *complect*, există o direcţiune, şi numai una, ale cărui izogonale faţă de unghiurile patrulaterului sunt concurente.

ADRIAN C. GHEORGHIU.

*3986. Din rezolvarea şi discuţia ecuaţiei în x,

$$\frac{x^2 - x + 2}{x^2 + ax + 1} = y,$$

să se găsească maximul şi minimul lui y, a fiind un parametru variabil. Să se determine a, astfel ca maximu lui y să fie $\frac{7}{3}$ şi să se găsească valoarea lui x corespunzătoare.

Să se figureze, fără ajutorul derivatelor, curba reprezentativă a variaţiei funcţiunii y în acest caz particular.

N. ABRAMESCU.

*3987. Se dau ecuaţiile

$$(b + c - a - d)x^2 + 2(ad - bc)x + bc(a + d) - ad(b + c) = 0$$

$$(c + a - b - d)x^2 + 2(bd - ca)x + ca(b + d) - bd(c + a) = 0$$

$$(a + b - c - d)x^2 + 2(cd - ab)x + ab(c + d) - cd(a + b) = 0.$$

1°. Să se dovedească direct că una din aceste ecuaţii are neapărat rădăcini imaginare; iar celelalte două, rădăcini reale.

2°. E_1, E_2, E_3 fiind membrii întâi ai ecuațiilor precedente, să se arate că între pătratele lor există o identitate de forma

$$k_1 E_1^2 + k_2 E_2^2 + k_3 E_3^2 \equiv 0,$$

unde k_1, k_2, k_3 depind numai de a, b, c, d.

D. BARBILIAN.

*3988. Să se rezolve un triunghiu oarecare la care se cunoaște

$$a^2 - b^2 = k,$$

unghiul C și suprafața S a triunghiului.

Aplicație:

$$k = 24 \quad , \quad C = 30^0 \quad \text{și} \quad S = 8{,}75 m^2.$$

IULIU DEAC.

3989. Se consideră o hiperbolă echilateră cu centrul în O și cu vârfurile în A și A'. O paralelă la AA' taie ramura care trece prin A în M și pe aceà care trece prin A' în N. Fie C și D punctele în care MN întâlnește tangentele în A și A' la hiperbolă.

Se cere:

1°. Să se demonstreze că punctele comune dreptelor OC, A'M și OD, AN se află pe un cerc cu centrul în O.

2°. Să se găsească locul geometric al proecției lui D pe AN și al proecției lui N pe OD.

COL. GH. BUICLIU.

*3990. Un motor cu explozie cumpărat cu 400.000 lei, este garantat pentru 500 ore de funcționare, consumația lui costând în mediu 3 lei pe *cal — oră*. Vânzătorul propune însă cumpărătorului să-i furnizeze, pentru acelaș preț, acelaș motor, însă cu un alt carburator, care ar micșorà consumația motorului cu $30^0/_0$, dar ar reduce garanția de funcționare cu $20^0/_0$. Se întreabă ce alternativă va alege cumpărătorul?

CĂPITAN I. LINTEȘ.

Articolele, notele şi problemele însemnate cu * se referă la matematicile elementare (cursul de liceu).

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Abramescu Mariana (3868, 82, 946, 54, 68); *Aldea N. N.* (3946, 52); *Andreescu V. C.* (3967, 68); *Arşavski Alexe* (3649, 755, 900); *Avram N. C.* (3956); *Bădescu Em. A.* (3948, 67); *Buţan A.* (3967); *Călinescu A. Gabriel* (3967, 68, N, P); *Chiţu P. Marin* (P); *Cinsky V. C.* (3939, 56, 60, 67, 68, 70); *Cioc Marius* (3960); *Cojocaru I.* (3967, 68, 79); *Crăciunescu E.* (3656, 759); *Crivăţ I. Vl.* (3706, 83, 946, 55, 68, P); *Cuciureanu St.* (3955, 60, 78); *Dobrescu St.* (E, P); *Dobrogeanu N.* (N); *Donciu N.* (3935, 56, 60, P); *Dumitraşcu R.* (3955, 67); *Dumitrescu N. Romeo* (3956, 68); *Emanoil I.* (3956); *Epureanu A. I.* (3892, 948, 67); *Ghişoiu Petre* (3960); *Gluşco N.* (3957); *Halperin H. A.* (3814, 18, 39, 54, 95, 925, 26, 55, 67, 68); *Ionescu-Biss P. H.* (3926, 935, 36, 39, 46, 52, 68, N); *Ionescu I. V.* (3965, 67, 78); *Ionescu M.* (3892, 948, 60, 67); *Licherdopol Maria* (3895, 965); *Lupescu Gh. C.* (3823, 39, 68, 89, 95, 938, 55, 56, 65, 67); *Mureş Emilian* (3957, 68); *Mătieş I.* (N, P); *Mereuţă Em.* (3902, 78); *Mihăileanu N. N.* (2643, 3936, 38, 56, 67, 68, N); *Millea G. E.* (3839, 67, 79, 82, 88, 89); *Moţoc D. Mircea* (3814, 88, 95, 926, 55, 67, N); *Murăroiu I.* (3600, 967); *Negrea A. Mircea L.* (3970); *Paliţa Const.* (3955, 60, 78); *Parepeanu I.* (3779, 925, 55, P); *Popa Gh. I.* (3968); *Popa Z. N.* (3965); *Popescu N. Corneliu* (3823, 26, 28, 54, 82, 95); *Popescu V.* (R); *Puta Traian* (3833, 946, 74, 78, 79); *Roşu Al. Al.* (1933, 2274, 3666, 818, C, N, P, R); *Rusu D. C.* (3956, 68); *Şerbănescu Fl.* (3946, 67); *Stan I. Aur. Sublt.* (3819, 67, 902, 46, 55, 67, 78, N, P); *Théba ult V.* (A); *Truflnescu N. C.* (3965, 67, 74); *Varlam P.* (3967); *Vasu Vasile* (3946, 74, 78); *Velea Mihail* (3950, 79, E); *Velicescu Gh. Titus* (3819, 946); *Velicescu N. N.* (P, R); *Vissarion C. I. V.* (3967, 68, 78); *Zamfirescu Gh. I. Sublt.* (3551, 965, 67, 68, P).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor trată mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac deasemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani completi broşaţi cu preţul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX şi XXI care se vând cu preţul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV şi XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecţiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediţia IV revăzută şi adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamaţiunile şi cererile pentru cărţi din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Regiei Publice Comerciale «Monitorul Oficial şi Imprimeriile Statului», B-dul Elisabeta 29, Bucureşti I.

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii şi orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie şi expediţie, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călugărei 23, Bucureşti 4.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXVI.

NUMĂRUL 7. — MARTIE 1931.

BIBLIOTECA CENTRALĂ

SUMARUL

1. Sur trois triangles homothétiques *V. Thébault.*
2. Asupra unor relaţiuni metrice . . *Şerban A. Gheorghiu.*
3. Asupra rezolvării ecuaţiunei $Ax^2 + By^2 = Cz^2$ în numere întregi . . *Ioan B. Florescu.*
4. Hipocicloida cu trei rebrusmente şi ortopolul . . . . . *Lt. Mihail I. Focşeneanu.*
5. Concursul „Gazetei Matematice".
6. Note matematice: 25 — 26.
7. Bibliografie.
8. Cereri: 202.
9. Diverse.
10. Probleme rezolvate: 2773, 3226, 3444, 3676, 3897, 3927, 3946, 3956.
11. Exerciţii: 30 — 34.
12. Probleme propuse: 3943, 3991 — 4000.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

REGIA M. O., IMPRIMERIA NAŢIONALĂ

1931

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică“** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXXVI se compune din D-nii: Colonel **Gh. I. Liteanu** dela Marele Stat Major al Armatei; **G. A. Nichifor**, Doctor în Matematici, Conferenţiar la Universitatea din Bucureşti; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Regiei Publice Comerciale «Monitorul Oficial şi Imprimeriile Statului», Cassier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice“ se vor trimite D-lui GH. ILIESCU, Inginer, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijă în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *„Gazeta Matematică“* („Monitorul Oficial“. B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

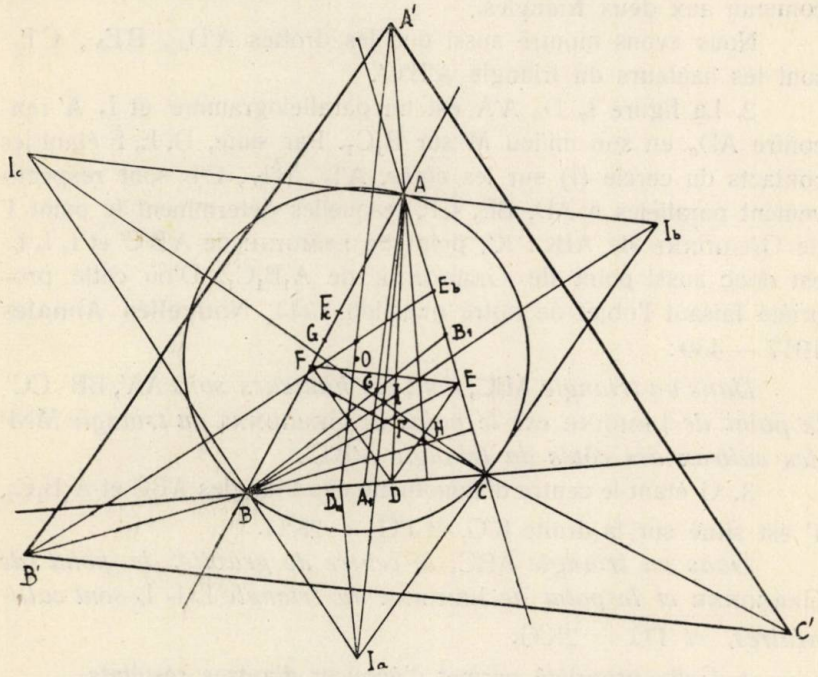
Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 310, 33, 55, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 82, 553, 87, 650, 79, 711, 29, 53, 64, 807, 76, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 233, 338, 53, 82, 405, 22, 30, 39, 56, 66, 77, 502, 03, 45, 56, 77, 80, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 65, 84, 92, 95, 709, 13, 17, 35, 58, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 56, 3005, 45, 69, 81, 127, 50, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 07, 08, 09, 10, 16, 18, 20, 50, 61, 79, 405, 12, 24, 25, 45, 72, 89, 91, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 20, 22, 25, 27, 32, 46, 47, 57, 65, 79, 81, 82, 84, 94, 99, 700, 03, 20, 33, 36, 80, 84, 93, 99, 804, 08, 10, 29, 35, 36, 44, 45, 48, 53, 64, 70, 80, 96, 98, 908, 09, 13, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 33, 34, 37, 40, 44, 49, 50, 51, 59, 64, 71, 72, 73, 75, 76, 77, 80, 83, 85, 87, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 4000.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procură dela *„Gazeta Matematică“* („Monitorul Oficial“. B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

Avem plăcerea de a anunţă că dela 11 martie 1931 mai fac parte din Societatea noastră şi D-nii: **Em. Arghiriade**, licenţiat în matematici, **Virgil Ghiţescu**, licenţiat în matematici, **Al. Niculescu**, licenţiat în matematici şi Căpitan **N. Popp**.

SUR TROIS TRIANGLES HOMOTHÉTIQUES [1])

1. Dans les **Nouvelles Annales de Mathématiques,** 1915 — pp. 193 — 213, puis 1916 — pp. 213 — 217, nous avons donné une étude de la figure se rapportant à la question 1967bis posée par J. NEUBERG dans **Mathesis,** 1914 — 144. Ce sujet ne nous paraît pas complètement épuisé et nous croyons qu'il mérite encore l'attentions du lecteur.



Rappelons brièvement la questions et les propriétés qui nous ont suggéré d'autres résultats.

H *étant l'orthocentre du triangle* ABC, *on prolonge les droites* HA, HB, HC *des quantités* $AA' = r_a$, $BB' = r_b$, $CC' = r_c$, *où* r_a, r_b, r_c, *désignent les rayons des cercles exinscrits à* ABC. *Trouver quelques propriétés du triangle* A'B'C'.

1) Cette Note, que nous retrouvons dans nos papiers, a été écrite en Novembre 1918 pour les lecteurs des **Nouvelles Annales de Mathématiques.** Les difficultés de l'après-guerre, qui ont déterminé des interruptions successives, puis la disparition de la belle Revue française, en ont empêché la parution.

(V. T.).

Désignons par I_a, I_b, I_c les centres des cercles exinscrits au triangle ABC; A_1, B_1, C_1 les milieux des côtés; O, H, G le centre du cercle circonscrit, l'orthocentre et le centre de gravité; D, E, F; D_a, E_a, F_a; . . . , les contacts avec BC, CA, AB des cercles tritangents (I), (I_a), (I_b), (I_c) au triangle; K le point de LEMOINE, Γ le point de GERGONNE.

Nous avons prouvé la similitude des triangles A'B'C' et I_a I_b I_c, le centre d'homothétie étant le point de LEMOINE K' commun aux deux triangles.

Nous avons montré aussi que les droites $A'D_a$, $B'E_b$, $C'F_c$ sont les hauteurs du triangle A'B'C'.

2. La figure I_a D_a A'A est un parallélogramme et I_a A' rencontre AD_a en son milieu M sur B_1C_1. Par suite, D, E, F étant les contacts du cercle (I) sur les côtés, $A'I_a$, $B'I_b$, $C'I_c$ sont respectivement parallèles à AD, BE, CF, lesquelles déterminent le point Γ de GERGONNE de ABC. K', point de LEMOINE de A'B'C' et I_a I_b I_c est donc aussi point de GERGONNE de $A_1B_1C_1$. D'où cette propriété faisant l'objet de notre question 2344, **Nouvelles Annales** 1917 — 439:

Dans un triangle ABC, *dont les hauteurs sont* AA', BB', CC', *le point de* LEMOINE *est le point de* GERGONNE *du triangle* MNP *des milieux des côtés du triangle* A'B'C'.

3. G étant le centre d'homothétie des triangles ABC et $A_1B_1C_1$, Γ est situé sur la droite K'G, et $\overline{\Gamma G} = 2\overline{K'G}$.

Dans un triangle ABC, *le centre de gravité, le point de* GERGONNE *et le point de* LEMOINE *du triangle* I_a I_b I_c *sont collinéaires, et* $\overline{\Gamma G} = 2\overline{K'G}$.

4. Cette propriété permet d'énoncer d'autres résultats.

Dans un triangle ABC *la droite qui joint le point de* GERGONNE *à l'orthocentre est parallèle à la droite joignant le centre du cercle circonscrit au point de* LEMOINE *du triangle* I_a I_b I_c, *et* $\overline{\Gamma H} = 2\overline{OK'}$.

L'orthocentre H *du triangle* ABC, *le point de* LEMOINE K' *du triangle* I_a I_b I_c *et le symètrique* Γ' *du point de* GERGONNE Γ *par rapport à* O, *sont collinéaires, et* $\overline{HK'} = \overline{K'\Gamma'}$.

Dans un triangle la droite qui joint les points de LEMOINE K *et* K' *de* ABC *et* I_a I_b I_c *est parallèle à celle qui joint*

le point Γ *de* GERGONNE *au réciproque* H′ *de l'orthocentre* H ; $\overline{\Gamma H'} = 2\overline{KK'}$.

Dans un triangle, le symétrique Γ″ *du point de* GERGONNE *par rapport au point* K *de* LEMOINE, *le point* K′ *de* LEMOINE *du triangle* $I_a\ I_b\ I_c$ *et le réciproque* H′ *de l'orthocentre* H *sont collinéaires ;* $\overline{H'K'} = \overline{K'\Gamma''}$.

5. Les triangles A′B′C′ et DEF sont aussi homothétiques. Leur centre de similitude est un point L de IH tel que

$$IL : LH = r : (2R + r),$$

R et *r* étant les rayons des cercles (O) et (I).

Mais ce point L est également situé sur la droite qui joint le point K′ de LEMOINE du triangle A′B′C′ au point de LEMOINE de DEF. Or, il est évident que ce dernier point se confond avec le point Γ de GERGONNE de ABC.

Le centre de similitude L *de* A′B′C′ *et de* DEF *est donc situé sur la droite qui joint le centre de gravité* G *au point de* GERGONNE Γ *de* ABC. L *est l'intersection de* IH *et* GΓ.

Il s'ensuit que :

Dans un triangle la droite qui joint le centre du cercle inscrit au point de GERGONNE *est parallèle à celle qui joint l'orthocentre au point de* LEMOINE *du triangle des centres des cercles exinscrits.*

6. Les résultats obtenus aux paragraphes 3 et 5 subsistent, pour une figure plus générale.

Sur les côtés BA et CA, CB et AB, AC et BC d'un triangle on porte une même longueur

$$\overline{A\alpha} = \overline{A\alpha'} = \overline{B\beta} = \overline{B\beta'} = \overline{C\gamma} = \overline{C\gamma'} = l.$$

Les droites $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ forment un triangle A′B′C′ semblable aux triangles $I_a\ I_b\ I_c$ et DEF.

Le centre d'homothétie K′ de A′B′C′ et $I_a\ I_b\ I_c$ a pour coordonnées normales dans l'un ou l'autre triangle des expressions proportionnelles à sin I_a, sin I_b, sin I_c. Donc *le centre d'homothétie est le point de* LEMOINE *de ces deux triangles.*

Ce centre d'homothétie est permanent quelle que soit la longueur l.

Observons aussi par ses coordonnées barycentriques le centre L d'homothétie des triangles A'B'C et DEF.

L'équations de A'D est

$$\begin{vmatrix} x & 0 & -2al & -a^2 \\ y & p-c & 2(p-c)\,l & +ab \\ z & p-b & 2(p-b)\,l & +ac \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$(b-c)(p-a)x - (a+2l)(p-b)y + (a+2l)(p-c)z = 0.$$

Par suite les droites A'D, B'E, C'F concourent en un point L dont les coordonnées barycentriques sont

$$x = k \cdot \frac{a+2l}{p-a}\,;\; y = k \cdot \frac{b+2l}{p-b}\,;\; z = k \cdot \frac{c+2l}{p-c},$$

k étant un facteur de proportionnalité déterminé par l'identité :

$$x + y + z = 1.$$

Le lieu de L, obtenu en éliminant k et l dans les valeurs précédentes, est donc

$$\Sigma\,(b-c)(p-a)\,x = 0, \text{ ou } \Sigma\,(\cos B - \cos C)\,x = 0\,;$$

c'est-à-dire *la droite* GΓ *qui joint le centre de gravité au point de* Gergonne *de* ABC.

D'ailleurs, *géométriquement,* les triangles A'B'C', I_a I_b I_c et DEF étant homothétiques deux à deux, ont leurs centres d'homothéties collinéaires. Comme K' et Γ sont deux homologues, L est aussi sur K'Γ c'est-à-dire sur GΓ.

V. Thébault
Le Mans (France).

ASUPRA UNOR RELAȚIUNI METRICE

In cele ce urmează, ne propunem a stabili relațiunile — bine cunoscute — ce exprimă condițiunile necesare și suficiente pentru ca să existe triunghiuri sau patrulatere înscrise într'un cerc (c) și circumscrise unui alt cerc (c').

1. Fie (c) și (c') două conice, iar M un punct mobil pe conica (c). Fie deasemeni, P și Q punctele unde tangentele duse din M la conica (c') tae din nou conica (c). Se știe că, punctul M variind pe conica (c), coarda PQ înfășoară o conică (Γ) aparținând fascicolului punctual definit de conicele (c) și (c'). In particular, dacă există triunghiuri înscrise în conica (c) și circumscrise conicei (c'), conica (Γ) se confundă cu conica (c'). Deasemeni, dacă există patrulatere înscrise în conica (c) și circumscrise conicei (c') conica (Γ) re reduce la un punct.

Vom examină succesiv, fiecare din aceste două cazuri.

2. Fie J unul din punctele comune conicelor (c) și (c'), iar A cel de al doilea punct de intersecție al tangentei în J la (c') cu conica (c). Dacă există triunghiuri înscrise în conica (c) și circumscrise conicei (c') rezultă din teorema amintită mai sus, că *tangenta în punctul* A, *la conica* (c) *este tangentă și conicei* (c'). Aceasta este dealminteri condițiunea necesară și suficientă pentru ca să existe triunghiuri înscrise în conica (c) și circumscrise conicei (c').

In cele ce urmează, admitem că există asemenea triunghiuri. Vom presupune, în particular, că conicele (c) și (c') sunt cercuri și că punctul J este unul din punctele ciclice ale planului. Fie acum, O și I, R și r respectiv centrele și razele cercurilor (c) și (c'). Tangenta în punctul J la cercul (c') este dreapta isotropă JI. In sfârșit, fie B punctul de contact cu cercul (c') al tangentei duse în A la cercul (c). Unghiurile OAB și ABI fiind drepte, rezultă că avem:

$$\overline{AB}^2 = \overline{OI}^2 - (R \pm r)^2 \text{ [1]}.$$

Deasemeni, dreapta AI fiind o isotropă avem $\overline{AI} = 0$, deci

$$\overline{AI}^2 = AB^2 + r^2 = 0.$$

1) Dublul semn din această egalitate, provine din faptul că punctele O și I pot fi de aceeaș parte, sau de o parte și de alta a dreptei AB.

Sau, în definitiv

$$\overline{OI}^2 = R^2 \pm 2Rr.$$

Se obține astfel, relațiunea lui EULER.

3. Fie J′ cel de al doilea punct ciclic al planului, A′ cel de al doilea punct de intersecție al dreptei J′I cu cercul (c) și (B′) punctul de contact al tangentei în A′ la cercul (c), cu cercul (c'). Rezultă, din însăș definițiunea diferitelor elemente ce intervin, că dreapta AA′ este axul radical al cercului (c) și al cercului de rază nulă confundat cu punctul I. Deasemeni, punctul S comun tangentelor AB și A′B′ este — în acelaș timp — polul dreptei AA′ în raport cu cercul (c) și unul din centrele de similitudine ale cercurilor (c) și (c'). Deducem de aci următoarea propoziție:

Se consideră două cercuri (c) *și* (c') *cu centrele respectiv în punctele* O *și* I. *Fie* Δ *axul radical al cercului* (c) *și al cercului de rază nulă confundat cu punctul* I. *Condițiunea necesară și suficientă pentru ca să existe triunghiuri înscrise în cercul* (c) *și circumscrise cercului* (c') *este ca polul* S *al dreptei* Δ *în raport cu cercul* (c) *să fie unul din centrele de similitudine ale cercurilor* (c) *și* (c').

Dealminteri, această propoziție poate fi demonstrată utilizând numai elemente reale.

In adevăr, însemnând — ca mai sus — cu S polul axului radical Δ în raport cu cercul (c), se găsește cu ușurință

$$\overline{OS} = \frac{2R^2 \cdot \overline{OI}}{R^2 + \overline{OI}^2},$$

$$\overline{IS} = \frac{R^2 - \overline{OI}^2}{R^2 + \overline{OI}^2} \cdot \overline{OI}.$$

Prin urmare, dacă S este centrul interior de similitudine al cercurilor (c) și (c') avem

$$\frac{\overline{OS}}{\overline{IS}} = -\frac{R}{r}$$

sau

$$\overline{OI}^2 = R^2 + 2Rr.$$

Deasemeni, dacă punctul S este centrul exterior de similitudine al cercurilor (c) şi (c') avem

$$\frac{\overline{OS}}{\overline{IS}} = \frac{R}{r}$$

sau

$$\overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr. \qquad \text{q. e. d.}$$

4. Să presupunem acum, că există patrulatere înscrise în cercul (c) şi circumscrise cercului (c'). Se ştie că punctul de întâlnire al diagonalelor unor astfel de patrulatere are aceeaş polară, în raport cu cercurile (c) şi (c'). Prin urmare, acest punct este fix şi coincide cu unul din punctele limită ale fascicolului punctual definit de cercurile (c) şi (c'). Cu alte cuvinte:

Fie M *un punct mobil pe cercul* (c), *iar* P *şi* Q *cele de al doilea puncte de intersecţie ale tangentelor duse din* M *la cercul* (c') *cu cercul* (c). *Dacă există patrulatere înscrise în cercul* (c) *şi circumscrise cercului* (c'), *coarda* PQ *trece printr'un punct fix. Acest punct fix, coincide cu unul din punctele limită ale fascicolului punctual definit de cercurile* (c) *şi* (c').

Păstrând aceleaş notaţiuni ca mai sus, rezultă că punctul comun tangentelor în A şi A' la cercul (c) este unul din punctele limită ale fascicolului de cercuri format de cercurile (c) şi (c'). Deci:

Se consideră două cercuri (c) *şi* (c') *cu centrele respectiv în punctele* O *şi* I. *Fie* Δ *axul radical al cercului* (c) *şi al cercului de rază nulă confundat cu punctul* I. *Condiţiunea necesară şi suficientă pentru ca să existe patrulatere înscrise în cercul* (c) *şi circumscrise cercului* (c') *este ca polul dreptei* Δ, *în raport cu cercul* (c), *să fie unul din punctele limită ale fascicolului punctual de cercuri definit de cercurile* (c) *şi* (c').

Se deduce, cu uşurinţă, de aci relaţiunea dintre razele R şi r ale cercurilor (c) şi (c') şi distanţa $\overline{OI}$ a centrelor, care exprimă că există patrulatere înscrise în cercul (c) şi circumscrise cercului (c'). In adevăr, S fiind polul dreptei Δ în raport cu cercul (c), se obţine ca la § 3

$$\overline{OS} = \frac{2R^2 \cdot \overline{OI}}{R^2 + \overline{OI}^2}.$$

Pe de altă parte, fie L şi L' punctele limită ale fascicolului format de cercurile (c) şi (c'). Lungimele $\overline{OL}$ şi $\overline{OL'}$ sunt rădăcini ale ecuaţiei

$$x^2 - \frac{R^2 + \overline{OI}^2 - r^2}{\overline{OI}} x + R^2 = 0.$$

Or, dacă există patrulatere înscrise în cercul (c) şi circumscrise cercului (c'), lungimea OS este rădăcină a acestei ecuaţiuni. In acest caz, avem

$$(R^2 - \overline{OI}^2)^2 = 2r^2 (R^2 + \overline{OI}^2).$$

ŞERBAN A. GHEORGHIU.

ASUPRA REZOLVĂRII ECUAŢIUNEI $Ax^2 + By^2 = Cz^2$ IN NUMERE INTREGI

Vom căutà mai întâiu soluţiunile în numere întregi ale ecuaţiei:

$$Ax^2 + By^2 = Cz^2 \qquad (1)$$

în care

$$C = A + B.$$

Fie

$$A = p \quad B = q \quad C = p + q.$$

Presupunem fără să restrângem generalitatea problemei, că p şi q sunt primi între ei, ceeace se poate obţine întotdeauna. Facem de asemenea remarca, că dacă ecuaţiunea (1) în forma ei cea mai generală admite soluţiunea x_1, y_1, z_1, admite şi soluţiunea

$$\pm \frac{\beta x_1}{\alpha}, \pm \frac{\beta y_1}{\alpha}, \pm \frac{\beta z_1}{\alpha}$$

unde β este un număr întreg oarecare şi α este cel mai mare comun divizor al numerilor x_1, y_1, z_1.

Ecuaţiunea (1) se poate scrie

$$p(x^2 - z^2) = q(z^2 - y^2).$$

Sau

$$p(x - z)(x + z) = q(z - y)(z + y). \qquad (2)$$

Fie

$$p = p_1 \cdot p_2 \quad \text{şi} \quad q = q_1 \cdot q_2$$

şi fie k cel mai mare comun divizor al numerilor $(x-z)$ şi $(z-y)$ şi l cel mai mare comun divizor al numerilor $(x+z)$ şi $(z+y)$.

Din ecuaţia pusă sub forma (2), deducem următoarea descompunere:

$$\begin{aligned} z-y &= k\,.\,p_1\,.\,a & z+y &= l\,.\,p_2\,.\,b \\ x-z &= k\,.\,q_1\,.\,c & x+z &= l\,.\,q_2\,.\,d \end{aligned} \tag{3}$$

unde

$$a\,.\,b = c\,.\,d. \tag{4}$$

Din sistemul de ecuaţiuni (3) deducem:

$$x = \tfrac{1}{2}\,(l\,.\,q_2\,.\,d + k\,.\,q_1\,.\,c) \qquad z = \tfrac{1}{2}\,(l\,.\,p_2\,.\,b + k\,.\,p_1\,.\,a)$$

şi (5)

$$z = \tfrac{1}{2}\,(l\,.\,q_2\,.\,d - k\,.\,q_1\,.\,c) \qquad y = \tfrac{1}{2}\,(l\,.\,p_2\,.\,b - k\,.\,p_1\,.\,a).$$

Ori cele 2 valori ale lui z trebuesc să fie egale, deci:

$$l\,.\,p_2\,.\,b + k\,.\,p_1\,.\,a = l\,.\,q_2\,.\,d - k\,.\,q_1\,.\,c$$

sau

$$l\,(q_2\,.\,d - p_2\,.\,b) = k\,(q_1\,.\,c + p_1\,.\,a).$$

Conform remarcei făcute la început, nu vom pierde nicio soluţiune dacă vom luà:

$$l = 2\,(q_1\,.\,c + p_1\,.\,a)$$

şi

$$k = 2\,(q_2\,.\,d - p_2\,.\,b)$$

Inlocuind aceste valori ale lui k şi l în (5), avem:

$$\begin{cases} x = q_1\,.\,q_2\,.\,c\,.\,d + p_1\,.\,q_2\,a\,.\,d + q_1\,.\,q_2\,.\,c\,.\,d - q_1\,.\,p_2\,.\,c\,.\,b \\ y = q_1\ p_2\ b\ c + p_1\ p_2 a\ b - p_1\ q_2\ a\,.\,d + p_1\ p_2\ a\,.\,b \\ z = q_1\ p_2\ b\ c + p_1\ p_2 a\ b + p_1\ q_2\ a\ d - p_1\ p_2\ a\ b \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} x = 2\,q\,c\,d + p_1\,q_2\,a\,d - q_1\,p_2\,b\,c \\ y = 2\,p\,a\,b + q_1\,p_2\,b\,c - p_1\,q_2\,a\,d \\ z = \ q_1\,p_2\,b\,c + p_1\,q_2\,a\,d. \end{cases}$$

Fie

$$a\,.\,b = c\,.\,d = m \qquad p_1\,q_2\,a\,d = n \qquad q_1\,p_2\,b\,c = r.$$

Observăm că avem:

$$n.r = p_1 p_2 q_1 q_2 a b c d = p q m^2.$$

Deci, în concluziune: soluțiile în numere întregi ale ecuației $Ax^2 + By^2 = Cz^2$ în care $A = p$, $B = q$, $C = p + q$, ce ne-am propus să rezolvăm, sunt următoarele:

$$\begin{aligned} x &= \pm \frac{\beta}{\alpha} (2qm + n - r) \\ y &= \pm \frac{\beta}{\alpha} (2pm + r - n) \qquad (6) \\ z &= \pm \frac{\beta}{\alpha} (r + n) \end{aligned}$$

unde β și m sunt 2 numere întregi oarecare, n și r două numere întregi legate prin relațiunea $n.r = p.q.m^2$ și α cel mai mare comun divizor al numerilor $(2qm + n - r)$, $(2pm + r - n)$ și $(r + n)$.

* * *

Să considerăm acuma ecuația:

$$Ax^2 + By^2 = Cz^2$$

ale cărei soluțiuni în numere întregi ne propunem să le calculăm, atunci când cunoaștem una din soluțiuni.

Fie x_1, y_1, z_1 soluția cunoscută.

Vom recurge la următorul artificiu: în loc să căutăm soluțiile x, y și z, vom căuta soluțiunile $(x_1 y_1 z_1 x)$, $(x_1 y_1 z_1 y)$ și $(x_1 y_1 z_1 z)$ ceeace este acelaș lucru.

Ecuația dată se poate scrie:

$$Ax_1^2 (y_1 z_1 x)^2 + By_1^2 (z_1 x_1 y)^2 = Cz_1^2 (x_1 y_1 z)^2$$

și fie:

$$y_1 z_1 x = X \qquad z_1 x_1 y = Y \qquad x_1 y_1 z = Z$$

$$\therefore \quad Ax_1^2 X^2 + By_1^2 Y^2 = Cz_1^2 Z^2$$

Ori această ecuațiune este de felul celor studiate mai sus, fiindcă între coeficienții lui X^2, Y^2, Z^2 există relațiunea:

$$Ax_1^2 + By_1^2 = Cz_1^2$$

în virtutea faptului că x_1, y_1 şi z_1 sunt o soluţiune a ecuaţiei date Deci X, Y şi Z sunt daţi de următoarele formule:

$$X = \pm \frac{\beta}{\alpha} (2By_1^2 m + n - r)$$

$$Y = \pm \frac{\beta}{\alpha} (2Ax_1^2 m + r - n) \qquad r.n = ABx_1^2 y_1^2 m^2$$

$$Z = \pm \frac{\beta}{\alpha} (r + n)$$

Prin urmare, dacă ecuaţiunea

$$Ax^2 + By^2 = Cz^2$$

admite soluţiunea x_1, y_1, z_1, admite şi sistemul de soluţiuni

$$x = \pm \frac{\beta}{\alpha} (2By_1^2 m + n - r) x_1$$

$$(7) \qquad y = \pm \frac{\beta}{\alpha} (2Ax_1^2 m + r - n) y_1 \qquad r.n = A.Bx_1^2 y_1^2 m^2$$

$$z = \pm \frac{\beta}{\alpha} (r + n) z_1$$

Forma particulară sub care formulele (7) dau pe x, y şi z, face să se creadă că, ele nu conduc la toate soluţiunile problemei, de aceea vom da mai jos o demonstraţiune din care să reiasă că toate soluţiunile se pot obţine cu ajutorul formulelor (7), variind pe m şi β şi făcând în mod convenabil descompunerea definită de relaţia

$$r.n = A.B.x_1^2 y_1^2 m^2$$

Fie x_2, y_2 şi z_2 o altă soluţiune a ecuaţiei date şi ne propunem să determinăm pe m şi β precum şi pe r şi n astfel încât:

$$x_2 = \frac{\beta}{\alpha} (2By_1^2 m + n - r) x_1$$

$$(8) \qquad y_2 = \frac{\beta}{\alpha} (2Ax_1^2 m + r - n) y_1$$

$$z_2 = \frac{\beta}{\alpha} (r + n) z_1$$

Dacă găsim valori întregi pentru β, m şi $n-r$ care să satisfacă aceste trei ecuaţiuni, faptul că formulele (7) conţin totalitatea soluţiilor ecuaţiei date, deoarece soluţiunea x_2, y_2, z_2 nu este deloc particularizată, este demonstrat.

Eliminând pe $\frac{\beta}{\alpha}$ din (8), avem:

$$\frac{(2By_1^2 m + n - r)\, x_1}{x_2} = \frac{(2Ax_1^2 m + r - n)\, y_1}{y_2} = \frac{(r+n)\, z_1}{z_2}$$

Din egalitatea primelor 2 rapoarte deducem:

$$2By_1^2 x_1 y_2 m + (n-r)\, x_1 y_2 = 2Ax_1^2 y_1 x_2 m + (r-n)\, y_1 x_2$$

sau

$$2m\,(By_1^2 x_1 y_2 - Ax_1^2 y_1 x_2) = (r-n)\,(y_1 x_2 + x_1 y_2)$$

luăm

$$(9) \qquad \begin{aligned} m &= (y_1 x_2 + x_1 y_2)\, k \\ (r-n) &= 2\,(By_1^2 x_1 y_2 - Ax_1^2 y_1 x_2)\, k \end{aligned}$$

Pe de altă parte avem:

$$(r+n)^2 = (r-n)^2 - 4rn$$

$$= 4\,(By_1^2 x_1 y_2 - Ax_1^2 y_1 x_2)\, k^2 - 4\,AB x_1^2 y_1^2 (y_1 x_2 + x_1 y_2)^2 k^2$$

$$= 4\,(B^2 y_1^4 y_2^2 x_1^2 + A^2 x_1^4 x_2^2 y_1^2 + AB\, x_1^2 y_1^4 x_2^2 + AB\, x_1^4 y_1^2 y_2^2)\, k^2$$

$$= 4\,[By_1^4 x_1^2 (By_2^2 + Ax_2^2) + Ax_1^4 y_1^2 (Ax_2^2 + By_2^2)]\, k^2$$

$$= 4\,Cz_2^2 y_1^2 x_1^2 (By_1^2 + Ax_1^2)\, k^2 = 4C^2 x_1^2 y_1^2 z_1^2 z_2^2 k^2$$

$$(10) \qquad \therefore \quad r + n = 2C x_1 y_1 z_1 z_2 k$$

Introducând această valoare în a treia ecuaţie din (8) deducem:

$$z_2 = \frac{\beta}{\alpha}\, 2C x_1 y_1 z_1 z_2 k$$

$$\therefore \quad \beta = 1 \qquad \alpha = 2k C x_1 y_1 z_1$$

Introducând valorile obţinute pentru m, $(r-n)$, α şi β, care se vede uşor că sunt numere întregi, în I-a şi a II-a ecuaţie din (8) găsim:

$$x_2 = x_2 \quad \text{şi} \quad y_2 = y_2$$

deci faptul că formulele (7) dau totalitatea soluţiunilor ecuaţiei $Ax^2 + By^2 = Cz^2$ este deplin demonstrat.

In fine formulele (7) pot fi puţin modificate, dacă punem $r = r_1 x_1 y_1$, $n = n_1 x_1 y_1$, fără ca prin aceasta să le restrângem întruceva.

BIBLIOTECA „ASOCIAŢIUNII" SIBIIU

Ele devin:

$$x = \pm \frac{\beta}{\alpha} [2By_1 m + (n_1 - r_1) x_1] x_1 y_1$$

$$y = \pm \frac{\beta}{\alpha} [2Ax_1 m + (r_1 - n_1) y_1] x_1 y_1 \qquad r_1 n_1 = A.B.m_2$$

$$z = \pm \frac{\beta}{\alpha} (r_1 + n_1) x_1 y_1 z_1$$

şi deci:

Soluţiunile ecuaţiei $Ax^2 + By^2 = Cz^2$ *în numere întregi sunt date de formulele:*

$$x = \pm \frac{\beta}{\alpha} [2By_1 m + (n - r) x_1]$$

$$y = \pm \frac{\beta}{\alpha} [2Ax_1 m + (r - n) y_1] \qquad (11)$$

$$z = \pm \frac{\beta}{\alpha} (r + n) z_1$$

unde x_1, y_1, z_1 *este o soluţiune a ecuaţiei,* m *şi* β *două numere întregi oarecare,* r *şi* n *două numere întregi rezultate din descompunerea:* $r\,n = A.B.m^2$ *şi* α *cel mai mare comun divizor al numerilor* $[2By_1 m + (n - r) x_1]$, $[2Ax_1 m + (r - n) y_1]$ *şi* $[(r + n) z_1]$.

Asupra acestui rezultat sunt de făcut următoarele observaţiuni:

I. Formulele (6) se obţin din formulele (11) făcând $x_1 = y_1 = z_1 = 1$ ceeace este evident deoarece ecuaţia $px^2 + qy^2 = (p + q) z^2$ admite soluţiunea 1, 1, 1.

II. Dacă ecuaţia $Ax^2 + By^2 = Cz^2$ are o soluţiune, are o multiplă infinitate de soluţiuni.

Fie $A.B = a_1 a_2$ şi fie $m^2 = k_1 . k_2$, putem luà:

$$r = a_1 k_1 \quad \text{şi} \quad n = a_2 k_2.$$

Dacă k_1 şi k_2 au un divizor comun, acest divizor îl are şi m şi deci şi numerile $[2By_1 m + (n - r) x_1]$ $[2Ax_1 m + (r - n) y_1]$ şi $[(r + n) z_1]$, dăm astfel peste o soluţiune ce am mai găsit-o printr'o altă descompunere. Pentru a evità aceasta trebue să luăm k_1 şi k_2 primi între ei, ceeace reclamă $k_1 = a^2$, $k_2 = b^2$, $m = a.b$ unde a şi b sunt primi între ei şi deci, condiţia de descompunere $r.n = A.B\,m^2$ se înlocueşte prin $r = a_1 a^2$, $n = a_2 b^2$, unde $a_1 a_2 = AB$ şi m în loc să fie un număr oarecare este egal cu $a.b$.

Ioan B. Florescu.

HIPOCICLOIDA CU TREI REBRUSMENTE ŞI ORTOPOLUL

In articolul publicat în „G. M." cu acelaş titlu, plecam dela construcţia tangentei la hipocicloida cu 3 puncte de întoarcere spre a da proprietăţile dreptei SIMSON.

Să revenim la chestiunea construcţiei dreptelor SIMSON, trecând printr'un punct al cercului EULER.

Fie φ_1, φ_2, φ_3 cele trei puncte comune hipocicloidei şi cercului ortoptic şi X, Y, Z punctele de întoarcere ale hipocicloidei, iar O centrul cercului ortoptic.

Prin punctul ω al cercului ortoptic, se iau arcele ωN şi ωM astfel ca să avem (arcele fiind luate în acelaş sens):

$$\widehat{\omega M} = \frac{3}{2}\,\widehat{\omega\varphi_1} \qquad \text{şi} \qquad \widehat{\omega N} = \frac{3}{2}\,\widehat{\omega\varphi_2}.$$

Am construit două tangente la hipocicloidă, care sunt perpendiculare între ele.

In articolul citat, am omis o tangentă la hipocicloidă care trece prin ω şi care se construeşte luând din ω în sens opus primului sens, arcul ωP, astfel ca să avem:

$$\widehat{\omega P} = \frac{3}{2}\,\widehat{\omega\varphi_1}.$$

Se vede imediat că urmând construcţia în sensul acesta şi faţă de punctele φ_2 şi φ_3, dăm peste punctele N şi M. Putem deci enunţa:

Printr'un punct al cercului EULER, *trec 3 drepte* SIMSON, *două dintre ele perpendiculare, iar a 3-a perpendiculară pe diametrul punctelor corespunzătoare celor 2 drepte* SIMSON *perpendiculare.*

2°. Fie Δ_1, Δ_2, Δ_3, punctele pe cercul ABC, corespunzătoare celor 3 drepte SIMSON ce trec prin ω, respectiv D_1, D_2, D_3.

D_1 şi D_2 sunt perpendiculare între ele.

Punctele Δ_1 şi Δ_2 sunt deci diametral opuse în cercul ABC.

Triunghiul Δ_1, Δ_2, Δ_3 este homotetic cu MNω, centru de homotetie ortocentrul H al lui ABC, şi raportul de homotetie 2.

Conform definiţiei ortopolului, dată de NEUBERG, ω este ortopolul laturilor, triunghiului Δ_1, Δ_2, Δ_3.

In virtutea homotetiei ($M\omega N$, $\Delta_1\Delta_2\Delta_3$), cum laturile ωM şi ωN înfăşoară hipocicloida cu 3 puncte de întoarcere, rezultă că şi laturile $\Delta_3\Delta_1$ şi $\Delta_3\Delta_2$ înfăşoară tot o hipocicloidă cu 3 rebrusmente.

Deci:

Există un triunghiu dreptunghic, înscris în cercul ABC, *ale cărui laturi înfăşoară o hipocicloidă cu 3 rebrusmente* şi *ortopolul comun al celor trei laturi, descrie cercul* EULER *al lui* ABC.

3°. Fie A_H, B_H, C_H simetricele ortocentrului H faţă de ABC.

Cercul ABC este deci cercul EULER al triunghiului $A_HB_HC_H$. Dreptele $\Delta_3\Delta_1$ şi $\Delta_3\Delta_2$ înfăşoară hipocicloida cu 3 rebrusmente care e înfăşurătoarea dreptelor SIMSON ale triunghiului $A_HB_HC_H$.

Avem deci:

Dreptele $\Delta_3\Delta_1$ şi $\Delta_3\Delta_2$ *sunt drepte* SIMSON *în triunghiul* $A_HB_HC_H$. *Cele două hipocicloide sunt homotetice în raport de ortocentru şi de raport 2.*

4°. Fixând punctele φ_1, φ_2, φ_3, hipocicloida este fixă, aceeaş, cercul ortoptic acelaş.

Deci triunghiul format de 3 tangente oarecare la hipocicloidă are drept cerc EULER, cercul ortoptic al ei.

Am dat peste triunghiuri având acelaş cerc EULER.

Laturile triunghiurilor care admit acelaş cerc EULER *fix, înfăşoară o hipocicloidă cu trei puncte de întoarcere al cărei cerc ortoptic este cercul fix.*

5°. Se demonstrează foarte uşor că:

Punctele de contact ale laturilor unui triunghiu cu hipocicloida, sunt proecţiile pe laturile BC, CA, AB, *ale diametral opuselor vârfurilor lui* ABC *pe cercul* ABC.

6°. Să vedem ce formează cercurile circumscrise triunghiurilor având acelaş cerc EULER.

Să fixăm două laturi. In acest caz cercurile circumscrise trec printr'un punct. Au două grade de libertate, formează deci *o reţea punctuală.*

Dacă fixăm numai o latură, totalitatea cercurilor circumscrise ABC, formează *un sistem de ordinul 3 de cercuri.*

In fine, nefixând nici una, cercurile formează *un sistem de ordinul 4 de cercuri.*

LOCOT. MIHAIL I. FOCŞENEANU
Din Şc. Militară de Artilerie Timişoara.

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE“

Nici anul acesta nu se poate ţine concursul *Gazetei Matematice*. Numărul candidaţilor înscrişi a fost prea restrâns, iar cei mai buni corespondenţi nu s'au înscris.

Ne găsim în plină criză a învăţământului matematic în liceu. Noi socotim criza trecătoare, dar, spre a o înlătură ne trebueşte sprijinul profesorilor, care să îndrumeze pe elevi, în cadrul matematicelor elementare, spre o pregătire mai serioasă. Ne mai trebueşte şi entuziasm din partea elevilor. In vremurile acestea grele singura mântuire e în entuziasm pentru ştiinţă şi gândire superioară, iar dintre ştiinţe, matematica, prin problemele ei precise, prin demonstraţiile ei riguroase, dă cele mai mari şi imediate satisfacţii şi serveşte apoi drept temelie solidă pentru orice altă specialitate teoretică sau aplicată.

Speranţa noastră în viitor rămâne întreagă, nu putem însă fixà momentul în care viitorul va deveni prezent.

G. ŢIŢEICA
Delegat pentru rapoarte.

NOTE MATEMATICE

25. *Asupra unei derivate.*

Fie

$x_1, x_2, \ldots x_n$ rădăcinile ecuaţiei :

$$f(x) = 0$$

şi

S_i sumele :

$$S_i = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{(x - x_k)^i} .$$

Vreau să dau o formă a derivatei de ordinul n a funcţiunii $f(x)$. Observ însă că am dela început :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \equiv \sum_{1}^{n} \frac{1}{x - x_k} \quad \therefore \quad f'(x) \equiv f(x) \, . \, S_1.$$

Să derivez această relaţie de $p - 1$ ori. Voiu aveà :

$$(1) \quad f^{(p)}(x) \equiv f^{(p-1)} S_1 + C_{p-1} f^{(p-2)} S'_1 + \ldots + C_{p-1}^{p-1} f S_1^{(p-1)}.$$

Să calculez derivata de ordin $i-1$ a lui S_1.

$$S_1^{(i-1)} = [S'_1]^{i-1} = [S''_1]^{i-2} = \ldots = [S_1^{(i-2)}]' .$$

Insă:

$$S'_1 = -\sum_1^n \frac{1}{(x - x_k)^2} = (-1)^1 S_2$$

$$S''_1 = (-1)^1 S'_2 = (-1)^2 - 2! \sum_1^n \frac{1}{(x - x_k)^3} = (-1)^2 2! S_3$$

. . . . . .

$$S_1^{(p-1)} = (-1)^{p-1} (p-1)! S_p .$$

Inlocuind în (1) găsesc imediat:

$$f^{(p)}(x) \equiv S_1 f^{(p-1)} - A^1_{p-1} S_2 f^{(p-2)} + \ldots + (-1)^i A^i_{p-1} S_{i+1} f^{(p-i-1)} + \ldots$$

Sau:

$$(2) \qquad f^{(p)} \equiv \sum_0^{p-1} (-1)^i A^i_{p-1} S_{i+1} f^{(p-i-1)}.$$

2^0. Această formă a derivatei de ordin p a unei funcțiuni, are o aplicație imediată. Dacă cunosc o ecuație diferențială, la care $f(x)$ satisface, pot găsi imediat, o relație între sumele S_i și chiar ecuațiile diferențiale la care satisfac aceste sume.

In adevăr să presupunem că ecuația la care satisface $f(x)$ este lineară de ordinul 2.

$$A_0(x) f'' + A_1(x) f' + A_2(x) f = 0.$$

Dar

$$f'' \equiv S_1 f' + S'_1 f$$

$$f' \equiv S_1 f$$

și înlocuind, dăm peste *o ecuație tip* RICCATI.

$$(3) \qquad A_0 S' + A_0 S^2 + A_1 S + A_2 = 0.$$

Am soluționat deci problema:

Dacă un polinom cu toate rădăcinile reale, satisface o ecuație lineară de ordinul 2, funcțiunea S este o soluție a unei ecuații RICCATI.

In particular polinoamele HERMITE și LEGENDRE care au toate rădăcinile reale și satisfac ecuații lineare de ordinul 2.

Pentru polinomul HERMITE, putem enunță:

Dacă $x_1, x_2, \ldots x_n$ sunt rădăcinile polinomului H, funcțiunea $\sum_1^n \frac{1}{x - x_i}$ satisface ecuația:

$$4z' + 4z^2 - (x^2 - 4n - 2) = 0$$

în care s'a transformat ecuația (3):

$$y' + y^2 - xy + n = 0.$$

Ceva mai mult, fără a cunoaște și evalua aceste rădăcini, putem găsi soluția ecuației RICCATI, în unele cazuri particulare și deci evalua suma s.

Observare. In cazul particular ales, al unei ecuații lineare de ordinul 2, mai putem găsi direct ecuația la care satisface s.

In adevăr, observăm că:

$$u = \sum_1^n \frac{1}{x - x_1} \quad \text{și} \quad f = e^{\int u dx}$$

și înlocuind

$$f' = ue^{\int u dx} \quad f'' = (u' + u^2)\, e^{\int u dx}$$

se găsește:

$$A_0 u' + A_0 u^2 + A_1 u + A_2 = 0.$$

In cazul general, însă, e mai avantajoasă metoda arătată.

3°. In fine o aplicație algebrică, găsind o identitate.

Dacă facem

$$f = x^n$$

avem

$$f^{(i)} = A_n^i x^{n-1} \qquad S_i = \sum_1^n \frac{1}{x^i} = \frac{n}{x^i}$$

și după înlocuire:

$$n! \equiv \sum_0^{n-1} (-1)^i n \cdot A_{n-1}^i A_n^{n-i-1} \cdot \frac{1}{x^{i+1}} \cdot x^{i+1}$$

sau

$$n! \equiv \sum_0^n (-1)^i A_n^i A_{n+1}^{n-i} .$$

LT. MIHAIL I. FOCȘENEANU.

26. *Asupra indicatorilor.* Intr'un articol publicat în «G. M.» (Vol. XXIX p. 16). D-l Căp. I. Linteş îşi propune problema de a găsi numere consecutive având acelaş indicator.

Chestiunea aceasta a fost tratată în «Intermédiaire des Mathématiciens» vol. 25 (1918). p. 42, unde cititorul poate găsi o metodă pentru determinarea soluţiilor mai mici decât un număr dat.

Există trei numere consecutive având acelaş indicator. De exemplu:

5186, 5187, 5188

[a se vedeà «Interm. des Math.» vol. 26 (1919) p. 122].

n fiind un număr dat ar fi interesant de văzut dacă există *n* numere consecutive având acelaş indicator. Problema nu pare însă a fi abordabilă în toată generalitatea ei. S'ar puteà căutà cel puţin o limită inferioară acestor numere în funcţie de *n*. Pentru aceasta cunoaşterea distribuţiei numerelor prime poate fi utilă. Considerând indicatorii succesivi (iteraţi) ai unui număr, din cunoaşterea indicelui ultimului indicator [cel mai mic număr *m* astfel ca $\varphi_m(N) = 1$], se poate deduce o limită inferioară care însă e foarte puţin bună

Problema rămâne deci pusă în întregime.

T. P.

BIBLIOGRAFIE

Bulletin of the American mathematical Society. Volumul XXXVI. No. 6. Iunie 1930. New-York. Teoria probabilităţilor: unele comentarii ale teoriei analitice a lui Laplace, de E. C. Molina. Inegalităţi lineare şi unele proprietăţi referitoare la proprietăţile funcţiunilor, de L. L. Dines. O definiţiune a curbelor simplu închise neînodate, de T. C. Benton. Serie de plane în-şi circumscrise curbelor spaţiului, de C. Bell. Notă asupra funcţiunilor periodice a mai multor variabile complexe, de W. F. Osgood. O corespondenţă între câmpurile neregulate, de E. T. Bell Asupra triramfoidale şi biocnoidale curbe cuintice, de H. Hilton. Postulaţiune invariantă, de T. R. Hollcroft. Prima variaţiune a unei funcţionale, de W. G. Smiley. Jr. şi G. C. Evans. Evaluarea unor integrale definite cu ajutorul funcţiunilor de probabilitate, de E. Baten.

Bulletin de mathematique et de physique pures et appliquées de l'École Polytechnique de Bucarest. II-ème Année (1930 — 1931). No. 1. Bucureşti. Sur une propriété intégrale caractéristique des fonctions linéaires, par D. Pompeiu. Sur le théorème des accroissements finis par E. Abason. Sur le théorème de la moyenne pour les fonctions métaharmoniques, par N.

CIORANESCU. La nouvelle théorie D'EINSTEIN, par AL. PROCA. La réduction des systèmes hyperstatiques symétriques par la méthode des charges composées, par C. MATEESCO. Un problème de flambage, par C. TEODORESCO. La determination d'un standard de transmission dans un réseau téléphonique interurbain, par J. CONSTANTINESCO. Sur la radiation des systhèmes d'antennes, par T. TĂNĂSESCO. Calcul des performances d'un avion, par E. CARAFOLI. PAUL APPELL (nécrologie), par D. POMPEIU.

Mathematica. Volumul IV 1930. Cluj. Un coup d'oeil sur l'histoire des sciences et des théories phisiques. Lecture faite dans la séance publique anuelle de l'Académie des sciences, du 16 Décembre 1929, par E. PICARD. Une application de la résultante de deux fonctions, par MICHEL PETROWICH. Sur un mode de croissance régullière des fonctions, par J. KARAMATA. Sur le problème de M. JACQUES HADAMARD d'uniformisation des ensembles, par N. LUSIN. Sur le problème de DIRICHLET pour les systèmes linéaire d'équations aux dérivées partielles du second ordre et du type elliptique, par N. CIORANESCO. Remarque sur les polynomes de meilleure approximation, par TIBERIU POPOVICIU. Sur le domaine Riemannien couvert par les valeurs d'une fonctions holomorphe, par GEORGE VALIRON. Sur les fonctions algébriques, par J. FAVARD. Sur un problème d'équivallence et de la théorie des espaces métriques généralisés, par ELIE CARTAN. Sur une propriété topologique intuitive caractéristique des courbes de JORDAN sans point double, par A. MARCHAND. Tourbillons, ondes, quanta, par A. BUHL. Sur certains ensembles, par W. SIERPINSKI. Sur certains fonctions holomorphes et bornées dans un cercle, par HENRI MILLOUX. PAUL APELL, par D. POMPEIU. La serie du TAYLOR d'une fonction holomorphe déduite comme un dévellopement d'après les fonctions fondamentales d'un noyau symétrique généralisé, par TH. ANGHELOUTZA. Note de la redaction.

Anales de la Sociedad cientifica Argentina. Tomul CX. Fascicola IV. Decemvrie 1930. Buenos-Aires. Asupra valorilor medii de C. E. DIEULEFAIT.

Boletin matematico. Anul III. Octomvrie 1930. Buenos-Aires. † FLORIAN CAJORI, de B. I. BAIDAFF. Matematica şi militarii, de B. I. BAIDAFF.

Revista matematică din Timişoara. Anul X. No. 12. Fevruarie 1931. Timişoara. Câteva propietăţi în legătură cu triunghiul dreptunghic, de N. O. ZAHARIA.

Journal de matématiques élémentaires, publié par H. VUIBERT. Anul 55. No. 9 din 1 Fevruarie şi No. 10 din 15 Fevruarie 1931. Paris.

E. ABASON. *Sur le théorème des accroissements finis.* (Extras din *Analles scientifiques de l'Université de Jassy*). Iaşi 1931.

E. ABASON. *Sur la moyenne des fonctions paraboliques.* (Extras din *Bulletin scientifique de l'École Politechnique de Timişoara*). Timişoara 1930.

CĂPITAN ION LINTES. *Construcţii de avioane.* (Publicaţiune a Şcolilor pregătitoare şi Speciale ale Aeronauticei. Bucureşti). 1930.

Exercices de Mecanique par M. Beghin et G. Julia, Tome I, fascicule 1 ; Ed. Gauthier-Villars et C-ie Paris, 1930.

Acest uvragiu reprezintă prima parte dintr'o publicaţie complectă de probleme de mecanică raţională, pe care autorii îşi propun să o facă. După cum autorii arată în prefaţă, cea mai mare parte din chestiunile tratate se referă la cursurile făcute la facultăţile de ştiinţe din Montpellier, Lille, Sorbona şi la Şcoala Normală Superioară din Paris, precum şi unele probleme clasice de Mecanică generală.

Prima fascicolă apărută, coprinde probleme referindu-se în special la partea geometrică a mecanicei : vectori, cinematică, geometria maselor şi cinetică. Ea coprinde următoarele capitole : Cap. I, Geometria vectorilor, 44 probleme ; Cap. II, Cinematica punctului, 21 probleme ; Cap. III, Cinematica solidului indeformabil, studiul iuţelelor şi compunerea mişcărilor, 82 probleme ; Cap. IV, Cinematica solidului, studiul acceleraţiilor, 30 probleme ; Cap. V, Geometria maselor, centre de greutate şi momente de inerţie, 22 probleme ; Cap. VI, Energia cinetică, cantitate de mişcare, forţe de inerţie, 23 probleme. Fiecare capitol este precedat de o recapitulaţie a rezultatelor privitoare la acel capitol şi stabilite în cursurile de mecanică.

Chestiunile sunt tratate complect şi clar, întrebuinţând atât metodele analitice cât şi cele geometrice, utilizează de asemenea într'o largă măsură metodele vectoriale. Cea mai mare parte din chestiunile tratate în acest volum, se adresează în special studenţilor universitari.

A. G. I.

CERERI

202. Care este termenul popular pe care-l întrebuinţează rotarii şi dogarii pentru „*Compas*“, în diferitele părţi ale ţării ?

I. Ionescu.

DIVERSE

Societatea română de Ştiinţe, Secţiunea Matematică a ţinut şedinţă în seara zilei de 9 Fevruarie, când au făcut comunicări D-nii : O. Onicescu, despre corespondenţa între domenii multiplu conexe ; M. Ghermănescu, despre funcţiunile permutabile şi Gh. Mihoc, asupra probabilităţilor înlănţuite.

In şedinţa dela 23 Fevruarie a vorbit D-l M. Hangan despre cercuirea betonului armat şi D-l Radu Bădescu despre ecuaţia integrală a lui Fredholm.

In ziua de 22 Fevruarie, ora 17, D-l V. Vâlcovici a ţinut la Societatea Studenţilor în Matematici din Bucureşti o conferinţă despre „*Erorile în matematică*“.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2773. *Un plan oarecare tae muchiile* SA, SB, SC *ale unui tetraedru* SABC, *respectiv în punctele* D, E, F. *Dreptele* SG, SH, SK, *cari unesc vârful* S *cu punctele de întretăere* G, H, K *ale diagonalelor patrulaterelor* ABED, BCFE, CADF, *tae laturile bazei* ABC *în* L, M, N.

Să se demonstreze că punctele L, M, N *sunt picioarele a trei ceviene în triunghiul* ABC.

M. GRÜNBAUM.

1°. *Soluţie* dată de D-nii: C. BERDAN, C. COŞNIŢĂ şi U. FLORESCU.

In triunghiurile SAB, SBC, SCA avem trei grupe de ceviene cu picioarele comune respectiv în G, H, K. Conform teoremei lui CEVA, vom aveà relaţiunile:

$$\frac{LA}{LB}\cdot\frac{EB}{ES}\cdot\frac{DS}{OA}=-1$$

$$\frac{MB}{MC}\cdot\frac{FC}{FS}\cdot\frac{ES}{EB}=-1$$

$$\frac{NC}{NA}\cdot\frac{DA}{OS}\cdot\frac{FS}{FC}=-1.$$

Inmulţind aceste trei relaţiuni şi reducând, obţinem:

$$\frac{LA}{LB}\cdot\frac{MB}{MC}\cdot\frac{NC}{NA}=-1$$

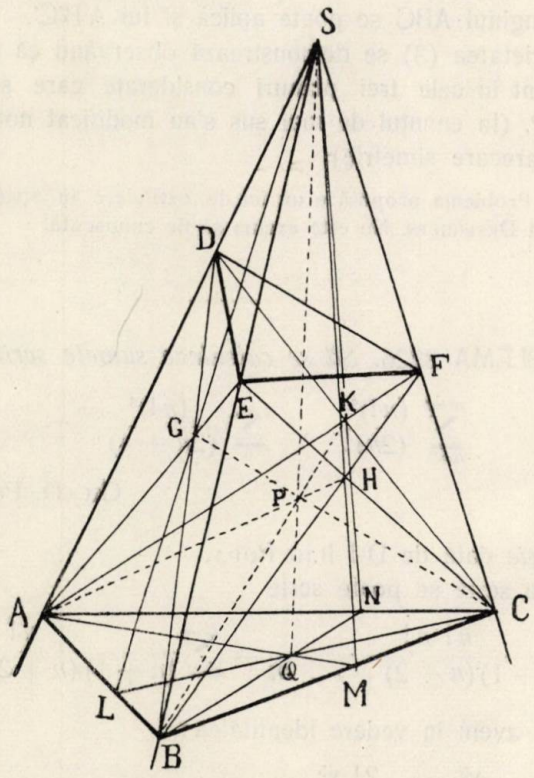
relaţie care arată că L, M, N sunt picioarele a trei ceviene în triunghiul ABC.

2°. *Soluţie* dată de D-l ULPIU FLORESCU.

Considerând figura în spaţiu se vede uşor că planele determinate de triunghiurile ABF şi ACE se intersectează după dreapta AH; deasemeni planele BAF şi BCD se intersectează după dreapta BK. Cum dreptele AH şi BK sunt situate în planul ABF ele se taie într'un punct P.

Să considerăm acum și planele CAE și CBD ce pleacă din vârful C și se intersectează după dreapta CG; cum amândouă aceste planuri au fost considerate în primele cazuri, rezultă că dreapta CG trece și ea prin punctul P.

Prin urmare dreptele AH, BK, CG concură într'un punct P. De aci rezultă că planele SAH, SBK, SCG se intersectează după o dreaptă SP. Observând că dreptele LC, MA, NB sunt intersecțiile



planului ABC cu planele SCG, SAH, SBK, considerate mai sus, rezultă imediat că aceste drepte concură în punctul Q unde dreapta SP înțeapă planul ABC.

Deci proprietatea cerută este demonstrată.

Observăm acum că în cursul acestei demonstrații am găsit și următoarea interesantă proprietate:

«Fie două triunghiuri homologice ABC și A'B'C'. Fie γ, α, β intersecțiile diagonalelor patrulaterelor ABA'B', BCB'C', CAC'A'.

1. Dreptele $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ concură într'un punct R.
2. Dreptele $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$ concură într'un punct T.
3. Punctele R, T și centrul de homologie al celor două triunghiuri sunt colineare».

In adevăr, se vede ușor că proprietatea (1) este tocmai proprietatea găsită mai sus, că dreptele AH, BK, CG sunt concurente, considerată în plan.

Proprietatea (2) este evidentă, observând că demonstrația dată pentru triunghiul ABC se poate aplică și lui A'B'C'.

Proprietatea (3) se demonstrează observând că dreptele DH, EK, FG sunt în cele trei planuri considerate care se taie după dreapta SP. (In enunțul de mai sus s'au modificat notațiile pentru a obține oarecare simetrie).

Notă. Problema propusă e un fel de extindere în spațiu a teoremei omologiei lui DESARGUES. Nu este exclus să fie cunoscută.

M. G.

PROBLEMA 3226. *Să se calculeze sumele seriilor*

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad , \quad \sum_{0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+4)!} .$$

GH. D. POPESCU.

Soluție dată de D-l ILIE POPA.

Prima serie se poate scrie

$$\sum \frac{n!\,n!}{n!\,(n+1)(n+2)\ldots 2n} = \sum \frac{n!}{(n+1)(n+2)\ldots 2n} .$$

Dacă avem în vedere identitatea:

$$(1) \qquad x + \frac{x^3}{2.3} + \frac{2!\,x^5}{3.4.5} + \ldots + \frac{n!\,x^{2n+1}}{(n+1)(n+2)\ldots(2n+1)} + \ldots = \frac{4}{\sqrt{4-x^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

care se poate stabili ușor, bazându-ne pe relația

$$\frac{n!}{(n+1)(n+2)\ldots(2n+1)} = \int_0^1 t^n (1-t)^n \, dt.$$

(AUBERT-PAPELIER, Ex. d'Algebre et d'Analyse).
obținem, derivând-o în ambii membrii:

$$1+\frac{x^2}{2}+\frac{2!\,x^4}{3.4}+\frac{3!\,x^6}{4.5.6}+\dots$$

$$+\frac{n!\,x^{2n}}{(n+1)\dots 2n}+\dots=\frac{4}{4-x^2}\left(\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}+1\right).$$

Dacă în această identitate facem $x=1$, obținem suma primei serii din enunț

$$S_1=1+\frac{1}{2}+\frac{2!}{3.4}+\dots+\frac{n!}{(n+1)\dots 2n}=$$

$$\frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{4}{3}\left(1+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}\right).$$

Pentru a doua sumă, pornim dela seria

$$z=\sum\frac{n!\,x^{2n+4}}{(n+1)\,(n+2)\dots 2n+4)}.$$

Observăm că derivata a treia a funcțiunii z ne dă tocmai seria (1), deci:

$$z'''=\frac{4}{\sqrt{4-x^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Integrând prin părți, găsim

$$z''=4\int_0^1\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=2\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right)^2.$$

Mai departe, facem schimbarea de variabilă $x=2\sin t$ și obținem rezultatele finale

$$z'=2x\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right)^2+4\sqrt{4-x^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}-4x$$

$$z=-2\sqrt{4-x^2}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right)^2+8x\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}+12\sqrt{4-x^2}-24.$$

Pentru $x=1$, ultima expresiune, z, ne dă suma celei de a doua serie din enunț; avem:

$$z(1)=-\frac{\pi^2\sqrt{3}}{18}+\frac{4\pi}{3}+12(\sqrt{3}-2).$$

Notă 1°. D-l ILIE POPA, pornind dela integrala

$$I = \int_0^1 t^{\alpha n+\beta-1} \left(1-t^{\gamma}\right)^{an+b-1} dt$$

(vezi problema 3676), calculează suma mai generală :

$$S = \sum \frac{x^{pn+q}\, \gamma^{an+b-1}\, (an+b-1)!\, f^{(n)}(0)}{n!\,(\alpha n+\beta)\,(\alpha n+\beta+\gamma)\ldots[\alpha n+\beta+\gamma\,(an+b-1)]}$$

unde $f(x)$ este o serie desvoltabilă în serie MACLAURIN. D-sa găseşte

$$S = x^q \int_0^1 t^{\beta-1} \left(1-t^{\gamma}\right)^{b-1} f\left[x^p\, t^{\alpha} \left(1-t^{\gamma}\right)^{\alpha}\right] dt$$

pe care apoi o particularizează pentru diferite expresiuni ale funcţiunii $f(x)$.

Integrala D-sale este un caz particular al integralei

$$\int_0^1 t^m (1-t^n)^p\, dt = \frac{n!\; p!}{(m+1)\,(m+n+1)\,(m+2n+1)\ldots(m+pn+1)}$$

pe care am calculat-o cu ocazia redijării soluţiei problemei 3676, care se publică la pag. 267 a acestui număr, integrală de altfel cunoscută.

2°. A mai trimis o soluţie, pentru prima sumă, D-l H. MARCOVICI.

M. G.

PROBLEMA 3444. *Se dă un octogon înscris într'o conică. Să se demonstreze că octogonul format prin intersecţiile laturilor, prima cu a patra, a doua cu a cincea etc... este deasemenea înscris într'o conică, ambele fiind înscrise într'o infinitate de cuartice.*

M. GHERMĂNESCU.

Fie cele 8 puncte pe conică $A_1A_2 \ldots A_8$. Să considerăm dreptele $A_1A_2 \ldots A_7A_8$, A_8A_1. Numim $A_1A_2 = 1$, $A_2A_3 = 2 \ldots A_7A_8 = 7$, $A_8A_1 = 8$.

Fie cuartica descompusă în patru drepte 1, 3, 5, 7 şi cuartica descompusă în dreptele 2, 4, 6, 8. Orice cuartică ce trece prin intersecţia lor se poate scrie asociindu-le legate cu un parametru linear.

Deci orice cuartică din familie este :

$$\overline{1,\ 3,\ 5,\ 7} + \lambda\ \overline{2,\ 4,\ 6,\ 8} = 0.$$

Familia trece prin 16 puncte fixe, punctele de intersecţie ale celor două degenerate, lucru evident deoarece orice astfel de puncte

anulează membrul întâiu. Dar dacă încercăm să găsim aceste puncte fixe, vedem că ele sunt în primul rând cele 8 vârfuri $A_1A_2 \ldots A_8$ şi apoi intersecţiile $\overline{1,4}$, $\overline{1,6}$, $\overline{3,6}$, $\overline{3,8}$ etc. tocmai punctele enunţului deci cele două octogoane sunt înscrise într'o ∞-ate de cuartice.

Ori degenerând una la conica $A_1A_2 \ldots A_8$ partea rămasă trebuie să fie tot o conică şi deci cele 8 puncte cerute sunt pe o conică. Deoarece unirea celor 8 puncte a fost arbitrară putem spune mai precis că punctele de intersecţie a dreptelor ce unesc opt puncte de pe o conică sunt aşezate câte opt pe atâtea conice câte octogoane distincte putem face cu 8 puncte.

N. Teodorescu
Licenţiat în Matematici.

Notă. Problema importantă care se poate studiă este următoarea:

Fie O_1 *octogonul obţinut din octogonul dat* O, O_2 *octogonul obţinut din* O_1 *pe aceiaş cale, etc.*

Dacă primul octogon se află înscris într'o conică, fiecare din celelalte va fi înscris într'o conică, în baza problemei propuse. Dar, toate aceste octogoane sunt ele înscrise într'o aceiaş cuartică?

S'ar puteà încercà o verificare, exprimând coordonatele unui punct depe cuartică cu ajutorul funcţiunilor eliptice.

M. G.

PROBLEMA 3676. *Să se stabilească identitatea*

$$\frac{1}{n+1} - \frac{C_n^1}{2n+1} + \frac{C_n^2}{3n+1} \cdots + (-1)^n \frac{C_n^n}{n(n+1)+1} = \frac{n^n (n!)}{(n+1)(2n+1)\ldots[n(n+1)+1]}.$$

Virgil Coşniţă.

1°. *Soluţie* dată de D-nii: N. Aldea şi P. Ghişoiu.

Să considerăm relaţiunea

$$\frac{n!\, x^n}{(x+1)(2x+1)\ldots[(n+1)x+1]} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{2x+1} + \ldots + \frac{A_{n+1}}{(n+1)x+1}.$$

Pentru determinarea constantelor A_p, vom înmulți ambii membri cu $(px+1)$ și vom face apoi $x=-1/p$; vom obține

$$A_p=\frac{n!\left(-\frac{1}{p}\right)^n}{\left(-\frac{1}{p}+1\right)\left(-\frac{2}{p}+1\right)\cdots\left(-\frac{p-1}{p}+1\right)\cdots\left(-\frac{p+1}{p}+1\right)\left(-\frac{n+1}{p}+1\right)}$$

$$=\frac{(-1)^n n!}{(-1+p)(-2+p)\ldots 1(-1)(-2)\ldots(p-n-1)}.$$

$$A_p=\frac{(-1)^n n!}{(-1)^{p+1}(p-1)!(n-p+1)!}$$

$$=(-1)^{p-1}\frac{n!}{(p-1)!(n-p+1)!}=(-1)^{p-1}C_n^{p-1}.$$

Facem $x=n$ și identitatea propusă este astfel stabilită.

2^0. *Soluție* dată de D-l Gh. Th. Gheorghiu-Gladiș.

Considerăm identitatea

$$x^n-C_n^1x^{2n}+C_n^2x^{3n}-\ldots+(-1)^nC_n^nx^{(n+1)n}=x^n(1-x^n)^n$$

integrând în ambii membrii dela 0 la 1 obținem

$$\frac{1}{n+1}-\frac{C_n^1}{2n+1}+\frac{C_n^2}{3n+1}-\ldots+(-1)^n\frac{C_n^n}{n(n+1)+1}=\int_0^1 x^n(-x^n)^n\,dx.$$

Pentru integrala din membrul al doilea, considerăm formula

$$(a)\quad \int x^m(a+bx^n)^p\,dx=\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{np+m+1}+\frac{anp}{np+m+1}\int x^m(a+bx^n)^{p-1}\,dx$$

care în cazul nostru ne dă

$$\int_0^1 x^n(1-x^n)^n\,dx=\frac{nn}{n(n+1)+1}\int_0^1 x^n(1-x^n)^{n-1}\,dx$$

integrând mai departe, găsim

$$\int_0^1 x^n(1-x^n)^n\,dx=\frac{n^2\cdot n(n-1)}{[n(n+1)+1](n^2+1)}\int_0^1 x^n(1-x^n)^{n-2}\,dx$$

și, din aproape în aproape

$$\int_0^1 x^n (1 - x^n)^n \, dx = \frac{n^n (n!)}{(n+1)(2n+1)(3n+1)\ldots[n(n+1)+1]}.$$

3°. *Soluție* dată de D-l V. Novacu. Dacă în formula cunoscută (Aubert & Papelier, Ex. d'Algèbre, t. II, pag. 17)

$$f_n(x) = f(x + nh) - C_n^1 f[x + (n-1)h] + C_n^2 f[x + (n-2)h] - \ldots + (-1)^n C_n^n f(x)$$

în care

$$f_n(x) = f_{n-1}(x+1) - f_{n-1}(x) \qquad n = 1, 2 \ldots$$

facem

$$f(x) = \frac{1}{n+1}, \quad h = n$$

obținem tocmai identitatea propusă.

Notă. 1°. A arătat că identitatea se poate stabili prin descompunerea în fracțiuni simple, cum s'a făcut la prima soluție, D-l V. Novacu.

2°. Integrala întâlnită la soluția a doua se poate calculă mai lesne. In adevăr, formula (*a*) conduce la relația

$$\int_0^1 x^n (1 - x^n)^p \, dx = \frac{np}{(p+1)n+1} \int_0^1 x^n (1 - x^n)^{p-1} \, dx.$$

Dând lui p valorile $p-1, \ldots 2, 1$ și înmulțind relațiunile obținute membru cu membru, integralele intermediare dispar și ne mai rămâne

$$\int_0 x^n (1 - x^n)^p \, dx = \frac{n^p \, p!}{(2n+1)(3n+1)\ldots[(p+1)n+1]} \int_0^1 x^n \, dx$$

$$= \frac{n^p \, p!}{(n+1)(2n+1)\ldots[(p+1)n+1]}$$

în care nu avem decât să facem $p = n$, spre a regăsi identitatea din enunț.

Pe aceiaș cale puteam stabili astfel identitatea mai generală

$$\frac{1}{n+1} - \frac{C_p^1}{2n+1} + \frac{C_p^2}{3n+1} \ldots (-1)^p \frac{C_p^p}{(p+1)n+1} = \frac{n^p \, p!}{(n+1)(2n+1)\ldots[(p+1)n+1]}$$

integrând ambii membrii ai identității

$$x^n - C_p^1 x^{2n} + C_p^2 x^{3n} \ldots = x^n (1 - x^n)^p$$

sau, considerând identitatea

$$x^m - C_p^1 x^{n+m} + C_p^2 x^{2n+m} \ldots + (-1)^p C_p^p x^{pn+m} = x^m (1 - x^n)^p$$

am fi obţinut identitatea şi mai generală

$$\frac{1}{m+1} - \frac{C_p^1}{n+m+1} + \frac{C_p^2}{2n+m+1} \ldots + (-1)^p \frac{C_p^p}{pn+m+1} = \frac{n!\,p!}{(m+1)(n+m+1)(2n+m+1)\ldots(pn+m+1)}$$

identităţi cari cred însă că sunt cunoscute, deopotrivă cu cea propusă.

3°. Integralele de mai sus pot fi puse în legătură cu integrala celebră

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{p-1} dx$$

cunoscută sub numele de *integrala eulerianã de prima speţă* şi având ca valoare

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}.$$

M. G.

---

*PROBLEMA 3897. *Să se determine* x *astfel încât să avem :*

$$\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + ux + 3} > \frac{1}{2}.$$

CĂPITAN I. LINTEŞ.

Inegalitatea dată se mai poate scrie :

$$\frac{2(x^2 - x - 2) - (x^2 + ux + 3)}{2(x^2 + ux + 3)} > 0.$$

Sau se poate reduce la condiţia :

$$\frac{x^2 - (u+2)x - 7}{x^2 + ux + 3} > 0.$$

Făcând notaţiunile :

$$P_1(x) = x^2 - (u+2)x - 7$$
$$P_2(x) = x^2 + ux + 3$$

Atunci fracţiunea :

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}$$

va fi mai mare decât zero când :

$$P_1(x) > 0 \quad \text{şi} \quad P_2(x) > 0$$

sau

$$P_1(x) < 0 \quad \text{şi} \quad P_2(x) < 0.$$

Dar știm că un trinom de gradul al doilea va fi mai mare decât zero când variabila ia valori exterioare intervalului dintre rădăcini și valori mai mici decât zero, pentru valori interioare intervalului dintre rădăcini, socotindu-se rădăcinile reale. In cazul când rădăcinile sunt imaginare, ele fiind conjugate, trinomul va fi pozitiv.

Fie $x_1 > x_2$ și $x' > x''$ rădăcinele celor două trinoame, atunci fracțiunea dată va fi mai mare decât zero când vom avea:

1) — rădăcini reale și:

$$x > x_1 \quad \text{și} \quad x > x'$$

sau

$$x < x_2 \quad \text{și} \quad x < x''$$

sau

$$x_1 > x > x_2 \quad \text{și} \quad x' > x > x''$$

2) — rădăcini imaginare.

Rezolvând trinoamele, găsim:

$$x_1,\ x_2 = \frac{x + 2 \pm \sqrt{4^2 + 4u + 32}}{2}$$

și

$$x',\ x'' = \frac{-u \pm \sqrt{4^2 - 12}}{2}.$$

Rădăcinile x_1 și x_2 sunt reale căci:

$$4^2 + 4x + 32 > 0.$$

Rădăcinile x' și x'' sunt reale când:

$$u \geqslant 2\sqrt{3}.$$

Observăm apoi că pentru u variind dela $+ 2\sqrt{3}$ pânăla $+ \infty$ avem:

$$x_1 > 0 \quad \text{și} \quad x' < 0$$

deci vom avea $x_1 > x'$.

Deasemenea în acest caz avem:

$$0 > x_2 > x''.$$

In cazul când u variază dela $- \infty$ pânăla $+ 2\sqrt{3}$, atunci avem:

$$P_2(x) > 0$$

deci pentru ca fracția să fie pozitivă, va trebui să avem:

$$x_1 > x > x_2.$$

In rezumat iată condițiunile când fracțiunea va fi mai mare ca zero:

dacă	avem	prin urmare	deci fracția va fi mai mare ca zero pentru
$u \geqslant 2\sqrt{3}$	$x_1 > 0$ și $x' < 0$	$x_1 > x'$	$x > x_1$
	$0 > x_2 > x''$	$x_2 > x''$	$x < x''$
$u < 2\sqrt{3}$	x' și x'' imaginare	$P_2(x) > 0$	$x_1 > x > x_2$

Observațiuni:

1) Problema a fost dată pentru cazul când $u = 4$, ori din eroare s'a luat u în loc de 4 la publicare.

In acest caz fracțiunea deveneà:

$$\frac{(x-1)\,(x+7)}{(x+1)\,(x+3)} > 0.$$

Unde ar trebui să avem:

$$\frac{x > 1 \;\Big|\; x > -7 \;\Big|\; \text{deci} \;\Big|\; x > 1}{x > -1 \;\Big|\; x > -3 \;\Big|\; \text{deci} \;\Big|\; x > -1} \quad \text{de unde } (x > 1)$$

sau

$$\frac{x < 1 \;\Big|\; x > -7 \;\Big|\; \text{deci} \;\Big|\; 1 > x > -7}{x < -1 \;\Big|\; x > -3 \;\Big|\; \text{deci} \;\Big|\; -1 > x > -3} \quad \text{de unde } (-1 > x > -3)$$

sau

$$\frac{x > 1 \;\Big|\; x < -7 \;\Big|\; \text{imposibil}}{x > -1 \;\Big|\; x < -3 \;\Big|\; \text{imposibil}}.$$

Soluţiunile sunt deci:

$$x > 1 \qquad \text{sau} \qquad -1 > x > -3.$$

2) D-l P. I. Ghişoiu a trimis soluţie complectă, însă cu câteva greşeli de interpretare a rădăcinilor.

3) Celelalte soluţiuni anunţate pe copertă, constau mai mult în indicaţiuni asupra felului cum s'ar puteà rezolvà o asemenea problemă.

In consecinţă recomandăm corespondenţilor să deà soluţiunea complectă diverselor probleme ce işi propune să rezolve.

Căpitan I. Linteş.

---

*PROBLEMA 3927. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ştiind că cei trei coeficienţi: a, b, c *reprezintă temperatura citită în acelaş timp pe un termometru Réaumur, Celsius şi Farenheit.*

In ce caz rădăcinele sunt reale?

Căpitan I. Linteş.

Soluţie dată de D-nii: Vladimir I. Crivăţ (Bucureşti), Nicolae N. Velicescu, Nicolae N. Mihăileanu (cl. VII Lc. Constanţa) şi I. C. Boian.

Din Fizică se ştie că:

$$\frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c - 32}{5}.$$

Deci în funcţie de gradele Celsius vom aveà:

$$a = \frac{4}{5}b \quad \text{şi} \quad c = \frac{9b + 160}{5}.$$

In acest caz ecuaţia dată devine:

$$4b \cdot x^2 + 5bx + 9b + 160 = 0$$

ale cărei rădăcini sunt:

$$x_{1,2} = -\frac{5}{8} \pm \frac{\sqrt{-b(119b + 2560)}}{8 - b}.$$

De unde condiţia de realitate a rădăcinilor va fi când:

$$-b(119b + 2560) \geqslant 0.$$

Adică în cazul când:

$$\begin{matrix} b \leqslant 0 \\ 119b + 2560 \geqslant 0 \end{matrix} \quad \text{sau} \quad \begin{matrix} b \geqslant 0 \\ 119b + 256 \leqslant 0. \end{matrix}$$

Însă numai primele condiţiuni sunt posibile, celelalte nefiind posibile decât în cazul când una din ele este egală cu zero, condiţie ce apare şi în primele neegalităţi.

Prin urmare rădăcinile ecuaţiei vor fi reale când:

$$0 \geqslant b \geqslant -\frac{2560}{119}.$$

Soluţie dată de D-l Constantin N. Avram.

Procedând ca mai sus, transformăm coeficienţii în funcţie de c (temperatura citită pe termometrul Farenheit), atunci găsim ecuaţiunea:

$$4x^2(c - 32) + 5x(c - 32) + 9c = 0,$$

pe care rezolvând-o, găsim că rădăcinile vor fi reale când:

$$32 \geqslant c \geqslant -\frac{800}{119}.$$

Soluţie dată de D-l Chiţu P. Marin.

Transformând coeficienţii în funcţie de a avem ecuaţia:

$$4ax^2 + 5ax + 9a + 128 = 0$$

ale cărei rădăcini vor fi reale când:

$$0 \geqslant a \geqslant -\frac{2048}{119}.$$

Soluţie dată de D-l Haralamb P. Ionescu-Biss.

Ştiind că: a este temperatura pe termometru Réaumur, b pe Celsius şi c pe Farenheit, atunci prin permutarea coeficienţilor avem ecuaţiunile:

$$1)\ \begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ cx^2 + bx + a = 0 \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} ax^2 + cx + a = 0 \\ bx^2 + cx + b = 0 \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} bx^2 + ax + c = 0 \\ cx^2 + ax + b = 0 \end{cases}.$$

Grupate câte două după realizantul lor comun.

Condiţiunile de realitate a rădăcinilor sunt atunci:

1) $$0 \geqslant b \geqslant -\frac{2560}{119}$$

2) $$b \geqslant -1440 + 5\sqrt{81920}$$

sau

$$b \leqslant -1440 - 5\sqrt{81920}$$

3) $$0 \geqslant b \geqslant -\frac{160}{9}\ .$$

Observaţiuni.

1) D-l P. I. Ghişoiu a rezolvat bine problema, ca la prima soluţie, însă a greşit la înmulţirea coeficienţilor realizantului.

2) Alte soluţiuni mai lungi au dat D-nii: Mihail Velea şi Ioan C. Savin, primul studiind în detaliu toate cazurile.

3) In soluţia D-lui H. P. Ionescu-Biss am găsit deasemenea greşeli de înmulţire numerică, dar mai important este faptul că rezolvând realizantul sistemului 3) de ecuaţii, găseşte rădăcinile:

$$b_1,\ b_2 = -1440 \pm \sqrt{-4866}\ \ (?!)$$

în funcţie de care exprimă condiţiunile lui b. Este păcat să se facă o asemenea eroare, când cineva îşi propune să studieze problema în toate modurile posibile!

4) Din soluţia problemei, rezultă că ecuaţia dată nu trebue rezolvată decât iarna, în regiunea noastră, toamna sau primăvara şi uneori iarna la polul nord şi sud, iar la ecuator niciodată, căci va avea rădăcini imaginare.

Căpitan I. Linteş.

PROBLEMA 3946. *Fie* A', B', C' *punctele unde înălţimile triunghiului* ABC *intersectează a doua oară cercul* O *circumscris acestui triunghiu şi fie* A_1, B_1, C_1 *punctele diametral opuse punctelor* A', B', C'. *Notăm cu* A_2, B_2, C_2 *respectiv intersecţiile perechilor de drepte* (BB_1, CC_1), (CC_1, AA_1), (AA_1 BB_1). *Să se demonstreze că:*

1°. O *este centrul cercului lui* Euler *al triunghiului* $A_2B_2C_2$.

2°. *Triunghiurile* A'B'C' *şi* $A_2B_2C_2$ *sunt ortologice.*

C. Ciorănescu.

Soluţie dată de D-rele: Mariana Abramescu, Eleonora Antoniu (Studente Cluj) şi de D-nii: N. N. Aldea, Traian Puta, Haralamb P. Ionescu-Biss, Vladimir Crivăţ, Titu Gh. Velicescu (Studenţi), Sub-Lt. Aurelian Stan, Sub-Lt. I. Zamfirescu, V. Şerbănescu, N. Floricel şi Vasile Vasu.

AA′ fiind înălțime în triunghiul ABC, iar $A'A_1$ diametru în cercul O, rezultă că AA_1 e paralelă cu BC; triunghiul $A_2B_2C_2$ se obține deci ducând prin vârfurile A, B, C paralele la laturile opuse. A, B, C, sunt atunci mijloacele laturilor triunghiului $A_2B_2C_2$, iar cercul O care trece prin aceste puncte va fi cercul lui EULER pentru triunghiul $A_2B_2C_2$.

Dreptele AA′, BB′, CC′ sunt pentru triunghiul $A_2B_2C_2$ mediatoare, întrucât B_2C_2 de ex. e paralelă cu BC, deci AA′ e perpendiculara în A pe B_2C_2. Concurența lor e demonstrată.

N. I. C.

PROBLEMA 3956. *Cu notațiunile obișnuite, în orice triunghiu avem relațiunea*

$$4R\Sigma\frac{1}{a}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A = \Sigma\frac{ab}{r_a r_b}$$

ION S. ANTONIU.

1. *Soluție.* In orice triunghiu avem

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A = \frac{r_a}{p} = \frac{rr_a r_b r_c}{prr_b r_c} = \frac{S^2}{Sr_b r_c} = \frac{S}{r_b r_c} = \frac{abc}{4Rr_b r_c}$$

$$\therefore \quad 4R\frac{1}{a}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A = \frac{bc}{r_b r_c}$$

$$\therefore \quad 4R\Sigma\frac{1}{a}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A = \Sigma\frac{ab}{r_a r_b}$$

c. c. t. d.

2. Au *stabilit* relațiunea pe o cale analoagă cu cea de sus, Domnii: ION GH. POPA (cl. VII, Liceul Oltenița), V. I. CRIVĂȚ și T. G. VELICESCU (Șc. Politechnică București), N. N. ALDEA, HAR. P. IONESCU-BISS și M.-L. A. NEGREA (Studenți București), M. VELEA (Student Cluj).

3. Au *stabilit* relațiunea pe o cale diferită de cea de sus, Domnii: I. PAREPEANU (Liceul Brașov), TR. PUTA și V. VASU (Studenți), SUB-LT. A. I. STAN (Cluj) și A. CONSTANTINESCU.

4. Au *verificat* relaţiunea, Domnii: N. A. DOBROGEANU (Liceul «Dragoş-Vodă», Câmpulung), V. I. IONESCU (cl. VII, Liceul «Mihail Eminescu», Bucureşti), C. PALIŢA (Liceul Iaşi), P. I. GHIŞOIU (Şc. Politechnică Bucureşti), E. MEREUŢĂ (Student Bucureşti) şi I. DEAC.

5. Domnii: N. N. ALDEA, V. I. CRIVĂŢ, SUB.-LT. A. STAN şi T. G. VELICESCU au stabilit pe aceiaş cale, relaţiunea mai generală

$$4^n R^n \sum \frac{1}{a^n} \operatorname{tg}^n \tfrac{1}{2}A = \sum \frac{a^n b^n}{r_a^n r_b^n} .$$

I. S. A.

*EXERCIŢII

30. Dacă între rădăcinile x_1 şi x_2 ale ecuaţiei $ax^2 + bx + c = 0$ există relaţia

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = -1,$$

atunci coeficienţii ecuaţiei sunt în progresie geometrică

I. PAREPEANU.

R. Se cunosc următoarele relaţiuni între rădăcini şi coeficienţi:

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2} \quad ; \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} .$$

Împărţind membru cu membru relaţiunile precedente şi ţinând seama de condiţia din enunţ, obţinem:

$$\frac{b^2 - 2ac}{ac} = -1 \qquad \therefore \qquad b^2 = ac.$$

31. In orice triunghiu există relaţia:

$$\sum \frac{(r_a^n - r^n)(r_b^n + r_c^n)}{(pn \operatorname{tg}^n \tfrac{1}{2}A - r^n)\, p^n \left(\operatorname{tg}^n \tfrac{1}{2}B + \operatorname{tg}^n \tfrac{1}{2}C\right)} = \sum \frac{r}{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}A} + 3 - p.$$

(Generalizarea exerciţiului 22 din G. M. Nr. 2/XXXIV).

VL. I. CRIVĂŢ.

R. Folosindu-ne de relaţiile:

$$p^n \operatorname{tg}^n \tfrac{1}{2}A = r_a^n, \text{ etc.}$$

primul membru devine

$$\sum \frac{(r_a^n - r^n)(r_b^n + r_c^n)}{(r_a^n - r^n)(r_b^n + r_c^n)} = 3.$$

Din relaţiile $(p - a) \operatorname{tg} \frac{A}{2} = r$, etc., introduse în membrul al doilea, deducem:

$$\sum \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}A} + 3 - p = \Sigma (p - a) + 3 - p = 3.$$

32. Ce devine expresiunea

$$E = \frac{x^\alpha + ax^\beta + b}{x^\alpha + bx^\beta + c}$$

pentru

$$x = \sqrt[\alpha]{\frac{b^2 - ac}{a - b}} ?$$

SULLĂ PAVEL.

R.

$$E = \frac{a}{b} .$$

33. Ecuaţiunea $x^2 + px + q = 0$ având rădăcinile $\operatorname{tg} \frac{x_1}{2}$ şi $\operatorname{tg} \frac{x_2}{2}$, să se formeze ecuaţiunea care are rădăcinile $\sin x_1$ şi $\sin x_2$.

S.-LT. A. STAN.

R. Se scriu relaţiile dintre rădăcini şi coeficienţi, şi ţinând seama că

$$\sin x_1 = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x_1}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x_1}{2}}$$

se obţine

$$[p^2 + (q - 1)^2] X^2 + 2p (q + 1) X + 4q = 0.$$

34. Dacă Δ este dreapta lui SIMSON a unui punct M faţă de un triunghiu ABC şi d distanţa acesteia la ortopolul ei tot faţă de ABC, avem relaţia

$$\overline{AM} \cdot \overline{BM} \cdot \overline{CM} = 4R^2 d.$$

ION C. VASILIU.

R. Se vede uşor că $AM = 2R \cos\varphi_1$, etc., unde φ_1, φ_2, φ_3 sunt unghiurile transversalei Δ faţă de laturile triunghiului. Pe dealtă parte $d = 2R \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3$.

PROBLEME PROPUSE

*3943 [1]). Se cer două patrate de câte patru cifre, unul răsturnatul altuia, care să difere cu un patrat.

ST. DOBRESCU.

*3991. Care este capacitatea minimă în decalitri a unui butoiu care ar conține un număr exact de vedre, fie de Muntenia, fie de Moldova? Vadra aveà în ambele țări 10 ocale, iar ocaoa de Muntenia echivalà cu 1,288 litri și cea din Moldova 1,52 litri. Câtă greutate de apă ar intrà în acel butoiu, știind că ocaoa de greutate aveà 1,27186 kg în Muntenia și 1,291 kg în Moldova?

I. IONESCU.

*3992. Să se arate că numerele :

11 . . . 11088 . . . 889 și 44 . . . 44355 . . . 56,

la care repetările indicate se face de același număr de ori, sunt patrate perfecte.

I. V. MĂTIEȘ.

*3993. Să se arate că între volumele V_a , V_b , V_c , născute de un triunghiu ABC prin rotirea succesivă în jurul laturilor a, b, c, există relațiile

$$aV_a = bV_b = cV_c .$$

M. GHERMĂNESCU.

*3994. Să se construiască un patrulater inscriptibil cunoscându-i-se direcțiile și lungimile diagonalelor, precum și așezarea punctului lor de intersecție pe una din ele.

N. C.

*3995. Notațiile fiind cele cunoscute, să se demonstreze că în orice triunghiu avem relația :

$$\frac{1}{r} a . b . c \sum \sin (B + C) = 4p^2.$$

IULIAN ALEXIU.

*3996. Un triunghiu ABC are laturile formate din bare de metal: AB din oțel, BC din aramă și CA din aluminium.

Încălzind triunghiul la 335,4 grade, devine echilateral.

1) Problema 3943, publicată la pag. 79, fiind identică cu exercițiul 22, publicat la pag 158, se înlocuește cu prezenta.

Știind că AB = $1m$, iar coeficienții de dilatație sunt respectiv

$$\frac{11}{10^6}, \quad \frac{17}{10^6} \text{ și } \frac{23}{10^6}$$

să se determine lungimea celorlalte două laturi.

La ce temperatură laturile triunghiului ar satisface relația :

$$AB = BC + CA.$$

CĂPITAN I. LINTEȘ.

*3997. Din discuția ecuației în x,

$$\sqrt{ax^2 - (a+3)x + 3} = y,$$

să se determine maximul și minimul lui y. Să se determine a astfel ca maximul lui y să fie egal cu 2 și să se afle valoarea lui x corespunzătoare. Să se figureze curba reprezentativă a variației lui y, fără derivate.

N. ABRAMESCU.

*3998. Fie ABC un triunghiu dreptunghiu în A ; se duce bisectoarea BD a unghiului B ; se ridică apoi în C o perpendiculară pe AC, de mărime CE = BC.

Să se arate că

$$\sphericalangle CED = \sphericalangle \frac{B}{2}.$$

Să se deducă apoi o demonstrație geometrică a formulei

$$\operatorname{cotg} \frac{B}{2} = \frac{a+c}{b}.$$

MARIN P. CHIȚU.

3999. Se dă triunghiul ABC, obtuz in B. Din vârful B se ridică o perpendiculară pe latura BC, care taie latura AC în D și face cu latura AB un unghiu φ. Lungimea lui BD fiind constantă, se cere variația lungimei laturei BC în funcțiune de lungimea laturei AB, când unghiul φ variază între 0 și $\frac{1}{2}\pi$, știind că există relația

$$k \cdot \overline{AB} = \sin 2\varphi.$$

LT.-COLONEL V. MIHĂILESCU
și ING. ION S. ANTONIU.

4000. Fie

$$u_n = \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \frac{1}{2n} - 1,$$

e fiind baza logaritmilor neperieni. Să se arate că seria Σu_n este convergentă.

ȘERBAN A. GHEORGHIU.

BIBLIOTECA CENTRALĂ a „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

Articolele, notele și problemele însemnate cu * se referă la matematicile elementare (cursul de liceu).

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Abramescu Mariana (3882, 954); *Aldea N. N.* (3965, 66, 81, 84, N); *Aurian J.* (1364); *Avram N. C.* (3979, 81, 88); *Cojocaru V. I.* (3988); *Constantiniu C.* (3968); *Craiu N. I.* (3770, 870, 79, 95, 925, 68); *Donciu N.* (P); *Epuran A Ioan* (3965, 66); *Florescu B. I.* (1162, N); *Fridman I. M.* (3988); *Gheorghiu C. A.* (3878, 82, N, P); *Glușco N.* (3981); *Gospodin T.* (3935, 36, 60, 81); *Iacob St. Eug. Subloc.* (E); *Maevschi I.* (3981); *Mereuță E.* (3840, 981); *Mihăileanu N. N.* (3988); *Naforniță I. C.* (3968, 74); *Olteanu Șt.* (3968, 70, 81); *Parepeanu C. I.* (3988); *Popescu-Stănești M.* (3965, 66); *Roșu Al. Al.* (E, N, P); *Sachelariade St. I.* (3968); *Sandu G. Ioan* (3965); *Șerbănescu V. Fl.* (3958); *Stan Aurelian Subloc.* (3818, 925, 54, 84, P); *Sullă A. P.* (3968); *Thèbault V.* (A, N); *Trina M. P.* (3988); *Vasu Vasile* (3960, 79, 81, 84, 86); *Velea Mihail* (P); *Vissarion I. C. V.* (3988, 89); *Zamfirescu Gh. I. Subloc.* (3954, 74, E, P); *Zarda Ioan* (3935, 36, 46, 54, 60, 66, 81, 82, 84).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât și cele de propus de **geometrie,** *a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.*

Manuscrisele se vor scrie pe **o singură parte a foii și nu se vor trată mai multe chestiuni diferite pe aceiași foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac deasemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exercițiile, recreațiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani completi broşaţi cu preţul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX şi XXI care se vând cu preţul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV şi XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecţiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediţia IV revăzută şi adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamaţiunile şi cererile pentru cărţi din bibiioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Regiei Publice Comerciale «Monitorul Oficial şi Imprimeriile Statului», B-dul Elisabeta 29, Bucureşti I.

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii şi orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie şi expediţie, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călugărei 23, Bucureşti 4.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXVI.

NUMĂRUL 8. — APRILIE 1931.

SUMARUL

1. Generalizarea problemei 3372 . . *Prof. Gh. Constantinescu.*
2. O variabilă importantă în combustiunea motoarelor de aviaţie . . *Căpitan Gh. Niculescu.*
3. Raportul Comisiunei pentru acordarea premiului „General Sc. Panaitescu".
4. Note matematice: 27 — 30.
5. Bibliografie.
6. Cereri: 203 — 204.
7. Diverse.
8. Probleme rezolvate: 1162, 1364, 2223, 3696, 3783, 3805, 3886, 3887, 3954, 3963.
9. Exerciţii: 35 — 40.
10. Probleme propuse: 4001 — 4010.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

REGIA M. O., IMPRIMERIA NAŢIONALĂ

1931

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXXVI se compune din D-nii: Colonel **Gh. I. Liteanu** dela Marele Stat Major al Armatei; **G. A. Nichifor**, Doctor în Matematici, Conferenţiar la Universitatea din Bucureşti; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Regiei Publice Comerciale «Monitorul Oficial şi Imprimeriile Statului», Cassier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui Inginer-Şef GH. ILIESCU, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 310, 33, 55, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 82, 553, 87, 650, 79, 711, 29, 53, 64, 807, 76, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 233, 338, 53, 82, 405, 22, 30, 39, 56, 66, 77, 502, 03, 45, 56, 77, 80, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 65, 84, 92, 95, 709, 13, 17, 35, 58, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 56, 3005, 45, 69, 81, 127, 50, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 07, 08, 09, 10, 16, 18, 20, 50, 61, 79, 405, 12, 24, 25, 45, 72, 89, 91, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 20, 22, 25, 27, 32, 46, 47, 57, 65, 79, 81, 82, 84, 94, 99, 700, 03, 20, 33, 36, 80, 84, 93, 99, 804, 08, 10, 29, 35, 36, 44, 45, 48, 53, 64, 70, 80, 96, 98, 908, 09, 13, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 33, 44, 49, 50, 51, 59, 72, 73, 76, 80, 83, 85, 87, 91, 94, 97, 99, 4000, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

GENERALIZAREA PROBLEMEI 3372

In G. M. anul XXXIV pagina 161, D-nul Col. G. Buicliu dă soluțiunea generală a problemei 3372, rezolvată în G. M. pagina 345 Volum. XXXIII.

Imi propun în articolul prezent să generalizez această problemă și să deduc un metod mai practic și mai general pentru soluțiunea generală a problemei 3372.

Problema se poate generalizà în modul următor:

Să se găsească forma generală a numerilor N care răspund simultan la următoarele condițiuni:

1°) Resturile diviziunei lui N^i prin

$d_1 , d_2 , d_3 . . . d_k$ sunt respectiv $r_1 , r_2 , r_3 . . . r_k$.

2°) Resturile diviziunei lui $N^{i'}$ prin

$d'_1 , d'_2 . . . d'_{k'}$ sunt respectiv $r'_1 , r'_2 . . . r'_{k'}$.

Dacă însemnăm cu N numărul căutat și prin $x_1 , x_2 . . . x_k$, k parametri întregi, pentru ca acest număr să satisfacă condițiunii 1°) trebuie să avem:

$$(1) \quad N^i = d_1x_1 + r_1 = d_2x_2 + r_2 = \ldots = d_k x_k + r_k .$$

Rezolv aceste k ecuațiuni în numere întregi, găsesc:

$$(2) \quad N^i = DX + R,$$

unde D și R sunt numere cunoscute, iar X este un parametru arbitrar.

Fie

(3) $D = p_1p_2p_3 . . . p_h$, unde $p_1p_2 . . . p_h$ sunt numere prime sau puteri ale numerilor prime.

Din (2) deduc:

$$(4) \quad X = \frac{N^i - R}{p_1p_2 \ldots p_h} .$$

Pentru ca X să fie întreg, trebuie ca numărătorul din (4) să se împartă cu fiecare din factorii numitorului.

Să cercetăm condițiunea ce trebuie să îndeplinească N pentru ca $N^i - R$ să se împartă cu p_1.

Numerile N și R față de p_1 sunt de forma:

(5) $N = m_1 p_1 + q_1 \qquad R = m'_1 p_1 + q'_1$ unde q_1 şi $q'_1 < p_1$.
Din (5) deducem că:

(6) $N^i = M_1 p_1 + q_1^i$ şi pentru ca $N^i - R$ să se împartă cu p_1, trebuie ca restul împărţirei lui q_1^i prin p_1 să fie egal cu q'_1; de aci rezultă că trebuie să căutăm toate numerile mai mici ca p_1, ale căror puteri a i^{lea} să dea ca rest pe q'_1 când se împart cu p_1.

Fie acele numere $a_1 a_2 \ldots a_e$ care se bucură de aceste proprietăţi, urmează că N va fi de forma:

$$N = m_1 p_1 + a_1$$
$$N = m_2 p_1 + a_2$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$N = m_e p_1 + a_e$$

pentru care valori expresiunea $N^i - R$ se împarte cu p_1.

Procedând în acelaş mod cu toţi factorii $p_1 p_2 \ldots p_h$, găsim h grupe de condiţiuni, pe care trebuie să le împlinească numărul N.

Luăm acum în toate modurile posibile câte o formă din fiecare grupă şi egalându-le căpătăm câte un sistem de ecuaţiuni liniare care se pot rezolva sau nu în numere întregi.

Acele sisteme de ecuaţiuni liniare în care numărul necunoscutelor e întotdeauna mai mare cu unu faţă de numărul ecuaţiunilor şi cari au soluţiuni întregi dau fiecare câte un şir de valori pentru numărul N care satisfac condiţiunii (1^0).

Pentru ca numărul N să satisfacă şi condiţiunii 2^0) procedăm în mod identic şi găsim deci mai multe serii de valori pentru N care satisfac condiţiunii (2^0).

Pentru a găsi acum valorile lui N care satisfac condiţiunii 1^0) şi 2^0), trebuie să luăm în toate modurile posibile câte o formă a lui N care satisfac condiţiunii 1^0) cu câte o formă a lui N care satisface condiţiunii 2^0) şi egalate ne dau câte o ecuaţiune cu 2 necunoscute, care rezolvate în numere întregi ne dau toate valorile lui N care satisfac condiţiunii cerute:

Aplicaţie:

Soluţiunea generală a problemei 3372 unde cele 2 condiţiuni sunt:

1^0) Resturile diviziunei lui N^2 prin 5, 11 şi 17 sunt respectiv 4, 1 şi 8.

2°) Resturile diviziunei lui N^3 prin 7 şi 8 sunt respectiv 6 şi 3. Pentru ca numărul N să satisfacă condiţiei 1°) trebuie să avem:

$$N^2 = 5x_1 + 4 = 11x_2 + 1 = 17x_3 + 8.$$

Rezolvând aceste 3 ecuaţiuni, găsim:

$N^2 = 935X + 144$ din care deducem că

$$X = \frac{N^2 - 144}{5 \cdot 11 \cdot 17}.$$

Numărul 144 dă ca rest al diviziunei prin 5, 11 şi 17 respectiv numerile 4, 1 şi 8, iar ca pătratul lui N să dea aceleaşi resturi când se divide cu 5, 11 şi 17 trebuie ca N să fie de forma:

$$N = 5x_1 \pm 2 \qquad N = 11x_2 \pm 1 \qquad N = 17x_3 \pm 5.$$

Combinând 3 câte 3 aceste forme ale lui N găsim 8 sisteme de ecuaţiuni:

1) $N = 5x_1 + 2 = 11x_2 + 1 = 17x_3 + 5$

2) $N = 5x_1 + 2 = 11x_2 + 1 = 17x_3 - 5$

3) $N = 5x_1 + 2 = 11x_2 - 1 = 17x_3 + 5$

4) $N = 5x_1 + 2 = 11x_2 - 1 = 17x_3 - 5$

5) $N = 5x_1 - 2 = 11x_2 + 1 = 17x_3 + 5$

6) $N = 5x_1 - 2 = 11x_2 + 1 = 17x_3 - 5$

7) $N = 5x_1 - 2 = 11x_2 - 1 = 17x_3 + 5$

8) $N = 5x_1 - 2 = 11x_2 - 1 = 17x_3 - 5.$

Rezolvând aceste sisteme de ecuaţiuni, găsim 8 serii de valori pentru N care satisfac condiţiunile 1°).

$N = 935X \pm 12 \qquad N = 935X \pm 243 \qquad N = 935X \pm 318$

$N = 935X \pm 362.$

Pentru ca N să satisfacă condiţiunea a 2-a trebuie ca să avem:

$$N^3 = 7y_1 + 6 = 8y_2 + 3.$$

Rezolvând aceste două ecuaţiuni găsim:

$N^3 = 56y + 27$ din care deducem că:

$$y = \frac{N^3 - 27}{7 \cdot 8}.$$

Resturile lui 27 divizat cu 7 şi 8 sunt respectiv 6 şi 3, iar dintre numerile mai mici ca 7 ale căror cuburi să dea restul 6 când sunt împărţiţi cu 7 sunt 3, 5 şi 6 deci N trebuie să fie de una din formele

$$N = 7y_1 + 3 \qquad N = 7y_2 + 5 \quad \text{şi} \quad N = 7y_3 + 6$$

şi numerile mai mici ca 8 ale căror cuburi să dea restul 3 când sunt împărţiţi cu 8 este numai numărul 3, deci N trebuie să fie de forma $N = 8z_1 + 3$.

Combinând aceste forme ale lui N două câte două, găsim 3 ecuaţiuni:

1) $\qquad 7y_1 + 3 = 8z_1 + 3$

2) $\qquad 7y_2 + 5 = 8z_1 + 3$

3) $\qquad 7y_3 + 6 = 8z_1 + 3.$

Rezolvând aceste 3 ecuaţiuni, găsim:

$N = 56y + 19$, $N = 36y + 27$ şi $N = 56y + 3$ care sunt toate valorile lui N care satisfac condiţiunei 2^0).

Luând acum una din cele 8 forme ale lui N care răspund la condiţiunea 1^0) cu una din cele 3 forme ale lui N care corespund la condiţiunile 2^0) găsim 24 de ecuaţii cu 2 necunoscute cari le-a aflat D-l Col. G. Buicliu şi cari rezolvate ne dau toate valorile lui N care satisfac celor 2 condiţiuni.

Prof. Gh. Constantinescu.

*O VARIABILĂ IMPORTANTĂ IN COMBUSTIUNEA MOTOARELOR DE AVIAȚIE

In ultimii ani și cu drept cuvânt, s'a dat o atenție deosebită fenomenelor de combustie la motoarele cu explozie utilizate în aviație.

O variabilă importantă și asupra căreia nu s'a insistat totuși suficient este timpul, fie cel în care amestecul de gaze stă în cilindru, fie cel în care același amestec arde.

In cele de mai jos îmi propun să găsesc expresia acestor timpuri — expresii ce, deși simple — nu le-am întâlnit totuși în manualele cunoscute.

Pornim dela formula deplasării pistonului:

$$x = \frac{l}{2}\left[1 - \cos\alpha + \frac{1}{8\lambda}(1 - \cos 2\alpha)\right],$$

unde:

l = lungimea cursei,

α = unghiul de rotație al manivelei,

λ = raportul dintre lungimea bielei și cea a cursei și din care se deduce imediat viteza pistonului:

$$u = \frac{\pi n l}{60}\left(\sin\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{4\lambda}\right),$$

n, fiind numărul de ture pe minut al motorului. Luând ca origină a deplasărilor punctul mort, atunci pentru un punct m, pentru care corespunde o rotație α_m, pistonul s'a deplasat cu x_m, introducând în expresia deplasării pe α_m.

Pentru același interval $0 - m$, viteza medie se va deduce din:

$$\int_0^{\alpha_m} u\,d\alpha = \frac{\pi n l}{60}\int_0^{\alpha_m}\left(\sin\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{4\lambda}\right)d\alpha$$

și cu ajutorul celor de mai sus găsim că timpul t_m, pe care l-a pus pistonul ca să parcurgă intervalul $0 - m$, este:

$$t_m = \frac{30}{m} \cdot \frac{\alpha_m}{\pi}.$$

Fie acum:

α_0 = întârzierea ce-o dăm admisiei,

α_1 = întârzierea ce-o dăm închiderei supapei de admisie,

α_2 = avansul la aprindere,

α_3 = locul unde se termină combustiunea.

Cu aceste notaţiuni avem:

1°. Timpul t_g, cât stau gazele în cilindru — din momentul deschiderei supapei de admisie şi până la declanşarea scânteei este dat de:

$$t_g = \frac{30}{n}\left(2 - \frac{\alpha_0 + \alpha_2}{\pi}\right) = \frac{30}{n}\left(2 - \frac{A}{\pi}\right).$$

2°. Gazele, cari intră ultimile în cilindru — imediat înaintea închiderei supapei de admisie — vor stà şi timpul cel mai scurt. Acest timp minim, $t_{g,m}$ este dat de:

$$t_{g,m} = \frac{30}{n}\left[1 - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\pi}\right] = \frac{30}{n}\left(1 - \frac{B}{\pi}\right).$$

3°. Admiţând că presiunea maximă se înregistrează când pistonul a parcurs 1/10 din cursa de detentă şi că combustia se terminase la 1/20 din aceiaşi cursă, atunci timpul în care s'a efectuat combustia gazelor este dat de:

$$t_c = \frac{30}{n} \cdot \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\pi} = \frac{30}{n} \cdot \frac{C}{\pi},$$

unde α_3 se calculează din expresia deplasării:

$$\cos\alpha_3 = \frac{\sqrt{(a+5)^2} - a - a}{5} \qquad (a = 10\lambda).$$

Dacă însă ţinem seamă că la motoarele de aviaţie λ variază dela 1,5 la 2,5, pentru această variaţie avem pentru α_3 o variaţie de maximum două grade, de aceia vom luà pentru $\cos\alpha_3$

valoarea dată pentru $\lambda = 2$ şi vom avea fără a face o eroare ce contează: $\alpha_3 = 23^0$. Cu acestea relaţia de mai sus devine:

$$t_c = \frac{30}{n} \cdot \frac{\alpha_2 + 23}{\pi}.$$

Rezultă din cele de mai sus că fenomenul combustiunii nu poate fi studiat separat de turajul motorului şi avansul la aprindere, factori de cari trebuie să se ţină seamă.

Majoritatea motoarelor de aviaţie au α_2 între minimum 20^0 şi maximum 45^0 iar turajul între 1500 şi 2500 ture pe minut. Pentru aceste limite dăm mai jos timpii t_c:

α_2 \ n	1500	1600	1700	1800	1900	2000	2100	2200	2300	2400	2500
20	208	222	237	251	265	280	293	307	322	336	350
25	188	200	213	225	238	250	262	276	288	300	312
30	170	181	192	204	215	227	238	250	260	272	284
35	155	165	176	186	196	206	217	228	238	248	258
40	143	152	162	172	181	190	200	210	220	228	238
45	132	141	150	159	168	176	185	195	203	212	220

Tabelul se va utiliză astfel: pentru un turaj de $2400 t/m$ şi un avans la aprindere de 25^0, timpul disponibil combustiei este:

$$t_{c,\,2400,\,25} = 1''/300$$

adică numărul găsit prin dublă intrare se va pune la numitorul unei fracţii cu numărătorul totdeauna 1.

Căpitan Gh. Niculescu.

RAPORTUL COMISIUNEI

PENTRU

acordarea premiului „General Sc. Panaitescu" pe anul 1929 — 1930

Subsemnaţii membri ai comisiunei pentru decernarea premiului pentru lucrări de matematici aplicate la ştiinţele militare, cercetând revistele tehnice militare şi uvraje apărute în intervalul 1/IX/1929 la 31/VIII/1930, care să trateze astfel de chestiuni, am constatat următoarele:

In acest interval au apărut:

1°. In revista „Aeronautica", a apărut articolul *„Calculul longeroanelor de lemn, de secţiune Caisson"* de D-l Locot. POPESCU ROMAN şi D-l Inginer FEODOROF.

2°. In *„Revista Artileriei"* următoarele articole:

„Un abac care dă valorile saltului în bătae şi saltului la corector, necesare a obţine pe teren, urmând panta, un salt de + 100 m." de D-l Locot. PALOŞANU NICOLAE din Brig. 9-a Artilerie.

„Studii asupra regulării tragerii cu ajutorul unei secţiuni telemetrice" de D-l Maior ATANASESCU MIHAIL.

„Orientările astronomice ale Artileriei" de D-l Maior VLĂDESCU AUGUST din Centrul de instrucţie al Artileriei.

3°. In volum tipărit la Şcoala Militară a Artileriei *„Nomografie artileristică* de D-l Căpitan NESTORESCU VALERIAN din Şcoala Specială a Artileriei.

In urma cercetării articolelor şi uvrajului de mai sus, ni s'a impus dela început, prin originalitate şi importanţă ştiinţifică uvrajul D-lui Căpitan NESTORESCU care cuprinde:

Cap. I. Legătura Nomografiei cu ştiinţele matematice şi utilizarea graficelor în tehnica artileristică, în care clasifică modurile de a efectuă calculele în: metode matematice, aparate mecanice, tabele numerice şi grafic.

Cap. II. Utilizarea graficelor în tehnica artileristică, cuprinzând:

— Studiul scărilor grafice.

— Intrebuinţarea scărilor la efectuarea calculelor.

— Principii referitoare la construirea abacelor.

Acest capitol cuprinde noţiuni de „Nomografie generală".

Cap. III. Construirea curbelor prin:

1°. Metode algebrice. — In acest paragraf, D-l Căpitan NESTORESCU, transformă tablele No. VII din „Tabla de tragere" în abace.

2°. Metode algebrice modificate.

Cap. IV. 1°. Abace asociate, cu o aplicaţie, referitoare la corecţiile momentului, în bătae.

2°. Abace multiple, în care paragraf pune problema funcţiilor trigonometrice şi cu care studiază apoi o serie întreagă de probleme de trageri.

3°. Abace obţinute prin transformarea tablelor numerice.

4°. Abace anamorfozate.

5°. Abace asociate cu o foarte interesantă aplicaţie artileristică, relativă la probabilităţi în trageri.

6°. Abace cu aliniamente de puncte, printre care unele folosibile în regularea tragerii, cu trei aplicaţiuni practice.

In toate aceste chestiuni, D-sa foloseşte noţiuni de matematici generale, în special algebră, trigonometrie şi geometrie analitică.

Ţinând seamă de originalitatea uvrajului, cât şi de golul imens ce umple acest uvraj, în ştiinţa artileristică, propunem ca „premiul General Sc. PANAITESCU" pe anul 1929 — 1930 să fie acordat D-lui Căpitan NESTORESCU VALERIAN din Şcoala Specială a Artileriei pentru lucrarea *„Nomografie artileristică"*.

Comisiunea pentru premiul „General Sc. PANAITESCU".

Lt. MIHAIL I. FOCŞENEANU, Colonel GH. I. LITEANU.

Acest raport s'a citit şi aprobat în adunarea generală extraordinară din 11 martie 1931. Anexele rămân în arhiva societăţii.

NOTE MATEMATICE

27. *Primul profesor român de geometrie analitică.* In *Revista ştiinţifică* «V. ADAMACHI» D-l P. CAZANACLI a scris un nteresant articol asupra lui IOAN POPP, care a fost numit profesor de Geometrie analitică la Universitatea din Iaşi odată cu deschiderea acestei Universităţi la 1860. La finele acelui articol se spune:

«*Toate cele spuse îmi permit a considerà pe* IOAN POPP *ca creatorul învățământului matematic la Universitatea din Iași, ca primul profesor român care a făcut un curs de geometrie analitică și în sfârșit, ca primul autor a unui curs de matematici superioare în limba română*».

In privința începutului predării de matematici superioare, cercetările trebuiesc împinse mai departe, până prin primul sfert al secolului trecut. In nota No. 1 din acest an am arătat că în București se predà *Fracții continui, Aranjări și combinări, Trigonometrie sferică.* In privința Geometriei analitice, «*Albina Românească*» din 12 Martie 1842 publică următorul anunț:

«Cinstita Epitropie a Invățăturilor publice, dând Școalei de Ingineri civili o nouă organizație, care coprinde cunoștințe teoretice și practice a acestei științe aplicate către arte și industrie, au urzit o nouă catedră de Geometrie analitică și descriptivă. Acei cari ar dori a urmà acest curs, care va fi în toate zilele dela 9 până la 10½ ceasuri, sunt poftiți a se înscrie în cancelaria Epitropii».

Geometria descriptivă o predà inginerul ALEXANDRU COSTINESCU la «Clasul ingineriei» încă din 1839. Nu cunosc în mod cert cine a făcut geometria analitică la 1842. E posibil să fi predat acest curs ION GHICA, care spune în Scrisoarea sa către VASILE ALEXANDRI din 20 Iunie 1881, următoarele:

«Când într'o zi fui prezentat D-lui Beizadea NICULACHE SUȚU, unul din Boierii cei mai învățați, atunci Postelnic și Efor al Școalelor. El petrecuse mai mulți ani în București pela 1818 și 1821 pe când tatăl său ALECU VODĂ SUȚU domnise în țara românească. Cunoscuse pe toată lumea bucureșteană depe atunci, a stat mai mult la vorbă cu mine, întrebându-mă de unul și de altul, m'a întrebat despre scopurile ce aveam și m'a sfătuit să primesc a rămâne în Moldova, oferindu-mi o catedră în Academia Mihăileană, și iată-mă așezat înaintea unei table cu creionul de cretă în mână, arătând tinerilor, dimineața, proprietățile cercului, ale elipsei, ale parabolei și ale iperbolei, și după amiază vorbindu-le despre formațiunile munților și ale straturilor pământului.

«Grei dar plăcuți ani am petrecut noi împreună; mult am luptat noi tinerii depe atunci cu prejudecățile și cu obiceiurile cele rele; mult am apropiat noi clasele între dânsele; multe idei greșite de ale bătrânilor și ale boierilor am spulberat și multe idei moderne

am implântat în spirite; multă rugină am curăţit de pe mulţi. Am făcut-o respectând credinţele fiecăruia, cinstind perii cei albi, lăudând şi admirând fapta cea bună, ori de unde veneà, şi venerând pe acei cari iubiau ţara şi dreptatea.

«Lucram şi luptam, nu împins de setea de posturi bine plătite, sau de dorinţa de ranguri pe scara arhontologiei, dar numai de dorinţa de a desvoltà în spirite şi în inimi sentimentul binelui şi al frumosului, şi iubirea de ţară. In bani eream plătiţi cum da Dumnezeu, eu pentru două lecţii pe zi, adică 24 de ceasuri de catedră pe săptămână, primiam 300 lei vechi, 8 galbeni, ceva ca 1 franc de lecţiune; dar eream bine răsplătit prin satisfacţiunea ce simţeam văzând pe toată ziua cum se lărgeà cercul ideilor celor bune. Lucram fiecare cu cuvântul şi cu condeiul după puterile mijloacelor noastre, la desvoltarea naţionalităţii române. Şi ştii că lucru nu ereà lesne într'un timp pe când chiar cea mai mică aluziune ereà pedepsită cu închisoare şi exil».

Ion Ghica se dusese la laşi în 1841, şi din cele spuse pare a reeşi că el a făcut dimineaţa, cu începere din primăvară, cursul de geometrie anunţat cu o lecţie pe zi dimineaţa dela 9 la 10½. Ar trebui cercetat mai de aproape cursul făcut de el, pentruca acestui mare român să nu i se ia şi meritul de a fi luptat pentru desvoltarea matematicilor superioare la noi în ţară.

De altfel, cursuri de geometrie analitică s'au mai făcut înainte de 1860 la Bucureşti. In *Istoria Şcoalelor* de V. A. Urechia, Volumul III, pag. 69 se dă lista profesorilor la Şcoala de aplicaţie pe timpul iernii pentru aspiranţii de ingineri la poduri şi şosele la finele anului 1854, şi acolo găsim ca profesor de geometrie descriptivă pe Orăscu (Alexandru) şi de geometrie analitică pe Constantinescu. (Probabil Emanoil Constantinescu, care a funcţionat şi la Şcoala de Conductori a lui Lalanne).

După cum se vede, începuturile matematicilor superioare trebuiesc căutate mai înainte de 1860. Menţionez că în Şcolile greceşti din laşi şi Bucureşti din secolul XVIII se făceau şi matematici superioare câte se făceau şi prin alte părţi ale Europei şi că Vito Caravelli, matematician din Neapoli, a dedicat o trigonometrie sferică lui Alexandru Ypsilante, care se predà la Bucureşti.

I. Ionescu.

28. *Sur trois triangles directement semblables.*

M. D. V. Ionescu donne dans le numero de décembre [1]) une démonstration d'un théorème de M. Pompeiu publié dans le *Bulletin de l'Ecole Polytechnique de Bucarest,* 1930 — 161.

a) La configuration de trois triangles directement semblables envisagée par M Pompeiu ne diffère pour ainsi dire pas de la suivante due à J. Neuberg [2]):

Soient ABC, A'B'C' *deux triangles directement semblables, situés dans un même plan. Quelle que soit leur situation relative, si par un même point on mène les droites* OA_1, OB_1, OC_1, *égales et parallèles à* AA', BB', CC' *le triangle* $A_1B_1C_1$ *est semblable aux triangles* ABC, A'B'C'.

Voici l'élégante solution du géomètre belge.

Soit S le centre de similitude de deux figures directement semblables F, F', et soient A, A' deux points homologues quelconques. Le triangle SAA' est d'espèce constante; donc si l'on construit le parallélogramme $SAA'A_1$ le triangle $SA'A_1$ sera également d'espèce constante et les points A', A_1 se correspondent dans deux figures semblables F', F_1.

b) Ce théorème de J. Neuberg a été retrouvé par G. Fontené comme application de cette remarque :

Soient dans l'espace deux divisions rectilignes semblables A, B, C *et* A', B', C' *et considérons les segments* A'A, B'B, CC', *qui sont parallèles à un même plan* (P) *mené sur la figure par le point* C'. *Si l'on fait une projections oblique de la figure sur ce plan* (P), *les projetantes étant parallèles à* A'B'C', *les segments sont projetés en vraie grandeur en* $C'A_1$, CB'_1, C'C *et la division* A_1, B_1, C *est semblable aux deux premières* [3]).

V. Thébault.

29. *Asupra Notei No. 14 din volumul XXXV.*

In această notă se spune că în nota 11 din volumul XXXIV am ajuns la concluziuni falşe considerând $n > p$, de fapt eu am considerat $n < p$ cum se vede din exemplele tratate la pag. 136 iar numai o eroare de tipar a făcut ca la pag. 135 (XXXIV) să

1) *Gazeta Matematica* 1930 — 124.
2) *Mathesis* 1889 — 264 et 1890 — 70.
3) *Bulletin de Mathématiques élémentaires* 1904 — 210.

se imprime $n > p$ în loc de $n < p$. Dealtfel dacă n şi p reprezintă numărul factorilor primi ai lui A şi B, niciuna din egalităţile

$$n > p \quad \text{sau} \quad n < p$$

nu formează o condiţie de existenţă sau neexistenţă a inegalităţilor

$$A > B \quad \text{şi} \quad \varphi(A) < \varphi(B).$$

Exemple edificatoare se pot găsi cu uşurinţă pentru fiecare caz în parte.

I. B. Fl.

30. *Asupra spiralei logaritmice.*

In soluţia problemei 3669 (G. M. XXXVI, pag. 66) s'a strecurat o mică eroare de calcul, care strică puţin preciziunei rezultatului enunţat.

Ne propunem problema generală următoare:

„*Să se găsească curbele* $\rho = \varphi(\omega)$, *astfel ca raza vectoare a unui punct de pe curbă să tae cercul osculator la curbă din acel punct, într'un punct care să descrie o curbă omotetică curbei* R *căutate.*

Fie M punctul depe curbă, M_1 intersecţia razei vectoare din O cu cercul osculator la curbă în M, α unghiul făcut de tangenta în M la curbă cu raza vectoare OM; păstrând notaţiile din problema amintită, vom aveà, R fiind raza de curbură în M

$$\rho = OM \quad , \quad \rho_1 = OM_1 = \rho + MM_1 = \rho + 2R\sin\alpha$$

condiţia din enunţ fiind $\rho_1 = k\rho$, aceasta se reduce la

$$(a) \qquad 2R\sin\alpha = (k - 1)\rho.$$

Insă

$$R = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}$$

iar din $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\rho}{\rho'}$ deducem

$$\sin\alpha = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}$$

condiția (a) devine

$$\frac{2(\rho^2 + \rho'^2)}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''} = (k - 1)$$

sau, inversând

$$\frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + \rho'^2} = \frac{2}{k-1}$$

sau

$$\frac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + \rho'^2} = \frac{3-k}{k-1}$$

sau

$$\frac{d\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)}{1 + \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2} = \lambda d\omega \qquad \lambda = \frac{k-3}{k-1}$$

integrând, avem, a fiind o constantă arbitrară

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\rho'}{\rho} - a\right) = \lambda\omega$$

sau

$$\frac{\rho'}{\rho} = a + \operatorname{tg}\lambda\omega$$

integrând a doua oară, găsim

$$(a) \qquad \rho = ce^{a\omega} \cos^{-\frac{1}{\lambda}}(\lambda\omega)$$

c fiind a doua constantă arbitrară.

In cazul când $c = 1$, $\lambda = 0$, deci $k = 3$, avem $\rho = e^{a\omega}$, ceeace arată că spirala logaritmică este o curbă particulară, bucurându-se de proprietatea enunțată. Avem atunci:

$$R = \sqrt{1 + a^2}\,\rho \quad , \quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

deci

$$\rho_1 = \rho + 2R\sin\alpha = \rho + 2\rho = 3\rho.$$

Eroarea amintită la problema 3669 provine din faptul că la calculul razei de curbură R s'a luat $\rho'' = ae^{2a\omega}$, pe când în realitate $\rho'' = a^2e^{2a\omega}$.

M. GHERMĂNESCU.

BIBLIOGRAFIE

Bulletin de la Section scientifique de l'Académie roumaine. XIII Année. No. 8. Bucarest 1930. Sur le théorème des accroissements finis et le théorème de la moyenne, par E. ABASON.

Idem. No. 9 — 10. Sur un nouveau microphone à charbon, par M. MARINESCO.

M. MARINESCO. *Sur un nouveau microphone à charbon.* (Extras din *Bulletin de la Section scientifique de l'Académie roumaine*). Bucarest 1930.

Mathesis. Tomul XLV. Anul 1931. Ianuarie-Fevruarie. No. 1 — 2. Gembloux. (Belgia). Plane reciproce relativ la un tetraedru, de CL. SERVAIS. Constanta sumei ariilor triunghiurilor şi sumei volumelor tetraedrelor care au un vârf comun mobil, de M. ALLIAUME. Asupra transformărilor biraţionale involutive de al cincilea ordin, de L. GODEAUX. Asupra enunţului neexact al unui corolar al principiului corespondenţei, de R. DEAUX. Exerciţii de geometrie analitică, de AD. M. Asupra geometriei tetraedrului, de V. THÉBAULT. Asupra curbelor echitangenţiale ale unei curbe în spaţiu, de R. GOORMAGHTIGH. Exerciţii de geometrie vectorială, de AD. M. Asupra perisferelor, de R. GODEAUX.

Anales de la Sociedad cientifica Argentina. Tomul CXI. Fascicola 1. Ianuarie 1931. Buenos Aires. J. C. VIGNAUX. Unele teoreme asupra produsului de serii sumabile cu metoda exponenţială.

Boletin matematico. Anul III. No. 11. Noemvrie 1930. Buenos Aires. Parametru natural? Parametre secţionate sau cantoriale, de B. I. BAIDAFF. O teoremă a lui TUMMERS generalizată, de B. I. BAIDAFF.

Journal de mathématiques élémentaires, publié par H. VUIBERT. Anul 55. No. 11. Martie 1931. Paris.

Idem. No. 12. Martie 1931. Privitor la conice, CH. BIOCHE.

Revista matematică din Timişoara. Anul XI. No. 1. Martie 1931. Timişoara. Sisteme de ecuaţii şi identităţi algebrice, de VIRGIL CLAUDEAN.

Revista ştiinţifică „V. ADAMACHI". Anul XVI. No. 4. Decemvrie 1930. Iaşi. IOAN POPP, primul profesor de geometrie analitică la Universitatea din Iaşi, de P. CAZANACLI.

N. ABRAMESCU. *Nouvelle méthode pour l'étude des régions de convergence des séries de polynomes orthogonaux.* (Extras din *Bulletin des sciences mathématiques.* Noemvrie 1930). Paris.

N. ABRAMESCU. *Les séries de polynomes à deux variables complexes.* (Extras din *Annali di matematica pura ed applicata.* Seria IV. Tomul VIII). Bologna 1931.

P. SERGESCU. *E. Picard.* Cu prilejul sărbătoririi jubileului său la 5 Mai 1928. (Extras din *Revista ştiinţifică* „V. ADAMACHI". Anul XIV. No. 3 — 4). Iaşi 1928.

P. SERGESCU. *Le premier Congrès des Mathématiciens roumains.* (Extras din *l'Enseignement mathématique.* Anul XXIX. No. 1 — 2 — 3). Geneva 1930.

P. SERGESCU. *Sur les zéros des polynomes.* (Extras din *Darea de seamă a primului Congres al matematicianilor din ţările slave,* ţinut la Varşovia în 1929). Varşovia 1930.

P. SERGESCU. *L'Evolution des principes de la mécanique de* NEWTON *à* LAPLACE. (Extras din *Annales de la Société Polonaise de Mathématiques,* 1929). Varşovia 1930.

P. SERGESCU. *Evoluţia concepţiei despre Univers.* (Extras din revista *Propilee literare.* Anul V. Fascicola 1, 1930). Bucureşti.

P. SERGESCU. *O excursie în Algeria şi Maroc cu prilejul centenarului Algeriei.* (Extras din *Natura.* Anul XIX. No. 8, 9 şi 10). Bucureşti 1931.

RADU BADESCO. *Singularités des solutions d'une classe d'équations integrales.* (Extras din *Rendinconti della Reale Accademia nazionale dei Lincei*). Roma. August 1930.

RADU BADESCO. *Sur une équation fonctionelle.* (Extras din *Comtes rendus des séances de l'Académie des sciences* de Paris) Septemvrie 1930. Paris.

CERERI

203. *Răspuns la cererea No. 199.* Revista „*Auxiliarul matematic*" a fost scos de elevii Liceului „*Mircea cel Bătrân*" din Constanţa. Apariţia a durat 1 an şi 2 săptămâni apărând bilunar. Au fost în total 26 numere.

N. M.

204. Un corespondent ne întreabă dacă soluţiunile şi manuscrisele se pot trimite în plicuri cu colţurile tăiate. Trimeterea este posibilă, însă deseori Poşta le supune la supratăxe pe care Redacţia nu le achită. E mai convenabilă trimeterea sub bandă dar şi această soluţie are inconvenientul divulgării.

I. I.

DIVERSE

Societatea română de ştiinţe, Secţiunea matematică, a ţinut şedinţă în seara zilei de 2 Martie când a vorbit D-l M. GHERMĂNESCU despre un complex patratic de drepte şi D-l N. CIORĂNESCU despre generalizarea unei teoreme a lui SCHWARTZ.

In şedinţa dela 16 Martie a vorbit D-l LUCA TEODORIU despre domenii de neexistenţă pentru zerorile derivatei unui polinom de variabilă complexă, şi D-l I. CHIŢULESCU despre un sistem în patru dimensiuni.

Şedinţa anuală a Societăţii române de ştiinţe a avut loc în ziua de 25 Martie în Amfiteatrul BACALOGLU dela Facultatea de ştiinţe din Bucureşti, în prezenţa Majestăţii Sale Regelui CAROL II. D-l Preşedinte al Societăţii, I. SIMIONESCU, a pus în evidenţă şi frumoasa mişcare matematică dela noi din ţară, la care a contribuit în bună măsură şi *Gazeta Matematică*.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1162. *Să se discute sistemul cu coeficienţi reali:*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \ldots + \alpha_n x_n = k$$

$$\alpha_1^2 x_1^2 + \alpha_2^2 x_2^2 + \alpha_3^2 x_3^2 + \ldots + \alpha_n^2 x_n^2 = \gamma^2$$

şi să se rezolve în cazul când admite un singur sistem de valori reale.

V. VÂLCOVICI.

Facem, pentru uşurinţa notaţiei, transformarea:

$$\alpha_i x_i = y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Sistemul dat se reduce la:

$$\sum_1^n y_i = k, \qquad \sum_1^n y_i^2 = \gamma^2.$$

Voi considera mai întâiu câteva cazuri particulare.

1) $n = 1$. Sistemul devine:

$$y_1 = k, \qquad y_1^2 = \gamma^2,$$

care nu este compatibil decât dacă $\gamma^2 = k^2$.

2) $n = 2$. Sistemul devine:

$$y_1 + y_2 = k, \qquad y_1^2 + y_2^2 = \gamma^2, \qquad \therefore \; y_1 y_2 = \tfrac{1}{2}(k^2 - \gamma^2)$$

$$y_1 \, , \, y_2 = \tfrac{1}{2}(k \pm \sqrt{2\gamma^2 - k^2}).$$

Deci y_1 , y_2 sunt reali dacă $2\gamma^2 \geqslant k^2$ şi imaginari dacă

$$2\gamma^2 < k^2.$$

3) $n = 3$. Sistemul devine:

$$y_1 + y_2 = k - y_3, \qquad y_1^2 + y_2^2 = \gamma^2 - y_3^2,$$

de unde:

$$y_1 \, , y_2 = \tfrac{1}{2}[(k - y_3) \pm \sqrt{2(\gamma^2 - y_3^2) - (k - y_3)^2}].$$

Pentru ca y_1 şi y_2 să fie reali trebuie ca:

$$2(\gamma^2 - y_3^2) - (k - y_3)^2 \geqslant 0,$$

sau

$$(1) \qquad 3y_3^2 - 2ky_3 + k^2 - 2\gamma^2 \leqslant 0.$$

Ori această inegalitate nu poate fi satisfăcută decât dacă realizantul ecuaţiunei corespunzătoare, este pozitiv; în cazul contrar partea întâia este totdeauna mai mare ca zero.

Adică trebue ca:

$$k^2 - 3(k^2 - 2\gamma^2) \geqslant 0$$

$$\therefore \; 3\gamma^2 \geqslant k^2,$$

pentru ca toate rădăcinile sistemului să fie reale.

Pe de altă parte din (1) deducem

$$\frac{k - \sqrt{6\gamma^2 - 2k^2}}{3} \leqslant k_3 \leqslant \frac{k + \sqrt{6\gamma^2 - 2k^2}}{3}.$$

Se vede de aci că pentru ca sistemul să admită un singur grup de valori reale, trebue ca:

$$6\gamma^2 - 2k^2 = 0,$$

$$\therefore \; 3\gamma^2 - k^2 = 0.$$

In acest caz rădăcinile reale sunt:

$$y_1 = y_2 = y_3 = k/3$$

4) $n = 4$. Sistemul devine:

$$y_1 + y_2 + y_3 = y_4, \qquad y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = \gamma^2 - y_4^2.$$

Din cele de mai sus, rezultă că pentru ca y_1 , y_2 , y_3 să fie reali trebue ca:

$$3(\gamma^2 - y_4^2) - (k - y_4)^2 \geqslant 0,$$

$$\therefore \quad 4y_4^2 - 2ky_4 + k^2 - 3\gamma^2 \leqslant 0. \tag{2}$$

Această inegalitate poate avea loc numai dacă:

$$k^2 - 4(k^2 - 3\gamma^2) \geqslant 0,$$

$$4\gamma^2 - k^2 \geqslant 0,$$

când sistemul are toate cele patru rădăcini reale.

Pentru ca să avem un singur sistem de rădăcini reale trebue ca ecuația obținută din (4) să aibă rădăcini egale și de același semn, adică realizantul să fie nul, deci:

$$4\gamma^2 - k^2 = 0.$$

In acest caz rădăcinile reale ale sistemului sunt:

$$y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = k/4.$$

5) Din cele spuse mai sus se întrevede următoarea regulă:

Pentru $n \geqslant 3$ *sistemul admite o infinitate de grupe de valori reale dacă* $n\gamma^2 - k^2 > 0$ *și nu admite de cât o singură grupă de valori reale când:* $n\gamma^2 - k^2 = 0$; *în acest caz rădăcinile sistemului fiind*

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_n = k/n.$$

In toate celelalte cazuri cel puțin două din rădăcini sunt imaginare.

Pentru demonstrarea acestei reguli vom procedà prin metoda inducției directe, adică vom arătà că dacă ea este adevărată pentru n este adevărată și pentru $(n + 1)$, și, cum am arătat că este adevărată pentru $n = 3$ și $n = 4$, ea va fi adevărată pentru orice $n \geqslant 3$.

Presupunem că sistemul:

$$\sum_1^n y_i = k, \qquad \sum_1^n y_i^2 = \gamma^2,$$

admite rădăcini reale dacă $n\gamma^2 \geqslant k^2$ și admite numai

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_n = k/n$$

dacă $n\gamma^2 - k^2 = 0$. Să analizăm sistemul:

$$\sum_1^{n+1} y_i = k, \qquad \sum_1^{n+1} y_i^2 = \gamma^2.$$

Acest sistem se mai poate scrì:

$$\sum_1^{n} y_i = k - y_{n+1} \qquad \sum_1^{n} y_i^2 = \gamma^2 - y_{n+1}^2$$

care, după cele spuse mai sus, admite pentru $y_1, \ldots y_n$ o infinitate de valori reale dacă:

$$n(\gamma^2 - y_{n+1}^2) - (k - y_{n+1})^2 \geqslant 0,$$

$$(3) \quad \therefore \quad (n+1)y_{n+1}^2 - 2ky_{n+1} + k^2 - n\gamma^2 \leqslant 0,$$

care nu poate aveà loc decât dacă:

$$k^2 - (n+1)[k^2 - n\gamma^2] \geqslant 0$$

sau dacă

$$(n+1)\gamma^2 - k^2 \geqslant 0.$$

Pe de altă parte nu suntem conduşi la o grupă unică de valori reale pentru $y_1, y_2 \ldots y_{n+1}$ decât dacă ecuaţia dedusă din (3) are rădăcini egale şi de acelaşi semn, adică dacă:

$$(n+1)\gamma^2 - k^2 = 0.$$

In acest caz găsim:

$$y_{n+1} = k/(n+1)$$

şi deci:

$$\sum_1^{n} y_i = k - \frac{k}{n+1} = \frac{nk}{n+1},$$

şi

$$\sum_1^{n} y_i^2 = \frac{k^2}{(n+1)} - \frac{k^2}{(n+1)^2} = \frac{nk^2}{(n+1)^2},$$

care admite numai următoarea grupă unică de valori reale:

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_n = k/(n+1).$$

Problema este astfel rezolvată.

6) Soluţiunea de mai sus constitue o demonstrare, fără ajutorul

derivatelor, a cunoscutei teoreme: *Minimul expresiei* $\sum_1^n y_i^2$ *când variabilele sunt legate prin relaţia* $\sum_1^n y_i = k$, *are loc când variabilele sunt egale.*

Invers s'ar fi putut soluţionà problema plecând dela această teoremă cunoscută. Am preferat totuşi să dau demonstraţia de mai sus, deşi mai lungă, deoarece nu a fost nevoe pentru desvoltarea ei decât de câteva cunoştinţe elementare asupra rezolvării ecuaţiilor şi inegalităţilor de gradul al 2-lea.

7) Dacă ne propunem să studiem sistemul

$$\Sigma\, \alpha_i\, x_i = k, \qquad \Sigma\, \beta_i^2 x_i^2 = \gamma^2$$

care constitue o primă generalizare a problemei 1162 întrebuinţând punct cu punct, aceiaşi demonstraţie ca cea dată mai sus, după ce în prealabil facem transformarea, găsim:

$$\alpha_i\, x_i = y_i \qquad \frac{\beta_i^2}{\alpha_i^2} = \lambda_i\ , \quad [\therefore\ \Sigma\, y_i = k \quad \Sigma\, \lambda_i\, y_i^2 = \gamma^2].$$

Pentru $n = 1$ *sistemul nu e compatibil decât dacă:*

$$k^2 = \frac{\gamma^2}{\lambda_1} = \frac{\alpha^2\gamma^2}{\beta^2},$$

pentru $n \geqslant 2$ *sistemul admite o infinitate de grupe de valori reale dacă*

$$\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n \left[\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \ldots + \frac{1}{\lambda_n} \right) \gamma^2 - k^2 \right] > 0,$$

nu admite decât grupa de valori reale;

$$x_i = \frac{k}{\lambda_i \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \ldots + \frac{1}{\lambda_n} \right)}$$

dacă $\gamma^2 \sum_1^n \frac{1}{\lambda_i} = k^2$; *în toate celelalte cazuri are cel puţin două rădăcini imaginare.*

Dacă facem $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 1$ obţinem tocmai problema 1162.

Ioan B. Florescu.

PROBLEMA 1364. *Să se găsească numai cu compasul diametrul unei bare cilindrice cu capetele rupte neregulat.*

I. IONESCU.

Dintr'un punct A depe suprafața laterală a barei și cu o deschidere de compas cât mai mare descrim curba de întretăere între sfere cu centrul în A și raza egală cu deschiderea de compas luată și cilindru. Compasul, dacă bara este suficient de lungă, va părăsi cilindrul în două puncte M și N simetric așezate pe cilindru față de generatoarea care conține pe A și la egală depărtare de A. Deci M și N se găsesc într'o secțiune dreaptă a cilindrului. Fie B punctul ce se găsește pe aceiași secțiune dreaptă la întretăerea acesteia cu generatoarea lui A. Observăm că B este piciorul înălțimii în triunghiul AMC, unde C este punctul de întretăere, pe cilindru, a două arce descrise cu aceiași rază din M și N.

Construim pe o foae de hârtie triunghiul AMC, ceeace putem face numai cu compasul cunoscându-i lungimile tutulor laturilor. Deasemenea putem determină, prin construcții foarte cunoscute, înălțimea MB care nu este după cele spuse mai sus decât lungimea coardelor egale MB și NB. Raza cercului circumscris triunghiului din secțiunea dreaptă MBN, căruia îi cunoaștem lungimea laturilor este tocmai raza cilindrului.

Observațiuni.

1. Această construcție nu reușește în practică decât dacă lungimea barei este sensibil mai mare decât raza ei. Chiar în acest caz determinarea punctelor M și N, în practică, nu se poate face decât cu o mică preciziune.

2. Din multele încercări practice făcute, această metodă mi-a dat rezultate mai bune decât cea expusă la pag. 103, iar amândouă aceste metode dau rezultate mult mai aproape de realitate decât cea dela pag. 221, ale cărei operațiuni nu se pot face, practic vorbind, decât cu foarte multe erori.

IOAN B. FLORESCU.

Notă. Observațiunile făcute de D-l I. B. FLORESCU sunt juste. Fixarea exactă a punctului unde vârful compasului părăsește cilindrul nu se poate avea precis. Geometricește punctele M și N ar trebui determinate prin intersecția a două curbe pe suprafața cilindrului. Soluții în acest sens sunt posibile și ele sunt așteptate.

O soluțiune a mai fost dată de D-l I. AURIAN, care trasează prin puncte curbe pe suprafața cilindrului, care ocolesc cilindrul ca o elice și care se îndepărtează continuu de punctul inițial. Prin variația condițiunilor de trasare ale curbelor se caută ca să se obție curba închisă, care ar fi un cerc de

secţiune normală. Luând trei puncte pe acest cerc se poate construi un triunghiu plan al cărui arc circumscris are raza cilindrului.

Problema rămâne încă propusă.

O bună soluţiune mi-a fost indicată de D-l I. CHIŢULESCU, dar D-sa fiind membru al Societăţii *Gazeta Matematică* nu are dreptul de a publică probleme rezolvate.

I. I.

PROBLEMA 2223. *Există cuburi gemene ?*

I. IONESCU.

Prin analogie cu patratele gemene (*Gazeta Matematică* vol. XX, pag. 203) vom spune că două cuburi a^3 şi b^3 de câte n cifre sunt gemene când satisfac relaţia:

$$(1) \qquad a^3 - b^3 = c \cdot 10^{n-1},$$

unde c este o cifră.

Din (1), însemnând cu k factorul comun al lui a şi b, — se deduce:

$$(2) \qquad k^3 (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = c \cdot 10^{n-1}.$$

Insă forma aritmetică $(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$, unde α este prim cu β nu se divide decât prin 3 sau prin numere prime de forma $(6n + 1)$, (Vezi: KRAITCHIK: *Recherches sur la théorie des nombres,* Tome II, sau P. BACHMAN: *Zahlentheorie*); deci în condiţiile problemei, 10^{n-1} neconţinând asemenea factori, $(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$ nu ar puteà aveà decât valorile 1, 3, 9, 7. Vom analizà în parte toate aceste cazuri:

1. $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 1$, $\therefore \alpha = 1$, $\beta = 0$,

iar din (2) deducem:

$$k^3 = c \cdot 10^{n-1} \qquad (c \leqslant 9)$$

de unde soluţiile formale:

$$a^3 = 10^{3p} \quad , \quad b^3 = 0,$$

$$a^3 = 8 \cdot 10^{3p} \quad , \quad b^3 = 0.$$

2. $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 3$, $\therefore \alpha = 1$, $\beta = 1$

care conduce la cuburile identice a^3 ; $b^3 = a^3$.

3. $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 9$

nu este verificată de numere α şi β pozitive deci nu avem soluţie:

4. $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 7$, $\therefore \alpha = 2$, $\beta = 1$, $c = 7$

iar din (2) deducem:

$$k^3 = 10^{n-1}$$

de unde, singurele soluţii efective ale problemei:

$$a = 2 \cdot 10^p \qquad b = 10^p .$$

IOAN B. FLORESCU.

Observaţiuni.

1. Din cele de mai sus, se vede imediat că nu există cuburi pseudo-gemene.

Deasemenea nu există decât formal cuburi decapitate.

2. Urmând o metodă analoagă şi observând că forma aritmetică $(a^n - b^n)\ (a - b)$ unde n este prim nu are alţi divizori decât (uneori) pe n sau numere de forma $(2n + 1)$; iar forma aritmetică $(a^2 + b^2)$ nu are decât divizori primi de forma $(4n + 1)$, se ajunge la concluzia că pentru $p > 3$ nu există puteri a p — a gemene, pseudo-gemene sau decapitate. (In această observaţie a e presupus prim cu b).

3. Căutând două cuburi complimentare (vezi *Gazeta Matematică* pr. 3811) şi observând că dacă ar există ar trebui să avem:

$$a^3 + b^3 = 10^n ,$$

sau

$$k^3 (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = 10^n$$

nu găsim decât soluţiile formale:

$$a = 10^p \quad , \quad b = 0.$$

I. B. F.

PROBLEMA 3696. *Fie* a, b, A *diagonalele şi aria unui patrulater înscris într'un patrat. Să se arate că aria patratului este dată de formula*

$$S = \frac{a^2b^2 - 4A^2}{a^2 + b^2 - 4A} .$$

† TR. A. DORDEA

Soluţie geometrică, dată de D-l GH. TH. GHEORGHIU (Student, Bucureşti).

Fie A'B'C'D' patrulaterul înscris în patratul ABCD de latura l şi E proecţia lui A' pe CD. Notăm cu

$\alpha = A'B$; $\beta = CB'$; $\gamma = C'D$; $\delta = D'A$; $A'C = a$; $B'D' = b$.

Suprafaţa S a patratului este dată de

$$S = l^2 = A + \tfrac{1}{2}\alpha(l-\beta) + \tfrac{1}{2}\beta(l-\gamma) + \tfrac{1}{2}\gamma(l-\delta) + \tfrac{1}{2}\delta(l-\alpha)$$

$$\therefore \quad 2l^2 = 2A + l(\alpha+\beta+\gamma+\delta) - (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\alpha)$$

$$\therefore \quad 2l^2 = 2A + l[(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)] - (\alpha+\gamma)(\beta+\delta) \quad (1)$$

Din triunghiul dreptunghic A'EC' se scoate

$$a^2 = l^2 + [\gamma - (l-\alpha)]^2 \quad \therefore \quad \alpha+\gamma = l + \sqrt{a^2 - l^2}.$$

La fel se găseşte

$$\beta+\delta = l + \sqrt{b^2 - l^2}.$$

Inlocuind în (1) avem

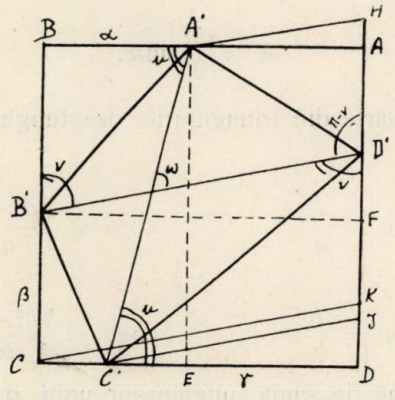
$$l^2 - 2A = \sqrt{(a^2-l^2)(b^2-l^2)}$$

sau ridicând la patrat şi făcând reducerile se ajunge la

$$l^2 = S = \frac{a^2b^2 - 4A^2}{a^2+b^2-4A}$$

tocmai relaţia de demonstrat.

II. *Soluţie geometrică*, dată de D-l E. I. Dumitrescu.



Demonstraţia se face urmărind figura. Pe lângă notaţiile dela soluţia I, fie încă H, K, I intersecţiile lui AD cu paralelele la B'D', duse respectiv prin A', C şi C'.

Pe figură se vede că:

$A = \text{Supr. } B'A'D' + \text{Supr. } B'C'D' = \text{Supr. } B'HD' + \text{Supr. } B'ID' = \text{Supr. } B'HI.$

$$\therefore \qquad A = \tfrac{1}{2} l \cdot HI. \qquad (2)$$

Triunghiurile asemeni C'DI, CDK, A'AH dau egalităţile următoare, uşor de urmărit

$$\frac{CD}{DK} = \frac{l}{\sqrt{CK^2 - l^2}} = \frac{C'D}{DI} = \frac{A'A}{AH} = \frac{C'D - A'A}{DI - AH}$$

$$\therefore \quad \frac{l}{\sqrt{CK^2 - l}} = \frac{C'E}{(HD - HI) - (HD - DA)} = \frac{\sqrt{a^2 - l^2}}{AD - HI} = \frac{\sqrt{a^2 - l^2}}{l - HI}.$$

Sau înlocuind pe CK prin egalul său b, avem

$$\frac{l}{\sqrt{b - l^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - l^2}}{l - HI}$$

$$\therefore \qquad HI = \frac{l^2 - \sqrt{(a^2 - l^2)(b^2 - l^2)}}{l}$$

care introdus în (2) dă tocmai relaţia de demonstrat.

III. *Soluţie trigonometrică* dată de D-nii: C. I. Drăgan, J. N. Vâlceanu şi N. N. Velicescu.

Fie F proecţia lui B' pe AD. Notăm cu w unghiul diagonalelor, cu u unghiul A'C'E şi cu v unghiul B'D'F. Se ştie, şi e uşor de demonstrat, că

$$A = \frac{ab}{2} \sin w.$$

Pe de altă parte din triunghiurile dreptunghice C'EA' şi B'FD' se scoate

$$(3) \qquad \sin u = \frac{l}{a} \qquad \therefore \qquad \cos u = \frac{\sqrt{a^2 - l^2}}{a}$$

şi

$$(4) \qquad \sin v = \frac{l}{b} \qquad \therefore \qquad \cos v = \frac{\sqrt{b^2 - l^2}}{b}.$$

Ţinând seamă de suma unghiurilor unui patrulater, se vede de pe figură că avem

$$180^0 - w + u + v + 90^0 = 360^0 \quad \therefore \quad u + v = w + 90$$

$$\sin w = -\cos(u + v) = \sin u \sin v - \cos u \cos v$$

sau ţinând seamă de (3) şi (4)

$$\sin w = \frac{l^2 - \sqrt{(a^2 - l^2)(b^2 - l^2)}}{ab}$$

care introdus în valoarea lui A dă tocmai relaţia de demonstrat, dacă se înlocueşte l^2 prin S.

Notă. 1°. Au dat soluţii trigonometrice, diferite de ceà de mai sus, D-nii: A. C. Gheorghiu, E. I. Mihalcea, S. M. Ţilenschi, C. Coşniţă şi I. Murăroiu.

2°. D-nii V. I. Crivăţ şi C. I. Râmniceanu fac cunoscut că problema este cunoscută şi dată cu alt enunţ în F. G. M. (*Exercices de trigonometrie*) pag. 594 problema 784. D-lor nu au încercat însă să dea o soluţie diferită de aceea de acolo.

PROBLEMA 3783. *Să se demonstreze că numerele întregi* N^n *şi* N^{n+4} *se termină cu aceiaşi cifră.*

Col. Gh. Buicliu.

Soluţie dată de D-l N. O. Zaharia (Şc. Politecnică, Bucureşti).

Voi rezolvà următoarea problemă, din soluţia căreia se deduce soluţia problemei 3783.

Cum trebuie să fie **p**, *pentru ca numerele întregi* N^n *şi* N^{n+p} *să se termine cu aceiaşi cifră?*

Se observă că dacă N şi N^{p+1} se termină cu aceiaşi cifră atunci şi numerele N^n şi N^{p+n} se termină cu aceiaşi cifră, căci ultima cifră a lui N^n şi a lui N^{p+n} este egală cu cifra cu care se termină puterea a n — a a ultimei cifre comună la numerele N şi N^{p+1}.

Problema revine deci la a determină numărul p aşa încât

$$E = N^{p+1} - N = N(N^p - 1) = N(N-1)(N^{p-1} + N^{p-2} + \ldots + N + 1)$$

să se dividă prin 10. Numerele N şi N — 1 fiind consecutive, produsul lor se divide totdeauna prin 2. Rămâne să arăt că E se divide şi prin 5.

Dacă N este de forma $5m$ sau $5m + 1$ unul din factorii N sau N — 1 se divide prin 5 ori care ar fi p.

Fie $N = 5m - 1$. Ultima paranteză a lui E se poate scrie

$$= 5M + (-1)^{p-1} + (-1)^{p-2} + \ldots + (-1) + 1 = 5M + \frac{(-1)^p - 1}{-2}.$$

Este evident că S se divide prin 5 numai dacă p este pereche

Fie $N = 5m - 2$. Avem, ca mai sus

$$S = 5M + (-2)^{p-1} + (-2)^{p-2} + \ldots + (-2) + 1 = 5M + \frac{(-2)^p - 1}{-3}.$$

Dacă p este nepereche atunci

$$(-2)^p - 1 = -(2^p + 1)$$

care nu se divide prin 5 decât dacă 2^p se termină cu 4, ceeace are loc pentru $p = 4$; 6 ; adică p pereche contra ipotezei.

Dacă p este pereche, atunci

$$(-2)^p - 1 = 2^p - 1$$

care se divide prin 5 când $2p$ se termină cu 6 ceeace are loc pentru $p = 4q$.

Deci când $N = 5m - 2$ atunci $p = 4q$.

Dacă $N = 5m + 2$ avem

$$S = 5M + 2^{p-1} + 2^{p-2} + \ldots + 2 + 1 = 5M + \frac{2^p - 1}{2 - 1}$$

unde $2^p - 1$ se divide prin tot în cazul când p este multiplu de 4.

Rezumând: forma căutată a lui p este

$$p = 4q.$$

Făcând $q = 1$ se găseşte problema 3783.

Observaţiuni: 1°. Fără a trece prin generalizarea dată de D-l N. O. ZAHARIA, D-l V. I. CRIVĂŢ a rezolvat direct pe aceiaşi cale observând că expresiunea

$$E = N^n (N^4 - 1) = (N - 1)(N + 1)(N^2 + 1) N^n$$

este totdeauna divizibilă prin 10.

2°. Au rezolvat problema verificând că puterea a 5-a a oricărei cifre se termină cu aceà cifră D-nii: N. ALDEA (Bucureşti); P. I. GHIŞOIU (Şc. Politecnică, Bucureşti); I. C. BOIAN (Lc. militar, Tg.-Mureş); I. C. SAVIN (Şc. militară de Artilerie, Timişoara); N. N. VELICESCU (Muscel); J. N. VÂLCEANU (Şc. Politecnică, Timişoara); I. P. BUCUR, H. P. IONESCU (Lic. Oltenita); C. D. IONESCU-ŢIU şi N. A. PĂUN.

3°. D-l GH. TH. GHEORGHIU-GLADIŞ (Student, Bucureşti) a pus

$$N = 10A + a$$

$$N^n = (10A + a)^n = 10B + \alpha$$

$$N^{n+4} = (10B + \alpha)(10A + a)^4 = 10C + \gamma$$

şi a demonstrat că dacă a are succesiv diferitele valori dela 0 la 9, atunci α este egal cu γ.

PROBLEMA 3805. *Se dă conica* (C), *o dreaptă* Δ *şi un punct fix* M *pe această dreaptă. Fie* N_1 *şi* N_2 *intersecţiile polarei unui punct variabil* N *cu conica dată. Dreptele* MN_1 *şi* MN_2 *taie conica* (C) *respectiv în punctele* M_1 *şi* M_2. *Se cere:*

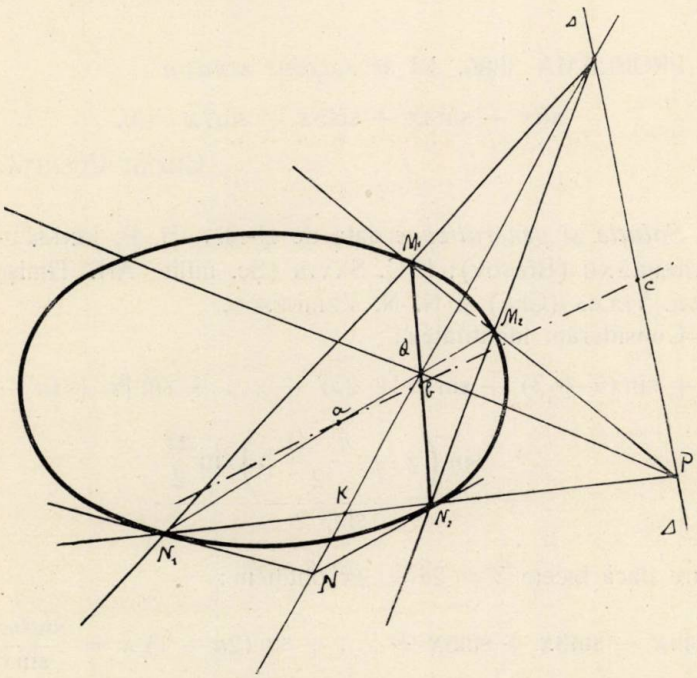
1º. Locul geometric al punctului N, *astfel ca fascicolul* M (Δ, N_2, N, N_1) *să fie armonic.*

2º. Să se arate că în acest caz, dreapta care uneşte mijloacele dreptelor M_1N_2 *şi* M_2N_1, *trece printr'un punct fix.*

I. C. NICOLAU-DOBRIDOR.

Soluţie dată de D-nii: A. C. GHEORGHIU (Student) şi C. I. RÂMNICEANU.

Fie P intersecţia lui Δ cu polara N_1N_2 a lui N faţă de (C) şi K intersecţia lui MN cu N_1N_2. Fascicolul M (Δ, N_2, N, N_1) fiind



armonic rezultă că polara lui P faţă de (C) va trece prin K şi cum P se află pe N_1N_2, polara lui P faţă de (C) va trece prin polul N a lui N_1N_2 faţă de (C). Deci MN este polara lui P faţă de (C).

Se ştie că acea polară va trece şi prin punctul Q, de intersecţie al dreptelor M_1N_2 şi M_2N_1 şi că deci M_1M_2 trece prin P. Construcţia arată că PQ este polara lui M faţă de (C). Cum M este fix, rezultă că PQ şi deci P, care se află şi pe Δ este fix. Deci 1^0 este rezolvat anume: *locul lui* N *este polara faţă de* (C) *a punctului* P *de intersecţie a dreptei* Δ *cu polara lui* M *faţă de* (C).

2^0. Se vede pe figură că M_1N_2, N_1M_2, MP sunt diagonale în patrulaterul complet $N_1M_1MM_2N_2P$ în care vârfurile M şi P sunt fixe. Mijloacele acestor diagonale, *a, b, c* fiind colineare, dreapta care le uneşte trece prin punctul fix *c,* mijlocul lui MP.

Notă. Această problemă rezolvă şi problema 3776 propusă la pagina 479 Vol. XXXIV, căci enunţul acelei probleme nu diferă de problema 3805 decât prin aceea că în loc de conică (C) se consideră un cerc (C).

Gh. B.

PROBLEMA 3886. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 0.$$

Cezar Coşniţă.

Soluţie şi generalizare dată de D-nii: H. P. Ionescu-Biss; I. Parepeanu (Braşov); I. C. Savin (Şc. milit. Art. Timişoara); Mihail Velea (Cluj) şi N. N. Velicescu.

Considerăm identitatea:

$$\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) + \ldots + \sin[\alpha+(n-1)\beta] = \frac{\sin\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta\right)\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\beta/2}$$

în care dacă facem $\beta = 2\alpha = 2x$ obţinem:

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \ldots + \sin(2n-1)x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}$$

şi vom avea de rezolvat ecuaţia generală:

$$\frac{\sin^2 nx}{\sin x} = 0 \qquad (1)$$

ce ne dă soluţiile generale:

$$x_1 = \frac{2k\pi}{n} \quad ; \quad x_2 = \frac{(2k+1)\,\pi}{4} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

In cazul problemei de faţă, avem $n = 4$, aşa că arcele ce verifică ecuaţia particulară dată sunt de forma:

$$x_1 = \frac{k\pi}{2} \quad ; \quad x_2 = (2k+1)\,\frac{\pi}{4}\,.$$

Au rezolvat problema, fără a o generalizà D-ra ELEONORA ANTONIU (Studentă) şi D-nii: SUB.-LT. AURELIAN STAN, I. C. BOIAN, CONSTANTINESCU-BUZĂU, VLADIMIR CRIVĂŢ, VICTOR IONESCU (Lic. «M. Eminescu»), E. G. MILLEA (Şc. milit. Art.) şi VASU VASILE.

D-nii: H. P. IONESCU-BISS şi N. N. VELICESCU au dat şi soluţiile ecuaţiei generale:

$$\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \ldots + \cos(2n-1)\,x = 0.$$

Se observă, la rezolvarea ecuaţiilor trigonometrice, că nu toţi corespondenţii aleg numai soluţiile distincte; unii dau şi soluţii, cari dacă s'ar introduce în ecuaţia propusă s'ar vedeà uşor că nu o verifică.

Nici un corespondent n'a discutat ecuaţia (1) în ansamblul ei; trebuià făcută totuş remarca evidentă că această ecuaţie nu poate devenì zero prin numitor, care e limitat la $-1 < \sin x < 1$.

CĂP. GH. N.

PROBLEMA 3887. *Să se demonstreze că între elementele unui triunghiu oarecare avem relaţia:*

$$\frac{R}{r^2}(h_a + h_b + h_c) > 12.$$

PETRE GHIŞOIU.

Soluţie:

Dacă se ţine seama de enunţul problemelor No. 358 (R. M – T,

anul IV, pag. 62) şi No. 173 (R. M — T, anul X, pag. 79) unde se cere să se demonstreze respectiv inegalităţile:

$$h_a + h_b + h_c > 6r$$

$$R > 2r$$

şi dacă înmulţim aceste inegalităţi, rezolvăm imediat problema propusă.

Cum în R. M. T. anul VIII, No. 5, pag. 68 se demonstrează că:

$$h_a + h_b + h_c > 9r$$

avem încă inegalitatea:

$$\frac{R}{r^2}(h_a + h_b + h_c) > 18$$

care răspunde a forţiori şi la problema de faţă.

Au rezolvat în modul acesta problema D-nii: Sub.-Lt. Aurelian Stan; Sub.-Lt. Iacob Şt. Eugeniu; N. N. Aldea, Student; Haralamb P. Ionescu-Biss Liceul Oltenita; I. Parepeanu, Liceul Braşov.

Soluţie dată de D-l Grecu M. Cristache, cl. VII Liceul «C. Alimăniţeanu».

Dacă în inegalitatea:

$$(x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x) \geqslant 9x_1x_2x_3$$

propusă în R. M. T. (problema 2271) punem:

$$x_1 = h_a\ ;\ x_2 = h_b\ ;\ x_3 = h_c\ ,$$

şi ţinem seamă că:

$$\Sigma\, h_a h_b = \frac{2pS}{R} \quad \text{şi} \quad h_a h_b h_c = \frac{2S^2}{R} = \frac{2p^2r^2}{R}$$

avem:

$$\frac{2pS}{R}(h_a + h_b + h_c) \geqslant 9 \cdot \frac{2p^2r^2}{R}$$

sau:

$$h_a + h_b + h_c \geqslant 9r. \qquad (1)$$

Dacă în aceeaşi inegalitate punem:

$$x_1 = r_a\ ;\ x_2 = r_b\ ;\ x_3 = r_c$$

„ASOCIAŢIUNEA" SIBIIU

unde r_a, r_b, r_c sunt razele cercurilor exînscrise unui triunghiu oarecare şi ţinem seamă de faptul că:

$$\Sigma\, r_a = 4R + r;\ \Sigma\, r_a r_b = p^2 \text{ şi } r_a r_b r_c = p^2 r$$

obţinem:

$$p^2 (4R + r) \geqslant 9p^2 r$$

care, după simplificările şi trecerile de termeni necesare ne dă:

$$R \geqslant 2r. \qquad (2)$$

Din înmulţirea inegalităţilor (1) şi (2) obţinem:

$$\frac{R}{r^2}\, \Sigma\, h_a > 18.$$

(c. c. t. d.)

Domnul HARALAMB P. IONESCU-BISS, demonstrează inegalitatea mai generală:

$$3 \cdot 2^{m+n} \cdot r^{m+n} < R^m \left(h_a^n + h_b^n + h_c^n\right),$$

care pentru $m = 1$ şi $n = 1$ se reduce la inegalitatea propusă sub No. 3887.

Soluţii diferite s'au mai primit dela D-nii: VLADIMIR I. CRIVĂŢ, Bucureşti; NICOLAIE N. VELICESCU şi EMILIAN MEREUŢĂ (Studenţi).

CĂP. GH. N.

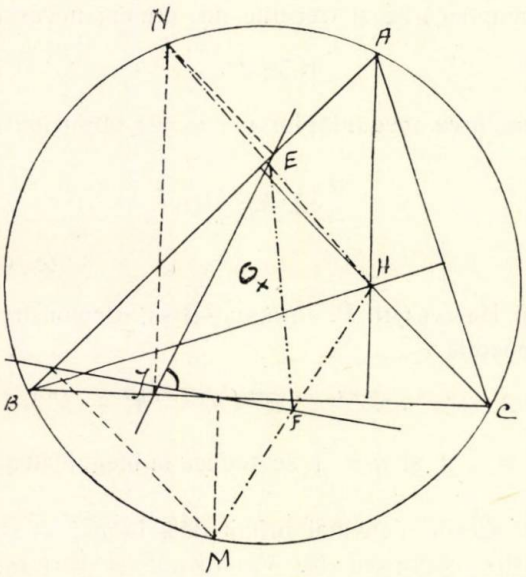
PROBLEMA 3954. *Fiind date două puncte* M *şi* N *pe cercul* O, *să se găsească locul punctelor de intersecţie ale dreptelor lui* SIMSON *a acestor puncte în raport cu triunghiurile înscrise în cercul* O *şi care au ca ortocentru un acelaş punct* H.

TH. GH. COCEA.

Soluţie dată de D-l SUB.-LT. I. GH. ZAMFIRESCU (Piteşti).

Se ştie că dreptele lui SIMSON trec prin mijloacele segmentelor ce unesc punctele cu ortocentrul.

Se mai ştie că unghiul dreptelor lui SIMSON, a două puncte, în raport cu orice triunghi din cercul considerat este constant. Rezultă, că dacă I e intersecţia dreptelor lui SIMSON a punctelor $\mathfrak{M}$ şi $\mathfrak{N}$ în raport de ABC, atunci dreapta EF ce uneşte mijloacele (fixe) ale segmentelor NH şi $\mathfrak{M}$H, pe unde trec cele două drepte, este constant văzută sub un acelaş unghiu, ceeace ne arată că locul lui I este un cerc.



Punctele E şi F, ca mijloace ale segmentelor ce unesc puncte de pe cerc cu ortocentrul, se găsesc deci pe cercul lui EULER. Cercul EFI este egal cu cercul lui EULER căci EF = MN : 2 şi subîntinde acelaş arc MN, de unde rezultă în definitiv că locul lui I este cercul EFI, simetric al cercului lui EULER în raport cu coarda comună EF.

Caz particular. Când punctele M, N sunt diametral opuse, dreptele lui SIMSON sunt perpendiculare, iar EF devine evident un diametru. Atunci locul lui I este chiar cercul lui EULER.

Au rezolvat problema, arătând că locul lui I este un cerc, fără a-l preciză: D-ra ELEONORA ANTONIU şi D-nii: SUB.-LT. AURELIAN I. STAN (Cluj); N. N. ALDEA (Student matematici); TRAIAN PUTA şi VASU VASILE (Studenţi).

CĂP. GH. N.

PROBLEMA 3963. *Se cere numărul:*

$$N = 7^{n+2} \cdot 11^{n+1} \cdot 13^n,$$

cu condiţia ca N^3 *să aibă* 280 *divizori.*

V. I. CRIVĂŢ.

Soluţie dată de D-ra MARIA AL. LICHIARDOPOL-BURA şi de D-nii: N. N. ALDEA (Student-Bucureşti), AUREL C. CONSTANTINESCU, VICTOR I. IONESCU (cl. VII Lic. Eminescu-Bucureşti), E. MEREUŢĂ (Student), N. N. MIHĂILEANU (Lic. Constanţa), I. PAREPEANU (Lic. Dr. Meşotă-Braşov), C. D. RUSU (cl. VII Lic. Constanţa), V. VASU, M. VELEA (Student-Cluj), Sub-Lt. I. GH. ZAMFIRESCU (Piteşti).

Ţinând seamă de expresiunea $\nu(N)$ a numărului divizorilor unui număr întreg, precum şi de condiţiunile din enunţ, avem:

$$\nu(N^3) = (3n + 7)(3n + 4)(3n + 1) = 280.$$

$$(1) \qquad \therefore \quad 3n^3 + 12n^2 + 13n - 28 = 0.$$

Ecuaţia precedentă în n admite pe $n = 1$ ca singură soluţie reală şi întreagă, celelalte două fiind imaginare obţinem deci soluţia unică:

$$N = 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13 = 539539.$$

D-l P. I. GHIŞOIU ajunge la acelaş rezultat punând ecuaţia (1) sub forma:

$$(3n + 1)^3 + 9(3n + 1)^2 + 18(3n + 1) - 280 = 0,$$

pe care rezolvând-o prin încercări în raport cu $(3n + 1)$, ajunge la soluţia:

$$3n + 1 = 4 \qquad \therefore \qquad n = 1.$$

Soluţie dată de D-l AUREL E. BĂDESCU (Şc. Pregătitoare Artilerie).

$$\nu(N^3) = (3n + 1)(3n + 4)(3n + 7) = 280 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Punem $3n + 1 = m$ şi avem:

$$\nu(N^3) = m(m + 3)(m + 6) = 2^3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Presupunem $m = 2K$,

$$(2) \quad \therefore \quad \nu(N^3) = 2^2 \cdot K(2K + 3)(K + 3) = 2^3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Se observă că pentru K = 1 membrul al 2-lea conține factorul 2^4, ceeace este imposibil; rămâne deci de considerat K = 2, care verifică ecuația (2).

Deci:

$$m = 2K = 4 \qquad \therefore \qquad 3n + 1 = 4, \text{ sau } n = 1.$$

$$N = 539539.$$

D-nii: Chițu P. Marin și H. P. Ionescu-Biss au dat soluțiuni analoage.

Observațiuni:

1) D-l Gh. A. Ciocoiu-Bârlad, la prima soluție, pune ecuația problemei sub forma greșită:

$$27n^3 + 108n^2 + 117n - 256 = 0,$$

dar scoate totuși rezultatul bun!

2) D-l Sub-Lt. I. Gh. Zamfirescu enunță următoarea chestiune generală:

Se cere numărul $N = a^{\alpha+n} b^{\beta+n} c^{\gamma+n}$, *cu condiția ca* N^{δ} *să aibă* λ *divizori, unde a, b, c sunt factori primi* (α, β, γ, δ, λ *fiind cunoscuți*).

C. H. N.

---

*EXERCIȚII

35. Să se arate că fracțiunile:

$$\frac{ab}{cd}, \quad \frac{abab}{cdcd}, \quad \frac{ababab}{cdcdcd}, \text{ etc.}$$

sunt egale.

Iuliu Deac.

R. Se observă că termenul general, cuprinzând n grupe identice la numărător și numitor, se poate scrie:

$$\frac{ababab\ldots}{cdcdcd\ldots} = \frac{ab(10^{2n-2} + 10^{2n-4} + \ldots + 10^2 + 1)}{cd(10^{2n-2} + 10^{2n-4} + \ldots + 10^2 + 1)} = \frac{ab}{cd}.$$

Chestiunea se tratează analog în cazul când grupele identice în loc să fie de două sunt de mai multe cifre.

Bibl. a „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

36. Să se calculeze limita expresiunei

$$\frac{\sin xp}{\sin^p x}$$

când x tinde către zero.

Ion C. Vasiliu.

R.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin xp}{\sin^p x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin xp}{xp} \cdot \left(\frac{x}{\sin x}\right)^p = 1.$$

37. Prin ortocentrul triunghiului ABC ducem transversala *abc*. Respectiv prin A, B, C ducem paralelele Aa', Bb', Cc' la *abc*. Să se demonstreze relaţia :

$$\frac{Ha}{Aa'} + \frac{Hb}{Bb'} + \frac{Hc}{Cc'} = 3 - \frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{2 \sin A \sin B \sin C}.$$

Mircea Gh. Stavrat.

R. Avem : $\quad \frac{Aa'}{Ha} = \frac{AG}{HG} = \frac{AG}{AG - AH}$; etc. ...

Deci

$$\sum \frac{Ha}{Aa'} = \sum \frac{AG - AH}{AG} = 3 - \sum \frac{AH}{AG}.$$

Dar

$$\sum \frac{AH}{AG} = \sum \frac{\cos A}{\sin B \sin C};$$

Deci

$$\sum \frac{Ha}{Aa'} = 3 - \sum \frac{\sin 2A}{2 \sin A \sin B \sin C}.$$

38. Intre elementele unui triunghiu există relaţia

$$\frac{ar_a^n + br_b^n + cr_c^n}{\operatorname{tg}^n \tfrac{1}{2}A \sin A + \operatorname{tg}^n \tfrac{1}{2}B \sin B + \operatorname{tg}^n \tfrac{1}{2}C \sin C} = 2Rp^n.$$

(Generalizarea exerc. 48 G. M. XXXV No. 8 pag. 318).

N. N. Velicescu.

R. Având $p^n \operatorname{tg}^n \frac{1}{2}A = r_a^n$, etc., ... şi

$$\frac{ar_a^n}{r_a^n \sin A} = \frac{br_b^n}{r_b^n \sin B} = \frac{cr_c^n}{r_c^n \sin C} = 2R, \text{ se stabileşte imediat.}$$

39. Fiind dată relaţia

$$(S - rr_a)(S + rr_a) - 2S\, rr_a = 0.$$

Să se deducă valoarea unghiului A.

N. N. MIHĂILEANU.

R. Relaţiunea se poate scrie :

$$\frac{S^2 - r^2 r_a^2}{Srr_a} = \frac{S}{rr_a} - \frac{rr_a}{S} = \frac{p}{r_a} - \frac{r_a}{p} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}A} - \operatorname{tg}\frac{1}{2}A = 2.$$

De unde rezultă $A = \frac{\pi}{4}$.

40. In orice triunghiu avem relaţia

$$a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2 \sum \cos A \sin B \sin C.$$

M. VELEA.

R. Adunând relaţiile

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \text{ etc.} \ldots .$$

avem

$$\sum a^2 = 2 \sum ab \cos C.$$

Se obţine relaţia din enunţ ţinând seamă că $a = 2R \sin A$, etc. . . .

PROBLEME PROPUSE

4001. Se cere să se calculeze câţi elevi de licee civile şi câţi de licee militare au fost valabil înscrişi pentru concursul din

anul acesta, al *Gazetei Matematice*, ce urmă să se ţină în vacanţa Paştilor, ştiind că am puteă face un front simetric punând câte doi elevi civili printre elevi militari sau câte doi elevi militari printre grupe de doi elevi civili.

I. IONESCU.

4002. Să se afle ultimele trei cifre ale cubului numărului 43046721, fără a face ridicări la cub.

N. N. MIHĂILEANU.

4003. Numerele:

$$9\ldots980\ldots01 \quad \text{şi} \quad 9\ldots970\ldots029\ldots 99$$

sunt patratele şi cuburile aceloraşi numere, dacă se înlocuiesc punctele cu de n ori cifrele alăturate.

V. MĂTIEŞ.

*4004. Să se găsească relaţiunea dintre laturiile unui triunghiu ABC, astfel încât, dacă V_a, V_b, V_c sunt volumele născute de triunghiu prin rotirea succesivă în jurul laturilor a, b, c, să avem relaţia

$$2V_a = V_b + V_c .$$

M. GHERMĂNESCU.

*4005. Se dau ecuaţiile:

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ a^p x^2 + b^p x + c^p = 0 \end{cases}$$

şi să se compare rădăcinile lor, p fiind un număr pozitiv.

CĂP. GH. NICULESCU.

4006. Să se găsească suma coeficienților binomului lui NEWTON luați din patru în patru.

CĂPITAN I. LINTEȘ.

*4007. Să se facă un studiu general al problemei ogarului care aleargă după o vulpe, dându-se lungimea pașilor lor și numărul pașilor pe care îi fac fiecare în același timp.

V. CRIVĂȚ.

*4008. Să se demonstreze identitatea:

$$5\ \mathrm{tg}5\theta - \mathrm{tg}\theta = \frac{4\ (2\ \sin 4\theta - \sin 2\theta)}{1 - 2\ \cos 2\theta + 2\ \cos 4\theta}\ .$$

N. C.

4009. Fie ABC un triunghiu cu vârfurile A și B fixe, iar C variabil în plan. Să se arate că dacă ortocentrul triunghiului descrie cisoida care are ca punct dublu pe A, iar ca asimptotă perpendiculara în B pe AB, atunci C descrie tot o cisoidă.

GH. TH. GHEORGHIU.

4010. Să se integreze ecuația diferențială:

$$A_1(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + A_2(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + \ldots + A_{n+1}(x,y) = 0,$$

unde

$$A_k(x,y) = a_k\, x + b_k\, y + c_k\ .$$

Caz particular: $n = 2$ și $b_1 = 0$.

ALEX. NICULESCU.

BOLETIN MATEMATICO

FUNDAT ÎN ANUL 1928. — ABONAMENT ANUAL: 400 LEI

BOLETIN MATEMATICO ELEMENTAL

FUNDAT ÎN ANUL 1930. — ABONAMENT ANUAL: 125 LEI

Director: Dr. B. I. BAIDAFF

SUNT CELE MAI IMPORTANTE PUBLICAȚIUNI PERIODICE MATEMATICE DIN AMERICA DE SUD

SE PRIMESC ABONAMENTE PENTRU ANUL AL IV (IAN. — DEC. 1931)

ABONAMENTELE ȘI CORESPONDENȚA SE VOR TRIMITE LA ADRESA:

BOLETIN MATEMATICO, Belgrano 975, Buenos-Aires, Rep. Argentina.

Dela lanuarie 1928 până în Octomvrie 1930 s'au publicat articole și note dela Domnii:

F. Anguita, B. I. Baidaff, F. Cernuschi, Cl. C. Dassen, A. Garrigos și **J. Tschlek,** Buenos-Aires (Rep. Argentina), **J. Hartmann,** La Plata (Rep. Argentina), **C. Dieulefait** și **E. Natale,** Rosario (Rep. Argentina), **O. Márquez,** Salta (Rep. Argentina), **M. A. Basoco** și **E. T. Bell,** Pasadena (California), **M. Krawtchouk** și **N. Kryloff,** Chiev (U. R. S. S.), **J. Gonzalez Perera, S. José** (Uruguay), **B. Jekhowsky,** Bordo (Francia), **W. Lewitzky,** Lemberg (Polonia), **O. J. Ramler,** Washington (Statele Unite) **J. Shohat,** Ann Arbor (Statele Unite), **D. M. J. Sommerville,** Wellington (N. Zelandia), **V. Thébault,** Le Mans (Francia), **O. Szász,** Frankfurt a. M. (Alemania), **G. Vivanti,** Milano (Italia), **J. R. Wilton,** Adelaida (Sud Australia).

Articolele, notele şi problemele însemnate cu * se referă la matematicile elementare (cursul de liceu).

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Abramescu Mariana (3954, 65, 93, 95, 98); *Aldea N. N.* (3905, 10, 11, 61, 65, 82); *Andreescu N. C.* (3961, 71); *Antoniu Eleonora* (3978, 86); *Arşavski Alexe* (3574); *Avram N. C.* (3957, 82, 88, 93); *Bădescu E. A.* (3957, 65); *Beral H.* (3988); *Burchi C. L.* (3995); *Buţan M. A.* (3939, 68, 81, 84, 88, 93, 95, 96, P); *Călinescu G.* (3961); *Cârstoiu I.* (3993); *Cinschi Const.* (3965, 66, 78); *Ciocoiu A. Gh.* (3982); *Cojocaru V. I.* (3957, 93, 95, 96, E); *Craiu I. N.* (3770, 900, 60, R); *Cristeanu A.* (3967, 93); *Crivăţ Vl.* (3965, 81, 92, 93, 95); *Cuciureanu Şt.* (3957); *Dobrescu Şt.* (3939, 55, 57); *Dobrogeanu N.* (3967); *Donciu N.* (3664, P); *Dumitraşcu N. R.* (3938, 57, 61, 95, 96, P); *Dumitriu-Dăda I.* (P); *Emanoil S. I.* (3957, 74); *Epuran A. I.* (3961, 65, 66, 78, 81); *Florescu B. I.* (1735, N); *Ganea A.* (3988); *Gheorghiu C. A.* (3660, 919, 37, 70); *Ghişoiu P.* (3817, 966); *Ghiuţă G.* (3981); *Gluşco N.* (3882, 954, 68, 88, 93, 95); *Gospodin T.* (3937, 39, 55, 70, 82); *Haim B.* (3981); *Iacob Eug. Subloc.* (3937, 78); *Ionescu I. V.* (3965, 66); *Ionescu M.* (3961); *Ionescu-Biss P. H.* (3815, 965); *Licherdopol-Bura A. Maria* (3965, 66, 78); *Lupescu Gh. Const.* (3957, 65, 66, 68, 88, 93, 95); *Maevschi I.* (3882, 954, 68, 88, 93, 95); *Mareş Em.* (3961, 71); *Mereuţă Em.* (3955, 60, 82, 88, 93, 95, 98, E, N); *Mihăileanu N. N.* (2461, 3886, 93, 934, 42, 43, 48, 55, 57, 61, 65, 66, 78, 81, 82, 92, 93, 95, 96, 98, E, P); *Moody I.* (3998); *Naforniţă I. C.* (3981, 84, R); *Nedelcu V. Mar.* (3961); *Negrea A. M. Leonte* (3966, 78, 93, 95); *Nicolae I. Gh.* (3970); *Niculescu A.* (P); *Olteanu E. Şt.* (3948, 55, 60, 88); *Parepeanu I.* (3886, 87, 957, 82, 84, 92, 93, 95, 98, E); *Patraulea N. Nic.* (3945, 67); *Popa Gh. I.* 3957, 61, 95); *Popa Z. N.* (3965, 98); *Popescu N. C.* (3815, 925, 28); *Popescu-Stăneşti I. M.* (3965, 66, 84, 93, 95, 96, 98); *Popovici V.* (3730); *Puta T.* (3975); *Radu Fl. Subloc.* (3988); *Roşca G.* (3960, 67, 81); *Roşu A. Al.* (2083, 145, 263, 81, 301, 3090, C, E, N, P, R); *Russu D. C.* (3939, 61, 64, 65, 82); *Sandu G. I.* (3965, 78); *Şerban C. I.* (3892, 948, 66, 67); *Şerban Ilie* (3993, 98); *Şerbu C.* (3967); *Stan I. A. Subloc.* (1933, 666, 2187, 222, 301, 3892, 919, 54, 66, 70, 71, 77, 92, 93, 95, 98); *Sullă P.* (3998); *Thébault V.* (A, N); *Ţiucra P. M.* (3900, 55, 60, 68, 70, 79, 86); *Trufinescu Costin* (3965); *Truia M. P.* (3998); *Varlam P.* (3963, 66); *Vasu V.* (3892, 966, 75, 92, 93, 95, 98); *Velea M.* (3892, 911, 40, 66, 70, 82, 92, 93, 95); *Velicescu N. N.* (3619, 710, 826, 40, 87, 955, 68, 79, 81, 92, 93, 95, 98, E, N); *Vissarion V.* (3990, 93, 96); *Zamfirescu G. I. Subloc.* (2038, 116, 17, 263, 3664, 954, 64, 65, 66, 71, 93, 95, 98, P); *Zane D. N.* (3995, 98); *Zarda I.* (3937, 39, 47, 54, 55, 65, 66, 67, 68, 70, 78).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipì sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac deasemenea pe foaie aparte. *Foile vor aveà format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani complețî broșați cu prețul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX și XXI care se vând cu prețul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV și XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecțiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția IV revăzută și adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu și G. Țițeica,** *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu și Șt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediția II revăzută și adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicațiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediția III-a revăzută și îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Țițeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* (Ediția II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din bibiioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Regiei Publice Comerciale «Monitorul Oficial și Imprimeriile Statului», B-dul Elisabeta 29, București I.

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călușei 23, București 4.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

ANUL XXXVI.

NUMĂRUL 9. — MAI 1931.

SUMARUL

1. Quelques propriétés du triangle . . . . . *V. Thébault.*
2. Premiul „Inginer H. Capriel".
3. Note matematice: 31 — 38.
4. Bibliografie.
5. Cereri: 205.
6. Diverse.
7. Probleme rezolvate: 1933, 3619, 3679, 3779, 3797, 3821, 3877, 3955, 3981.
8. Exerciţii: 41 — 47.
9. Probleme propuse: 4011 — 4020.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

REGIA M. O., IMPRIMERIA NAŢIONALĂ

1931

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXXVI se compune din D-nii: Colonel **Gh. I. Liteanu** dela Marele Stat Major al Armatei; **G. A. Nichifor**, Doctor în Matematici, Conferenţiar la Universitatea din Bucureşti; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Regiei Publice Comerciale «Monitorul Oficial şi Imprimeriile Statului», Cassier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui Inginer-Şef GH. ILIESCU, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela „*Gazeta Matematică*" („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 310, 33, 55, 64, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 82, 553, 87, 650, 79, 711, 29, 53, 64, 807, 76, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 233, 338, 53, 82, 405, 22, 30, 39, 56, 66, 77, 502, 03, 45, 56, 77, 80, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 65, 84, 92, 95, 709, 13, 17, 35, 58, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 56, 3005, 45, 69, 81, 127, 50, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 07, 08, 09, 10, 16, 18, 20, 50, 61, 79, 405, 12, 24, 25, 45, 72, 89, 91, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 20, 22, 25, 27, 32, 46, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 94, 99, 700, 03, 20, 33, 36, 80, 84, 93, 99, 804, 08, 10, 29, 35, 36, 44, 45, 48, 53, 64, 70, 80, 96, 98, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 33, 44, 49, 50, 72, 73, 76, 83, 87, 94, 99, 4000, 01, 02, 04, 05, 06, 07, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procurà dela „*Gazeta Matematică*" („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

QUELQUES PROPRIÉTÉS DU TRIANGLE

Notations. — Soient un triangle ABC, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$; A_1, B_1, C_1, les milieux des côtés; A', B', C', les pieds des hauteurs; H l'orthocentre, (O) le cercle circonscrit, h_a, h_b, h_c, les hauteurs, r le rayon du cercle inscrit.

1. Les perpendiculaires aux côtés BC, CA, AB, élevées respectivement en B et C, C et A, A et B, rencontrent les côtés CA et AB, AB et CB, CB et AC, en γ_1 et β_1, γ_2 et α_2, α_1 et β_2. On a $B\beta_1 = a\,\mathrm{tg}C$, $C\gamma_1 = a\,\mathrm{tg}B$, $C\gamma_2 = b\,\mathrm{tg}A$, $A\alpha_2 = b\mathrm{tg}C$, $A\alpha_1 = c\,\mathrm{tg}B$, $B\beta_2 = c\,\mathrm{tg}A$; d'où l'on déduit facilement, par exemple,

$$B\beta_1 : C\gamma_1 = \mathrm{tg}C : \mathrm{tg}B = BA' : A'C.$$

Les triangles rectangles $B\beta_1A'$ et $A'\gamma_1C$ sont semblables, et *Les directions* $A'\beta_1$ *et* $A'\gamma_1$ *sont également inclinées sur les directions* AA' *et* BC; *de même,* $B'\alpha_2$ *et* $B'\gamma_2$, $C'\alpha_1$ *et* $C'\beta_2$, *sont également inclinées sur* BB' *et* AC, CC' *et* BA.

2. Les droites $B\beta_1$, $C\gamma_1$, $C\beta_1$, $B\gamma_1$, par exemple, déterminent un quadrilatère complet dont un sommet est rejeté à l'infini sur $B\beta_1$, $C\gamma_1$.

Ses diagonales sont portées par les directions AA', BC, $\beta_1\gamma_1$. Si α, α', sont les intersections de $\beta_1\gamma_1$ avec BC, de AA' avec $\beta_1\gamma_1$, la division $(\beta_1, \gamma_1, \alpha', \alpha)$ est harmonique ainsi que le faisceau A' $(\beta_1, \gamma_1, \alpha', \alpha)$. Comme les deux rayons conjugués $A'\alpha'$ et $A'\alpha$ sont rectangulaires, ils sont bissectrices de l'angle des deux autres $A'\beta_1$, $A'\gamma_1$, ce qui démontre à nouveau l'égale inclinaison de $A'\beta_1$ et $A'\gamma_1$ sur AA' et BC.

Les intersections β, γ, de $\alpha_2\gamma_2$, sur AC et de $\alpha_1\beta_2$ sur BA sont les conjugués harmoniques de B', C', par rapport à C et A, A et B.

La droite $\alpha\beta\gamma$ *est la polaire trilinéaire de l'orthocentre* H *dans le triangle* ABC.

Désignons θ_a, θ_b, θ_c, les angles de même sens que déterminent les directions $\beta_1\gamma_1$ avec CB, $\gamma_2\alpha_2$ avec BA, $\alpha_1\beta_2$ avec AC.

On a, par exemple,

$$\mathrm{tg}\theta_a = (B\beta_1 - C\gamma_1) : a = \mathrm{tg}C - \mathrm{tg}B;$$

d'où cette relation

$$\mathrm{tg}\theta_a + \mathrm{tg}\theta_b + \mathrm{tg}\theta_c = 0.$$

Dans le trapèze $B\beta_1\gamma_1C$, le segment $AA' = h_a$, est demi-moyenne harmonique entre les bases $B\beta_1$, $C\gamma_1$.

Cette autre relation en découle

$$\frac{1}{B\beta_1}+\frac{1}{C\gamma_1}+\frac{1}{A\alpha_2}+\frac{1}{C\gamma_2}+\frac{1}{A\alpha_1}+\frac{1}{B\beta_2}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$$

3. Les droites $B\beta_1$, $C\gamma_1$, ... se coupent deux par deux sur la circonférence (O) circonscrite au triangle aux points A″, B″, C″, diamétralement opposés à A, B, C. On en déduit que *les droites* $\beta_1\alpha_2$, $\gamma_1\alpha_1$, $\beta_2\gamma_2$, *sont normales aux droites qui joignent le centre* O *aux sommets* A, B, C, *du triangle.*

4. Puisque les points B, A′, C, α, forment une division harmonique, la parallèle menée de A à $\beta_1\alpha$ passe au milieu P de $A'\alpha$.

On a alors

$$PC \cdot PB = \overline{PA'}^2$$

Traçons la perpendiculaire A′E de A′ sur AP,

$$PE \cdot PA = \overline{PA'}^2$$

De ces deux égalités il résulte que E est situé sur le cercle (O). Alors EA′ passe par l'extrémité A″ du diamètre AA″.

Un raisonnement analogue s'applique aux droites B′ B″ et C′C″.

Les droites $\beta_1\gamma_1$, $\alpha_1\beta_2$, $\gamma_2\alpha_2$, *sont donc respectivement perpendiculaires à celles* A′A″, B′B″, C′C″, *qui joignent les pieds des hauteurs du triangle aux points diamétralement opposés aux sommets sur le cercle circonscrit.*

5. Voici deux autres façons d'obtenir cette propriété des droites $\beta_1\gamma_1$, $\alpha_1\beta_2$, $\gamma_2\alpha_2$.

a) Soient M_a, M_b, M_c, les milieux des hauteurs AA′, BB′, CC′; ω_a, ω_b, ω_c, les projections orthogonales de O sur AA′, BB′, CC′.

Comme les droites OC_1, OB_1, $O\omega_a$, sont respectivement perpendiculaires à BA, AC, AA′, en menant par A les parallèles AX et AY à C_1B_1 et $\beta_1\gamma_1$, on voit que les deux faisceaux $(O \cdot C_1B_1\omega_a M_a)$ et $(A \cdot C_1B_1XM_a)$ ont même rapport anharmonique puisque leurs rayons se coupent sur C_1B_1.

Mais il est aisé de prouver que

$$(A \cdot C_1B_1 X M_a) = (A \cdot BCA'Y),$$

ou

$$(A\,.\,BCXA') = (A\,.\,CBYA'),$$

c'est-à-dire que les trois couples

$$(AB,\ AC),\ (AX,\ AY),\ (AA',\ AA'),$$

forment une involution. En effet ces trois couples joignent le point A aux points d'intersections de la droite de l'infini avec les trois couples de cotès opposés du quadrangle $BC\beta_1\gamma_1$. D'apres le théorème de DESARGUES, ils sont en involution.

Puisque les deux faisceaux $(A\,.\,BCA'Y)$ et $(O\,.\,C_1B_1A'M_a)$ ont même rapport anharmonique, *les droites* OM_a *et* $\beta_1\gamma_1$ *sont rectangulaires.*

b) Les cinq points A, C_1, ω_a, O, B_1, sont sur le cercle de diamètre AO et C_1B_1, $\omega_a O$ sont deux cordes parallèles de ce cercle. Donc les projections orthogonales O' et M_a de O et ω_a sur C_1B_1 sont symétriques par rapport au milieu de C_1B_1 et

$$C_1O' = M_aB_1.$$

En projetant orthogonalement C_1 en C'_1 sur $O\omega_a$,

$$C'_1O = C_1O' = M_aB_1;$$

par conséquent C'_1M_a est parallèle à OB_1 ou perpendiculaire à AC.

Les cinq droites $C_1C'_1$, C_1O, C'_1M_a, C_1M_a, C'_1O, étant respectivement perpendiculaires à CB, BA, AC, $B\beta_1$, $C\gamma_1$, si l'on fait tourner la figure $C_1C'_1M_aO$ de 90°, les cinq premières droites deviennent parallèles aux cinq dernières et la figure $C_1C'_1M_aO$ devenant *homothétique* à la figure $CB\beta_1\gamma_1$, la droite OM_a dans sa nouvelle position est parallèle à $\beta_1\gamma_1$. Elle etait donc primitivement *perpendiculaire à* $\beta_1\gamma_1$.

Les droites OM_a, OM_b, OM_c, étant parallèles à celles qui joignent l'orthocentre H aux isotomiques des pieds A', B', C' des hauteurs, dans le triangle ABC, on a cette proposition:

Le droites qui joignent l'orthocentre aux isotomiques des pieds des hauteurs d'un triangle sont normales aux droites $\beta_1\gamma_1$, $\alpha_1\beta_2$, $\gamma_2\alpha_2$.

V. THÉBAULT
Le Mans (France).

PREMIUL „INGINER H. CAPRIEL"

SUBIECTUL PROPUS

Se consideră sâmburii $K(x, y)$, $N(x, y)$ şi

$$M(x, y) = K(x, y) + N(x, y)$$

pentru o ecuaţie integrală FREDHOLM, în intervalul ab. Se însemnează $\Gamma_K(x, y; \lambda)$ nucleul rezolvant relativ la sâmburele $K(x, y)$; funcţia determinantă relativă la nucleul $K(x, y)$ se notează cu $D_K(\lambda)$.

In cazul când sâmburii $K(x, y)$ şi $N(x, y)$ sunt ortogonali, se ştie [1]) că avem:

$$\Gamma_M(x, y; \lambda) = \Gamma_K(x, y; \lambda) + \Gamma_N(x, y; \lambda)$$

$$D_M(\lambda) = D_K(\lambda) \cdot D_N(\lambda).$$

Să se găsească formulele de generalizare ale acestor relaţii pentru cazul când $K(x, y)$ şi $N(x, y)$ sunt oarecari. Se cere o desvoltare a soluţiei schiţate [2]) şi, eventual, să se dea o nouă demonstraţie.

Se vor căutà aplicaţiuni ale acestor formule generale.

COMISIUNEA PENTRU PREMIU:
TH. ANGHELUŢĂ, P. SERGESCU,
AL. BUNESCU.

---

1) E GOURSAT. *Comptes Rendus*. T. 145; 1907; pag. 667 şi 752; *Cours d'Analyse* T. III, p. 394; ed. 3-a.
B. HEYWOOD. *Comptes Rendus*. T. 145; 1907; pag. 908.

2) TH. ANGHELUŢĂ. *Comptes Rendus*. T. 188; 1929; pag. 536.

NOTE MATEMATICE

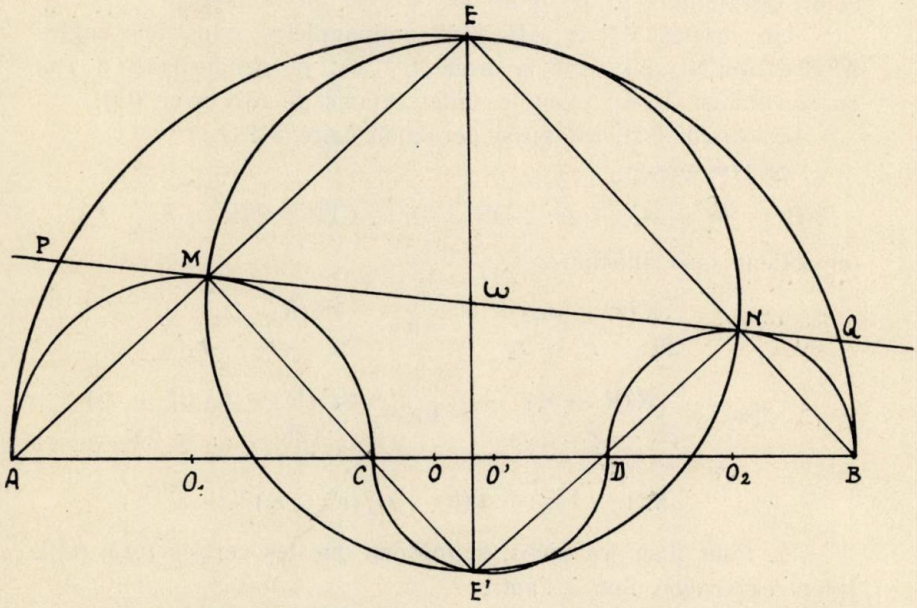
*31. *Généralisation des Propositions IV et XIV du Livre des Lemmes.*

Nous avons donné, ici même, une généralisation de la Proposition IV du *Livre des Lemmes* d'ARCHIMÈDE [1]).

En voici une autre qui contient également la Proposition XIV.

1. Les propositions du géomètre grec s'énoncent ainsi :

a) Soient un demi-cercle (O) *de diamètre* AB = 2R, C *un point de ce diamètre situé entre* A *et* B. *Décrivons deux demi-cercles* (O_1), (O_2), *de diamètres* AC = $2r_1$, CB = $2r_2$, *du même côté que* (O), *et élevons la perpendiculaire* CE *sur* AB. *On détermine ainsi une figure qu'*ARCHIMÈDE *appelle* ARBELON [2]), *dont*



l'aire comprise entre l'axe du plus grand demi-cercle et les deux circonférences des petits demi-cercles équivaut au cercle dont le diamètre est la perpendiculaire CE.

b) Soit le demi-cercle (O) *de diamètre* AB = 2R ; *retran-*

1) *Gazeta* XXXVI — 121.

2) Aranchet de cordonnier.

chons de son diamètre AB *deux droites égales* AC, BD ; *décrivons les demi-cercles* (O_1), (O_2), (O_3), *sur les droites* $AC = 2r_1$, $DB = 2r_2$, $CD = 2r_3$, *ce dernier au-dessous de* AB. *Soit* FG *la perpendiculaire à* AB *en* O *qui rencontre* (O_3) *et* (O) *en* F *et* G. *Le cercle de diamètre* FG *équivaut à l'aire comprise entre le demi-cercle* (O), *les demi-cercles* (O_1), (O_2), *augmentée du demi-cercle* (O_3). *Cette figure est celle qu'*ARCHIMÈDE *appelle* SALINON [1]).

2. Considérons la figure constituée par deux cercles quelconques (O_1), (O_2). Soient AO_1C, DO_2B, leurs diamètres et (O), (O'), les cercles de diamètres AB et CD, Δ l'axe radical des cercles (O_1), (O_2), qui rencontre AB en K, (O) en E, (O') en E'.

Les droites AE et CE', BE et DE', coupent les cercles (O_1), (O_2) aux contacts M et N de ces cercles avec leur tangente commune extérieure [2]) et la figure MENE' est un rectangle.

Les droites MN et AB sont antiparallèles dans les angles AEB et ME'N ; par suite la droite EO est perpendiculaire à PQ en son milieu, P, Q, étant les intersections de MN avec (O).

La droite E'O' est aussi perpendiculaire à PQ.

Si l'on pose

$$AB = 2R\ ,\ AC = 2r_1\ ,\ DB = 2r_2\ ,\ CD = 2(R - r_1 - r_2),$$

on obtient sans difficulté

$$OK = \frac{R(r_1 - r_2)}{2R - r_1 - r_2}\ ,\quad AK = \frac{2R(R - r_2)}{2R - r_1 - r_2};$$

$$BK = \frac{2R(R - r_1)}{2R - r_1 - r_2}\ ,\quad \overline{EK}^2 = \frac{4R^2(R - r_1)(R - r_2)}{(2R - r_1 - r_2)^2};$$

$$\overline{MN}^2 = \overline{EE'}^2 = 4(R - r_1)(R - r_2)\ ^{3)}.$$

3. Pour fixer les idées, supposons que les cercles (O_1), (O_2), soient *extérieurs* l'un à l'autre.

L'aire intérieure au cercle (O) et limitée par les demi-circon-

---

1) Feuille d'ache.

2) Car on a ces égalités d'angles

$$AMO_1 = MAO_1 = EE'M = E'MN.$$

3) En effet,

$$\overline{MN}^2 = \overline{O_1O_2}^2 - (r_1 - r_2)^2.$$

férences (O), (O_1), (O_2), au-dessus du diamétre AB, et par (O'), au-dessous de AB, s'exprime

$$S = \frac{\pi}{2}[R^2 - r_1^2 - r_2^2 + (R - r_1 - r_2)^2]$$

$$= \pi[R^2 + r_1 r_2 - R(r_1 + r_2)] = \pi(R - r_1)(R - r_2)$$

$$= \pi\frac{\overline{MN}^2}{4} = \pi\frac{\overline{EE'}^2}{4}.$$

Les figures de l'ARBELON et du SALINON se trouvent généralisées ainsi :

Sur le diamètre AB *d'un cercle* (O), *on marque deux points* C *et* D, *(le sens étant* A, C, D, B*), et l'on décrit les cercles* (O_1), (O'), (O_2), *de diamètres* AC, CD, DB. *Soit* Δ *l'axe radical des cercles* (O_1), (O_2), *qui coupe les cercles* (O), (O'), *en* E, E'. *L'aire comprise entre le demi-cercle* (O), *les demi-cercles* (O_1), (O_2), *augmentée de celle du demi-cercle* (O') *situé au-dessous de* AB, *est équivalente à celle du cercle décrit sur* EE' *comme diamètre.*

Lorsque les cercles (O_1), (O_2), se touchent, ou bien sont égaux, ou retrouve les propositions IV et XIV du *Livre des Lemmes.*

Si les cercles (O_1), (O_2), se coupent, il y a lieu de faire intervenir un sens à l'aire comprise entre les demi-cercles (O), (O_1), (O_2), et la propriété subsiste.

V. THÉBAULT
Le Mans (France).

*32. *Asupra problemei 1162.*

Soluția dată de D-l I. B. FLORESCU în No. 8 din Anul XXXIV al *Gazetei Matematice* este diferită de aceea dată de mine atunci când am propus-o (Noembrie 1906). Pentrucă principiul soluției originale prezintă problema sub o nouă lumină, îmi permit a-l schița. Problema propusă aveà enunțul general următor (modificat, cred, printr'o eroare tipografică):

Să se discute sistemul cu coeficienți reali:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = k$$

$$a_2^2 x_1^2 + a_2^2 x_2^2 + \ldots + a_n^2 x_n^2 = r^2$$

şi să se rezolve în cazul când admite un singur sistem de valori reale.

Vom elimină cazul simplu $n = 1$.

Cu ajutorul substituţiei:

$$(1)\quad y_i = a_i x_i,\ \omega_i = \frac{\alpha_i}{a_i \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\alpha_k}{a_k}\right)^2}},\ p = \frac{k}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\alpha_k}{a_k}\right)^2}},\ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sistemul dat devine:

$$(2)\quad \begin{aligned} \omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 + \ldots + \omega_n y_n &= p, \\ y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 &= r^2. \end{aligned}$$

Pornind dela identitatea evidentă:

$$(\Sigma y_i^2)(\Sigma \omega_i^2) - (\Sigma \omega_i y_i)^2 = \sum_{i,k=1}^{n} (\omega_i y_k - \omega_k y_i)$$

şi observând că avem:

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + \ldots + \omega_n^2 = 1,$$

vom puteà scrie:

$$(3)\quad \Sigma (\omega_i y_k - \omega_k y_i)^2 = r^2 - p^2.$$

Deducem astfel că în cazul

$$r^2 = p^2$$

sistemul dat nu are alte soluţiuni reale decât:

$$(4)\quad y_i = \omega_i p.$$

Tot din (3) urmează că dacă avem

$$r^2 < p^2$$

ecuaţiile date nu pot admite nici un sistem real de soluţiuni.

In caz când am aveà

$$r^2 > p^2$$

se poate arătà că ecuaţiile (2) admit în general o infinitate de soluţiuni reale. In adevăr, făcând substituţia:

$$(5)\quad y_i = \omega_i p + \omega'_i q$$

cu condiţia:

$$(6)\quad \sum_{i=1}^{n} \omega_i \omega'_i = o$$

se vede că $y_1, y_2, \ldots, y_n$ satisfac prima ecuaţie din (2). Pentru a o satisface şi pe cea de-a doua, va trebui să avem:

$$q = \frac{\pm\sqrt{r^2 - p^2}}{\Sigma\omega_i'^2} \qquad (7)$$

Cum relaţia (6) în ω_i' poate fi satisfăcută pentru $n > 2$ de o infinitate de sisteme de valori ω_i', rezultă că ecuaţia (2) are o infinitate de sisteme de soluţii reale date de formula (5). Dealtfel formula (7) ne arată că la fiecare sistem de valori ω_i' corespund două sisteme de soluţii, din cauza dublului semn al radicalului din (7). Cazul $n = 2$ ne dă, evident, numai două soluţii.

Problema este susceptibilă de o interpretare geometrică în spaţiul cu n dimensiuni. Să discutăm intersecţia unui plan, cu o varietate de ordinul $n - 1$, de gradul al doilea şi de dimensiuni finite. Soluţia (4) va convenì cazului când planul este tangent suprafeţei. Cazul $r^2 < p^2$ corespunde unui plan exterior suprafeţei, iar $r^2 > p^2$ planului secant. Substituţia (5) are deasemeni o interpretare geometrică simplă.

V. V.

33. *Asupra problemei 3957.*

Au mai rezolvat această problemă D-nii: C. N. Avram, A. Em. Bădescu, I. S. Emanoil, N. N. Mihăileanu, I. Parepeanu (şi I. Gh. Popa), cum şi D-nii: Şt. Dobrescu & Şt. Ciucureanu.

O soluţie parţială au dat D-nii: R. Dumitraşcu & C. Gh. Lupescu.

Lt.-Col. G. P.

34. *Asupra a două probleme.*

1°. La problema 3759, publicată la pagina 229 Vol. XXXVI, condiţia ca p să fie prim este de prisos. De altfel în soluţia dată nici nu s'a făcut uz de această condiţie.

2°. Problema 3761 are numai

$$55 \times 24 = 1320$$

soluţiuni distincte, de oarece din o soluţie principală se deduc soluţiuni distincte numai prin permutarea cifrelor de pe o singură coloană. Permutând cifrele şi pe a 2-a coloană se obţin soluţiuni conţinute în cele dintâi.

I. B. Florescu.

*35. *Asupra problemei 3355.*

In Nota 18 din Anul XXXIII se calculează aria unui patrulater din problema 3355. Observ însă că, atât problema cât şi propietatea din Notă, au făcut obiectul problemei 52 din primul an al *Gazetei Matematice,* propusă de D-l BOGDAN IONESCU. La rezolvarea problemei 3355 s'a spus că JULES MATOT a dat aceiaşi chestiune în 1901. Origina problemei e deci din 1896, de când a apărut în *Gazeta Matematică.*

AL. A. ROŞU.

*36. *Asupra Notei No. 2 din «Gazeta Matematică»,* Anul XXX, pag. 19.

Chestiunea se găseşte în întregime în *Leçons d'Algèbre élémentaire* par CARLO BOURLET, pag. 438 şi în *Leçons d'Arithmétique par* JULES TANNERY, pag. 337.

AL. A. ROŞU.

*37. *Asupra unui exerciţiu.*

Exerciţiul 32 din Anul XXXVI este identic cu Problema 3846 a D-lui Căpitan ION LINTEŞ rezolvată în No. 11 din Anul XXXV.

E. MEREUŢĂ.

38. *Calculul unor sume.* Cu ocazia rezolvărei problemelor 3024 şi 3753, s'a calculat în *Gazeta Matematică* la pagina 340 Vol. XXXI şi la pagina 227 Vol. XXXVI, valoarea sumei

$$S_n = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}.$$

Calculul s'a făcut cu ajutorul derivatelor. Iată o metodă elementară pentru calculul aceleiaş sume. Imulţesc pe S_n cu x^2 şi apoi cu x:

$$x^2 S_n = x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \ldots + nx^{n+1}$$

$$x\,S_n = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx_n$$

de unde prin scădere

$$x(x-1)\,S_n = nx^{n+1} - (x + x^2 + x^3 + \ldots + nx^n).$$

Suma progresiei geometrice din paranteză este cunoscută, deci

$$x(x-1)S_n = nx^{n+1} - \frac{x^{n+1}-x}{x-1}$$

$$\therefore \qquad S_n = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

Pe o cale analoagă s'a calculat în *Gazeta Matematică* Vol. XV pag. 111, cu ocazia rezolvărei problemei 1388, suma

$$S = 1.2.a + 2.3.a^2x + 3.4.a^3x^2 + \ldots + n(n+1)a^n x^{n-1}.$$

Dacă în S se înlocueşte x prin 1, apoi a prin x şi se consideră primii $n-1$ termeni, se găseşte suma

$$S_2 = 1.2.x + 2.3.x^2 + 3.4.x^3 + \ldots + (n-1)nx^{n-1}$$

care s'a calculat cu ajutorul derivatelor la pagina 227 Vol. XXXVI.

Plecând dela aceste calcule elementare, voi arătà în cele ce urmează, cum se pot calculà pe cale elementară o serie mare de sume interesante.

Fie, pentru aceasta,

$$S_0 = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$$

$$S_1 = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$$

$$S_2 = 0.1 + 1.2x + 2.3.x^2 + \ldots + (n-1)nx^{n-1}$$

$$S_3 = 0.1.2 + 1.2.3x + 2.3.4.x^2 + \ldots + (n-1)n(n+1)x^{n-1}$$

$$S_4 = 0.1.2.3 + 1.2.3.4.x + 2.3.4.5x^2 + 3.4.5.6.x^3 + \ldots$$

$$+ (n-1)n(n+1)(n+2)x^{n-1}$$

. . . . . .

Odată ce se cunoaşte S_0, toate celelalte sume se pot calculà prin formula de recurenţă:

$$(x-1)S_p = n(n+1)\ldots(n+p-1)x^n - pS_{p-1}$$

uşor de găsit. Iată acum o serie de sume interesante, deduse din

cunoaşterea sumelor precedente. Calculele sunt aşa de elementare, încât se pot urmări fără nici o explicaţiune:

(1) $S_1 + S_2 = 1 + 2^2x + 3^2x^2 + 4^2x^3 + \ldots + n^2x^{n-1} = \sum_1^n i^2x^{i-1}$

(2) $S_3 - S_2 = 1.2\ x + 2.3^2x^2 + \ldots + (n-1)\ n^2x^{n-1} = \sum_1^n (i-1)\ i^2x^{i-1}$

(3) $S_1 + S_3 = 1 + 2^3x + 3^3x^2 + \ldots + n^3x^{n-1} = \sum_1^n i^3\ x^{i-1}$

(4) $S_4 - 3S_3 + S_2 = 1.2^3.x + 2.3^3.x^2 + \ldots + (n-1)n^3x^{n-1} = \sum_1^n (i-1)i^3x^{i-1}.$

Sumele (1), (2), (3), (4) sunt, după cum se vede, tocmai sumele calculate cu ajutorul derivatelor în soluţia dată problemei 3753. Iată însă şi alte sume interesante, deduse tot pe cale elementară.

(5) $S_2 + S_3 = \sum_1^n (i-1)\ i\ (i+2)\ x^{i-1}$

(6) $S_1 + 2S_2 = 1.3 + 2.4x + 3.5x^2 + \ldots = \sum_1^n i(i+2)x^{i-1}$

(7) $2S_1 + S_2 + S_3 = \sum_1^n i^2\ (i+1)\ x^{i-1}$

(8) $S_4 - 2S_3 + S_1 + S_2 = \sum_1^n i^4x^{i-1}$

(9) $S_4 - 3S_3 + S_2 = \sum_1^n (i-1)\ i^3x^{i-1}$

. . . . . .

şi aşa mai departe se pot calculà ori câte sume voim.

Este de remarcat că dacă se cunosc sumele $\Sigma\ i^p\ x^{i-1}$ şi $\Sigma\ (i-1)\ i^p\ x^{i-1}$, atunci prin simpla lor adunare se găseşte

$$\Sigma\ i^{p+1}\ x^{i-1} = \Sigma\ i^p\ x^{i-1} + \Sigma\ (i-1)\ i^p\ x^{i-1}.$$

După cum se vede cunoaşterea lui S_0 este foarte fecundă în formulare de probleme. Astfel pe lângă calculul atâtor sume interesante se pot căutà limite dacă se afectează lui x o valoare sub unitară. De exemplu limita sumei $\sum_1^n (i-1)\ i^3x^{i-1}$ când n tinde la infinit. Se pot face şi probleme de divizibilitate, cum a fost problema 1380 a D-lui A. G. Ioachimescu rezolvată în *Gazeta Matematică* Vol. XIV pag. 344.

Col. Gh. Buicliu.

BIBLIOGRAFIE

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XXXVII. No. 1. Ianuarie 1931. New York. Adunarea din Octomvrie dela New York, de A. DRESDEN. Adunarea din Noemvrie dela Los Angelos, de T. M. PUTMAN. Adunarea dela Misuri, de M. H. INGRAHAM.

Idem. No. 2. Fevruarie 1931. Geometria diferențială în extensiune, de D. J. STRUIN. Notă asupra numărului de serii DIRICHLET linear independente care satisfac unele ecuații funcționale, de J. I. HUTCHINSON. Interpolare modulară, de E. T. BELL. Notă asupra convergenței unei secuențe de polinomiale aproximative, de D. JACKON. O funcțiune în legătură cu un câmp cubic, de L. CARLITZ. Penoscularea conică a unei curbe plane, de J. W. LASLEY. Curba bitangențială, de T. L. HOLLCROFT. Ecuații funcționale pentru totiente, de E. T. BELL. Relațiuni abstracte definind grupul simplu de ordinul 5616, de K. E. BISSHOPP. Grupe funcționale lineare de un parametru în mai multe funcțiuni de două variabile, de A. D. MICHAL. Eroarea probabilă a unor funcțiuni a unor erori făcute în măsurători, de W. D. BATEN. Asupra desvoltărilor trigonometrice ale funcțiunilor eliptice, de M. A. BASOCO. O tablă condensată de forme lineare, de P. H. DAUS.

Idem. No. 3. Martie 1931. Adunarea anuală din Cleveland, de M. H. INGRAHAM. Sesiunea de vară a profesorilor de matematici, de H. P. HAMMOND. KELLOG despre potențial, de G. C. EVANS. VOGEL despre aritmetica egipțiană, de R. B. MC. CLENON. GAUSTEIN despre geometrie, de V. SNYDER.

Mathesis. Tomul XLV. No. 3. Martie 1931. Gembloux. Notă asupra unei teoreme de statică demonstrată în antichitatea greacă, de P. VER EECKE. Asupra liniilor hiperaritmetice sau hiperarmonice a k linii coplanare, de R. DEAUX. Notă asupra tetraedrului isoscel, de N. ALTSCHILLER-COURT. Asupra ortopolului unei drepte în raport cu un tetraedru, de CL. SERVAIS. Notă asupra condițiunii ca o suprafață să fie desfășurabilă, de M. ALLIAUME. Asupra unui mod de calcul relativ la două integrale clasice, de L. BRUVIER.

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Tomul CXI. Fascicola II. Fevruarie 1931.

Idem. Fascicola III Martie 1931. C. C. DASSEN. Unghiurile și rotațiunile imaginare. Al treilea capitol de geometrie analitică vectorială.

Journal de mathématiques élémentaires, publié par H. VUIBERT. Anul 55. No. 13. Aprilie 1931.

Idem. No. 14. Aprilie 1931.

Boletin matematico. Anul III. No. 12. Decemvrie 1930. Buenos Aires. Importanţa filosofică a Elementelor lui EUCLIDE, de R. O. ZAHARIA.

Revista matematică din Timişoara. Anul XI. No. 2. Aprilie 1931. Timişoara. Sisteme de ecuaţii şi de identităţi algebrice, de V. CLAUDEAN.

P. CAZANACLI. IOAN POPP. *Primul profesor de Geometria analitică la Universitatea din Iaşi.* (Extras din *Revista Ştiinţifică* „V. ADAMACHI". Anul XVI. No. 1). Iaşi. 1931.

GASTON JULIA. *Leçons sur la représentation conforme des aires simplement connexes.* Gauthier-Villars et C-ie. Paris. 1931.

În un volum de 114 pagini autorul publică cursul făcut în 1926 la Sorbona. Chestiunile pot fi urmărite numai cu cunoştinţele generale cerute pentru certificatul de calcul infinitezimal. Reproducem următoarele din prefaţa autorului, spre a se vedea mai bine coprinsul cărţii:

„După studiul substituţiunilor lineare, pe care le cere chestiunile tratate, se expune demonstrarea teoremei principale pentru existenţa unei reprezentări conforme circulară a ariilor D simplu conexe, prevăzute cu cel puţin două puncte-frontieră; metoda urmată, foarte intuitivă şi elementară, este cea dată de LINDELÖF în frumoasele sale memorii din 1915 şi 1916, utilizând şi simplificând lucrarea fundamentală, astăzi clasică, a lui CARATHÉODORY. In urmă s'au desvoltat numeroase exemple!

„Se examinează apoi proprietăţile geometrice ale funcţiunii analitice $f(z)$ care transformă cercul $d\,[\,|z|<1\,]$ în o arie D a planului Z dat *a priori:* dilatarea şi rotaţia în fiecare punct, studiul modulului şi argumentului lui $f(z)$, majorantele pentru $f(z)$, etc., propietăţi a căror totalitate ne informează util asupra lui $f(z)$ şi care au făcut obiectul a numeroase lucrări dela 1910. (*Koebe, Bieberbach, Faber, Nevanlinna,* etc.).

„Cartea se termină prin expunerea unor proprietăţi ale funcţiunii $z=\varphi(Z)$ care transformă D într'un cerc d de rază unu $[\,|z|<1\,]$, sau într'un cerc de rază ρ când $\varphi'(0)=+1$".

Materia aci arătată este tratată în 5 capitole, precedate de un capitol de preliminare necesare pentru înţelegerea expunerii.

I. I.

CERERI

205. Cine-mi poate procura şi cu ce preţ:

a) Numărul 3 din Anul XXXIV al *Gazetei Matematice.*

b) Primul volum din „Jurnal matematic".

c) Ultimul număr din „Curierul matematic". (Fevruarie 1928)?

AL. A. ROŞU
(Strada Vasile Lascar 38. Bucureşti I)

DIVERSE

Secţiunea matematică a Societăţii Române de Ştiinţe a ţinut şedinţă în seara zilei de 3 Aprilie, când au făcut comunicări D-l M. GHERMĂNESCU asupra integralei lui POISSON şi D-l D. BARBILIAN despre extinderea teoremei lui PONCELET la curbele raţionale normale.

Profesorii de matematici ai Universităţii din Bucureşti şi Societatea de Ştiinţe, secţiunea matematică, au oferit un banchet D-lui ELIE-CARTAN, Profesor la Facultatea de ştiinţe din Paris şi membru al Academiei de ştiinţe din Franţa. Banchetul a avut loc în seara zilei de 25 Aprilie.

Secţiunea de matematici a Societăţii Române de Ştiinţe a ţinut şedinţă în seara zilei de 2 Aprilie, la care au făcut comunicări D-l ELIE CARTAN despre suprafeţele riglate şi D-l G. ŢIŢEICA asupra unor propietăţi ale unui sistem de cercuri.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1933. *Un triunghiu* ABC *are vârful* A *fix şi baza* BC *de direcţie fixă* Δ *şi lungime constantă* l. *Pe laturile* AB *şi* AC *se iau punctele* D *şi* E *aşà ca* DE *să aibă o direcţie fixă* Δ' *şi lungime constantă* a. *Să se găsiască locul punctelor* D *şi* E *când* B *descrie o elipsă.*

† AL. ROŞU.

Luăm ca axe de coordonate dreapta Δ şi o paralelă la Δ dusă prin A. Pe semiaxa $A\Delta'$ luăm lungimea AM egală cu a.

Considerăm cazul general când B descrie o curbă oarecare Γ, care, raportată la sistemul ales, are ca ecuaţie

$$F(x,y) = 0. \tag{1}$$

Punctul C va descrie curba Γ translatată pe direcţia Δ cu o cantitate egală cu l. Ecuaţia curbei Γ', locul lui C, este

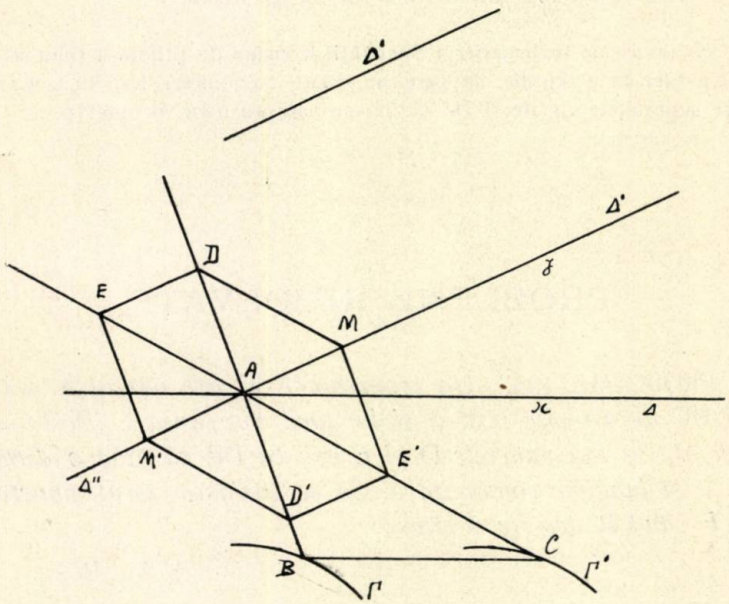
$$F(x + l, y) = 0. \tag{2}$$

Fie B (u, v) un punct oarecare pe Γ. Corespunzătorul său pe Γ' va fi C $(u + l, v)$.

Ecuațiile dreptelor AB și AC sunt în acest caz

$$(AB) \qquad y = \frac{v}{u} x$$

$$(AC) \qquad y = \frac{v}{u + l} x.$$



Punctul D se obține ducând prin M paralela MD la AB, iar E se obține ducând prin D paralela DE la Δ'.

Ecuația lui MD, paralelă cu AC este

$$(MD) \qquad y - a = \frac{v}{u + l} x.$$

Locul lui D se obține eliminând pe u și v între ecuațiile (AB), (MD) și

$$(3) \qquad F(u, v) = 0.$$

Din ecuațiile (AB), (MD) se scoate

$$u = \frac{l(y-a)}{a} \quad ; \quad v = \frac{ly(y-a)}{ax}$$

pe care ducându-le în (3), se găsește că D descrie curba

$$(4) \qquad F\left[\frac{l(y-a)}{a} \; , \; \frac{ly(y-a)}{ax}\right] = 0.$$

Locul lui E se obține din curba (4) dacă se face acestei curbe o translație pe direcția Δ' în sensul DE și de o valoare egală cu a. Locul lui E este deci o curbă egală cu acea a locului lui D.

Se observă că gradul curbei (4) este dublul gradului curbei (1) pe care o descrie B.

In cazul particular al problemei 1933, punctele B și C descriind conice egale, punctele D și E vor descrie cuartice egale. Calculele pentru găsirea acestor cuartice se urmează exact ca în cazul general.

Un caz particular cu rezultate mai simple este când B și C descriu o dreaptă paralelă cu Δ și la o distanță oblică d măsurată pe direcția Δ'. In acest caz locul este parabola

$$ly^2 - adx - aly = 0$$

care se vede că este independentă de l când d este egal cu l.

Dacă se consideră punctul M' pe semiaxa $A\Delta''$, prelungirea lui $A\Delta'$ atunci se obțin punctele D' și E' simetricele lui D și E față de A. Locurile lui D' și E' se obțin din acelea ale lui D și E prin înlocuirea lui l prin $-l$.

D-l Sub-Locotenent A. I. Stan a rezolvat foarte bine și complect problema în cazul general. D-sa luând ca axe pe Δ și perpendiculara în A pe Δ, a găsit că B descrie curba

$$F\left[\frac{lx(y-q)}{py-ax} \; , \; \frac{ly(y-q)}{py-ax}\right] = 0$$

în care p și q sunt coordonatele lui M.

D-l Alexandru Al. Roșu a rezolvat problema în cazul particular din enunț. Ecuația cuarticei găsită de d-sa are coeficienți eronat calculați.

Gh. B.

PROBLEMA 3619. *Să se stabilească relaţia*

$$(b^2 + c^2)\ \sin 2A + (a^2 + c^2)\ \sin 2B + (b^2 + a^2)\ \sin 2C = 12\ S.$$

a, b, c, A, B, C şi S *reprezentând laturile, unghiurile şi suprafaţa unui triunghiu oarecare.*

GH. I. BALABAN.

1. *Soluţie* dată de D-l EDMOND M. CAŢICHI (Iaşi).

Fie A' piciorul înălţimii h_a, avem:

(1) $h_a = c\ \sin B$ (2) $BA' = c\ \cos B$

(3) $h_a = b\ \sin C$ (4) $A'C = b\ \cos C.$

Inmulţind (1) cu (2) şi (3) cu (4) şi apoi adunând, avem:

$$h_a\,(BA' + A'C) = \frac{c^2\ \sin 2B}{2} + \frac{b^2\ \sin 2C}{2}$$

sau

(I) $$c^2\ \sin 2B + b^2\ \sin 2C = 4S.$$

In mod analog se obţine

$$a^2\ \sin 2C + c^2\ \sin 2A = 4S$$

$$a^2\ \sin 2B + b^2\ \sin 2A = 4S$$

şi adunând rezultă relaţia din enunţ, adică

$$\Sigma\ (b^2 + c^2)\ \sin 2A = 12S.$$

Domnii N. ALDEA, CEZAR COŞNIŢĂ, C. V. COSTĂCHESCU, M. DAVIDSOHN, N. I. DINULESCU, P. DOBROMIRESCU, GRIGORE GRUBENMANN, H. P. IONESCU-BISS, GR. MAREŞ, GH. MIHAI, TH. N. PANAITE, I. G. POPA, EUGEN P. POPESCU, I. POPOVICI, D. ŞERBAN-ULMENI, LUCIAN O. ZAHARIA, s'au servit de relaţia (I) şi similarele ei, ce se găsesc cunoscute în diferite tratate, ca: F. G. M. sau F. J., Compléments de Trig. pag. 212; H. VUIBERT, Rélations entre les éléments d'un triangle pag. 25; precum şi în *Gazeta Matematică* XXXIII, Nota No. 14, pag. 101.

2. *Alte soluţii* s'au primit dela Domnii: A. V. ANGELESCU, UN ANONIM, I. BUCURESCU, A. BURICHOVICI, E. N. BURLACU, ION CRAIU, VLADIMIR I. CRIVĂŢ, CONSTANTIN DAN, N. T. DONCIU, AD. C. GHEORGHIU, GH. TH. GHEORGHIU, P. I. GHIŞOIU, R. GHIULEA, ALMÉ GURĂU, EUG. ŞT. IACOB, C. D. IONESCU-ŢIU, C. I.

ISTINIE-BREZUICA, MARIN B. MARINAŞ, I. MURĂROIU, MIRCEA A. NEGREA, NIC. PAVEL-ONIZABA, TH. N. PANAITE, RADU PASCU, I. GH. POPA, CORN. N. POPESCU, CRISTIAN I. RÂMNICEANU, M. V. RAŢIU, EMIL N. SAULEA, ARNOLD SAVIN (Focşani), IOAN C. SAVIN, D-RA DORA SONNENREICH, GH. C SPRINCEANĂ, JUSTIN N. VÂLCEANU, N. VELICESCU, T. VELICESCU, I. O. ZAHARIA, I. G. ZAMFIRESCU.

Notă. Problema aceasta e cunoscută.

Astfel:

a) Domnii CRISTIAN RÂMNICEANU, AURELIAN STAN şi PANAITE N. TH. au arătat că se află propusă în enunţul problemei No. 2173 din *Gazeta Matematică* Anul XX, pag. 119, propusă de D-l I. BANCIU şi rezolvată în acelaş an la pag. 386.

b) Domnii CRISTIAN RÂMNICEANU şi IOAN POPOVICI au arătat că e tot una cu exerciţiul 46 din *Gazeta Matematică* XXXI, pag. 316, unde se cere stabilirea relaţiei $\Sigma a^2 (\sin 2B + \sin 2C) = 12S$.

COLONEL G. I. LITEANU.

PROBLEMA 3679. *Extremităţile* A *şi* B *ale unui segment* AB *de mărime constantă se mişcă pe curbele plane date* (A) *şi* (B). *Normalele în* A *şi* B *la curbele* (A) *şi* (B) *se tae în* I. *Să se găsească tangenta în* I *la curba* (I) *descrisă de acest punct când segmentul* AB *variază ca poziţie.*

N. ABRAMESCU.

Soluţie dată de D-l I. V. MĂTIEŞ, Profesor.

Să considerăm triunghiul AIB (Fig. 2) de formă variabilă. Punctele de contact ale normalelor AI şi BI cu înfăşurătoarele lor, sunt P şi Q, respectiv centrele de curbură ale curbelor (A) şi (B) în punctele A şi B. Deoarece segmentul AB este constant ca mărime, punctul M unde îşi atinge înfăşurătoarea este la intersecţia acestui segment cu perpendiculara din I pe AB, căci se ştie [1]) că *dacă un segment de mărime constantă variază în planul său, normalele la curbele descrise de extremităţile segmentului în aceste puncte se întâlnesc pe normala la înfăşurătoarea segmentului.*

In aceste condiţiuni, se poate determină normala în I la curba (I) descrisă de acest punct, cu metoda lui MANNHEIM [2]).

1) N. ABRAMESCU, *Lecţiuni de Geometrie pură Infinitezimală*, p. 33.

2) A se vedeà, N. ABRAMESCU, *Lecţiuni de Geometrie pură Infinitezimală*, p. 37.

Anume, fie M, P, Q punctele de contact (Fig. 1) cu înfăşu-

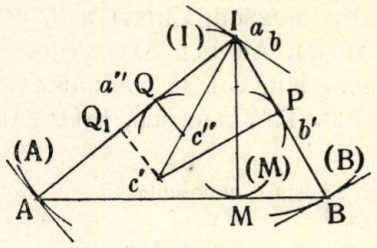


Fig. 1.

rătoarele ale laturilor triunghiului ABC, de formă variabilă. Normalele la aceste înfăşurătoare tae în a, b, b', c', c'', a'', respectiv normalele la curbele (A), (B), (C), descrise de punctele A, B, C.

Conform celor stabilite la variaţia unui arc de curbă, avem

$$\frac{d(A)}{d(B)} = \frac{Aa}{Bb}, \quad \frac{d(B)}{d(C)} = \frac{Bb'}{Cc'}, \quad \frac{d(C)}{d(A)} = \frac{Cc''}{Aa''},$$

pe cari înmulţindu-le, obţinem formula lui MANNHEIM

$$(1) \qquad \frac{Aa \,.\, Bb' \,.\, Cc''}{Bb \,.\, Cc' \,.\, Aa''} = 1,$$

care permite, cunoscând cinci din cele şase normale, $Aa''a$, $Bb'b$, $Cc''c'$, Mba, $Pb'c'$, $Qa''c''$, să se construiască a şasea.

In cazul problemei propuse, punctul C din figura 2 este I în figura 1, unde se confundă punctele a şi b; în punctul P (Fig. 1)

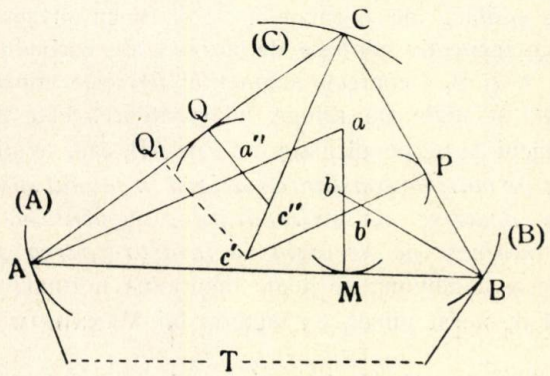


Fig. 2.

se află şi b', iar în Q se află şi a'' (Fig. 1). Insemnând cu R_A,

R_B razele de curbură respective ale curbelor (A) şi (B) în A şi B, şi observând că $Bb = BI$, $Aa = AI$, cari sunt cunoscute, formula (1) devine

$$\frac{AI \cdot R_B \cdot Ic''}{BI \cdot Ic' \cdot R_A} = 1,$$

de unde

$$(2) \qquad \frac{Ic''}{Ic'} = \frac{BI \cdot R_A}{AI \cdot R_B} = k = \text{const.}$$

Luând acum pe AI (Fig. 1) punctul Q_1, astfel ca

$$\frac{IQ}{IQ_1} = k,$$

se vede că perpendiculara în Q_1 pe AI tae perpendiculara în P pe BI tocmai în punctul c' căutat, căci $IQ : IQ_1 = Ic'' : Ic' = k$.

Normala în I este deci Ic', iar tangenta în I la curba (I) descrisă de acest punct este perpendiculara în I pe Ic'.

PROBLEMA 3779. *Să se verifice identitatea*

$$\sum_{i=1}^{i=m} \frac{(\operatorname{tg}^2 a_i + 1)\ \sin^2 2a_i}{2\operatorname{tg} a_i\ (\sin 3a_i \cos a_i - \cos 3a_i \sin a_i)} = m$$

(enunţ generalizat).

I. C. Savin.

Soluţie dată de D-nii: Gh. T. Gheorghiu-Gladiş, Cezar Coşniţă, Haralamb P. Ionescu, N. Aldea, I. C. Boian, P. Bumbulici, C. V. Costăchescu, Vl. I. Crivăţ, C. Dan, H. Şt. Dăscălescu, Fl. Dinoci-Argeş, V. Gr. Drăguţ, Barbu I. Drincianu, Scarlat Dumitru, P. I. Ghişoiu, M. I. Grossu, C. D. Ionescu-Ţiu, C. Gh. Lupescu, I. V. Măţieş, Em. I. Mihalcea, Negrea A. M. Leonte, Th. N. Panaite, I. Parepeanu, I. Gh. Popa, Nicolae D. Popescu, Cr. I. Râmniceanu, N. N. Velicescu, Titus Velicescu.

Ţinând seamă că

$$\sin 2a = \frac{2\operatorname{tg} a}{1+\operatorname{tg}^2 a};\quad \sin 3a\cos a - \cos 3a \sin a = \sin 2a$$

avem succesiv

$$\frac{\operatorname{tg}^2 a + 1}{2\operatorname{tg} a}\cdot\frac{\sin^2 2a}{\sin 3a\cos a - \cos 3a\sin a} = \frac{1}{\sin 2a}\cdot\frac{\sin^2 2a}{\sin 2a} = 1.$$

Insumând pentru arcele $a_1, a_2, a_3, \ldots a_m$, avem relaţia din enunţ.

Mai general se poate scrie şi sub forma

$$\sum_{i=1}^{i=m}\frac{(\operatorname{tg}^2 a_i + 1)^n \sin^{2n} 2a_i}{2^n \operatorname{tg}^n a_i\,(\sin 3a_i \cos a_i - \cos 3a_i \sin a_i)^n} = m.$$

Col. Gh. I. L.

PROBLEMA 3797. *Fie un triunghiu* ABC *şi triunghiul său ortic* A′B′C′. *Fie* $A_1B_1C_1$ *triunghiul determinat de antiparalelele egale* $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ *înscrise respectiv în unghiurile* A, B, C *ale triunghiului* ABC; *apoi* $A_2B_2C_2$ *triunghiul determinat de dreptele* $\alpha'\beta$, $\beta'\gamma$, $\gamma'\alpha$ [$A_2 \equiv (\alpha'\beta, \gamma'\alpha)$, $B_2 \equiv (\beta'\gamma, \alpha'\beta)$, $C_2 \equiv (\gamma'\alpha, \beta'\gamma)$].

Axele de omologie ale perechilor de triunghiuri omologice: ABC *cu* A′B′C′, A′B′C′ *cu* $A_2B_2C_2$, ABC *cu* $A_1B_1C_1$ *sunt concurente.*

A. Ç. Gheorghiu.

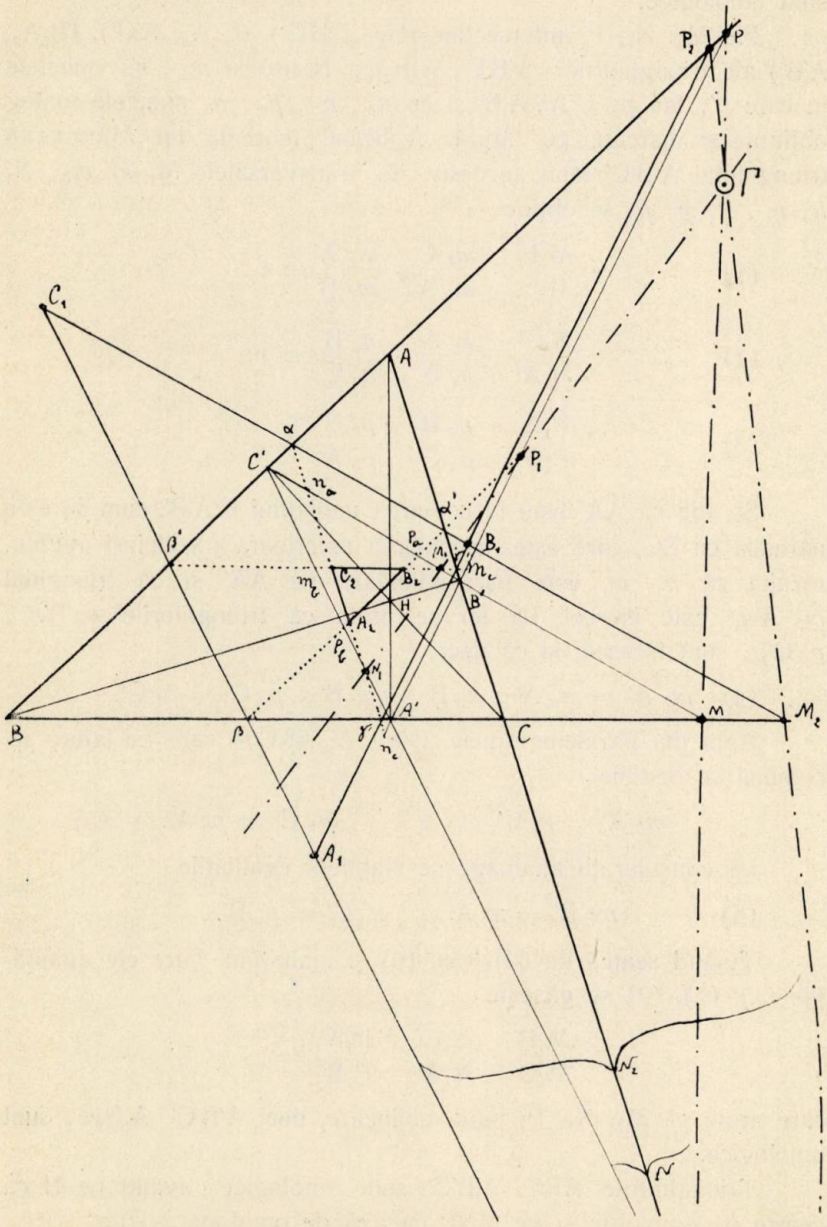
Soluţie dată de D-l C. Coşniţă (Student, Bucureşti).

Laturile triunghiului A′B′C′ fiind antiparalele la ale triunghiului ABC, vor fi paralele cu direcţiile $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$. Deoarece $\alpha\alpha'$ este antiparalelă cu BC patrulaterul $B\alpha\alpha'C$ este inscriptibil. La fel $C\beta\beta'A$ şi $A\gamma\gamma'B$ sunt inscriptibile. Rezultă

$$\sphericalangle A = \sphericalangle C\gamma'\gamma = \sphericalangle B\beta\beta'$$

şi cum $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ sunt egale urmează că patrulaterul $\beta\beta'\gamma\gamma'$ este trapez isoscel, deci $\beta'\gamma$ este paralelă cu BC. La fel se arată că $\beta\alpha'$ şi $\alpha\gamma'$ sunt paralele respectiv cu BA şi AC. Observ acum că $\alpha\alpha'$ fiind antiparalelă cu BC este antiparalelă şi cu $\beta'\gamma$, paralelă la BC. Deci patrulaterul $\beta'\alpha\alpha'\gamma$ este inscriptibil şi cum trapezul $\alpha\alpha'\gamma\gamma'$ este isoscel, urmează că γ' se află pe cercul punctelor α, α', γ, β'. Dar cercul

$\beta'\gamma\gamma'$ trece și prin β căci $\beta\beta'\gamma\gamma'$ e isoscel. Deci cele 6 puncte α, α', β, β', γ, γ' sunt conciclice.



Teorema lui PASCAL, aplicată la exagonul $\alpha\alpha'\gamma\gamma'\beta\beta'$ arată că

perechile de laturi ($\alpha\alpha'$, BC), ($\beta\beta'$, CA), ($\gamma\gamma'$, AB) se taie în 3 puncte colineare M_2, N_2, P_2. Prin urmare triunghiurile ABC, $A_1B_1C_1$ sunt omologice.

Fie M_1, N_1, P_1 intersecțiile (B_2C_2, B'C'), (C_2A_2, A'C'), (B_2A_2, A'B') ale triunghiurilor A'B'C', $A_2B_2C_2$. Notez cu m_b, m_c punctele în care $\beta'\gamma$ tae pe C'A', A'B' și cu n_a, n_c, p_a, p_b punctele analog obținute și marcate pe figură. Aplicând teorema lui MENELAUS triunghiului A'B'C' tăiat succesiv de transversalele $M_1\ m_c\ m_b$, $N_1\ n_a\ n_c$, $P_1\ p_a\ p_b$ se obține

$$(1) \qquad \frac{M_1B'}{M_1C'} \cdot \frac{m_b\,C'}{m_b\,A'} \cdot \frac{m_c\,A'}{m_c\,B'} = 1$$

$$(2) \qquad \frac{N_1C'}{N_1A'} \cdot \frac{n_c\,A'}{n_c\,B'} \cdot \frac{n_a\,B'}{n_a\,C'} = 1$$

$$(3) \qquad \frac{P_1A'}{P_1B'} \cdot \frac{p_a\,B'}{p_a\,C'} \cdot \frac{p_b\,C'}{p_b\,A'} = 1.$$

Se știe că AA' este bisectoarea unghiului C'A'B', cum $\beta'\gamma$ este paralelă cu BC, care este bisectoarea exterioară a aceluiași unghiu, rezultă că $m_b\ m_c$ este perpendiculară pe AA' și că triunghiul $m_b\,A'm_c$ este isoscel. La fel se arată că triunghiurile $n_a\,B'n_c$, $p_a\,C'p_b$ sunt isoscele și că deci

$$(4) \quad m_b\,A' = m_c\,A' \ ; \ n_a\,B' = n_c\,B' \ ; \ p_a\,C' = p_b\,C'.$$

Apoi din paralelogramele $\beta\beta'm_b\,A'$, $\beta\beta'C'p_b$ care au latura $\beta\beta'$ comună se deduce

$$m_b\,A' = p_b\,C' \qquad \therefore \qquad m_b\,C' = p_b\,A'. \qquad (5)$$

Pe considerații analoage se stabilesc egalitățile

$$(6) \qquad m_c\,B' = n_c\,A' \ ; \ n_a\,C' = p_a\,B'.$$

Ținând seamă de (4), (5), (6) și înmulțind între ele egalitățile (1), (2), (3) se găsește

$$\frac{M_1B'}{M_1C'} \cdot \frac{N_1C'}{N_1A'} \cdot \frac{P_1A'}{P_1B'} = 1$$

care arată că M_1, N_1, P_1 sunt colineare, deci A'B'C', $A_2B_2C_2$ sunt omologice.

Triunghiurile ABC, A'B'C' sunt omologice, având pe H ca centru de omologie și pe MNP ca axă de omologie.

Fie M_2 intersecția $\alpha\alpha'$ cu BC. Patrulaterul $B\alpha\alpha'C$ fiind inscriptibil avem

$$(7) \qquad \overline{M_2\alpha} \cdot \overline{M_2\alpha'} = \overline{M_2B} \cdot \overline{M_2C} = k^2.$$

Dar $\overline{M_2\alpha} \cdot \overline{M_2\alpha'}$ este puterea lui M_2 față de cercul celor 6 puncte α, α', β, β', γ, γ'. Deci relațiunea (7) arată că M_2 este pe axa radicală a cercurilor ABC și $\alpha\alpha'\beta\beta'\gamma\gamma'$. Se arată la fel că N_2, P_2 sunt pe axa radicală a aceloraşi cercuri. Urmează că M_2, N_2, P_2 sunt colineare şi deci că triunghiurile ABC, $A_1B_1C_1$ sunt omologice.

Deoarece

$$\overline{MC} \cdot \overline{MB} = \overline{MB'} \cdot \overline{MC'} \; ; \; \overline{NA} \cdot \overline{NC} = \overline{NA'} \cdot \overline{NC}$$

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PA'} \cdot \overline{PB'}$$

urmează că dreapta MNP este axa radicală a cercurilor ABC, A'B'C'.

Punctele $\beta'C'B'\gamma$ sunt conciclice căci $\beta'\gamma$ e antiparalelă la C'B', deci

$$\overline{M_1C'} \cdot \overline{M_1B'} = \overline{M_1\beta'} \cdot \overline{M_1\gamma}$$

ceeace arată că M_1 se află pe axa radicală a cercurilor A'B'C', $\alpha\alpha'\beta\beta'\gamma\gamma'$.

La fel se arată că N_1, P_1 se află tot pe această axă radicală.

Am ajuns deci la rezultatul că dreptele MNP, $M_1N_1P_1$, $M_2N_2P_2$ sunt axele radicale a cercurilor ABC, A'B'C', $\alpha\alpha'\beta\beta'\gamma\gamma'$ luate două câte două. Prin urmare aceste trei drepte sunt concurente, ceeace demonstrează partea finală a problemei.

Notă. Am dat soluția dezvoltată, aşa cum a trimis-o D-l C. Coşniță, pentru a arătă că primele elemente de geometrie sunt adesea suficiente pentru a rezolvà probleme relativ grele. Acelaş lucru l'am subliniat şi la finele soluției problemei 3275 la pag. 64 vol. XXXVI. Aceasta pentru a încurajà şi pe corespondenții începători să atace probleme mai grele.

Figura care face obiectul problemei 3797 se bucură de o serie de proprietăți interesante, cunoscute în geometria triunghiului. Citez:

1°. *Trei antiparalele egale inscrise în unghiurile unui triunghiu, determină pe laturile acelui triunghiu 6 puncte conciclice. Cercul circumscris este un cerc* Tucker. Deci α, α', β, β', γ, γ' e pe un cerc Tucker. (*Exercices de Géométrie* par F. G. M. 7e édition pag. 1149).

2°. *Simediana este locul de unde se pot duce antiparalele egale.* (Id. pagina 1188). Deci $\alpha\alpha'$, $\gamma\gamma'$ se întâlnesc în B_1 pe simediana BB_1. La fel CC_1, AA_1 sunt simediane. Simedianele sunt concurente în punctul K al lui Lemoine, deci ABC, $A_1B_1C_1$ sunt omologice, centrul de omologie fiind K.

3°. *Locul mijlocurilor antiparalelelor* $\alpha\alpha'$ *la* BC *este simediana* AK (*Exercices de Géométrie* par F. J., 3e ed. pag. 1013 ex. 984). Dreapta care uneşte pe A cu mijlocul lui $\alpha\alpha'$ trece şi prin vârful A_2 al paralelogramului $A\alpha A_2\alpha'$.

Deci AA_2, BB_2, CC_2 concură tot în K.

4°. *Dreapta* OK *este locul centrelor cercurilor* $\alpha\alpha'\beta\beta'\gamma\gamma'$. (*Ex. géom.* F. G M. pag. 1188), O fiind centrul cercului ABC.

GH. B.

PROBLEMA 3821. *Dacă* **c** *este un număr, iar* **a** *şi* **b** *cifre, care este numărul care are ca rădăcină patrată pe* **ab, c**... *şi ca rădăcină cubică pe* **b, c**...

N. O. ZAHARIA.

Fie x numărul căutat. El trebuie să satisfacă egalităţile simultane

(1) $\sqrt{x} = ab, c\ldots$ şi (2) $\sqrt[3]{x} = b, c\ldots$

Din (2) se scoate

$$\sqrt[3]{x} < 10 \quad , \quad \therefore \quad x < 1000 \quad \therefore \quad \sqrt{x} < 31{,}63\ldots$$

care arată că numărul ab este cel mult egal cu 31, deci a poate avea una din valorile şirului

(3) $\qquad 3 \; ; \; 2 \; ; \; 1 \; ; \; 0.$

Valoarea zero dând soluţiuni formale pentru $ab, c\ldots$ Vom da deci lui a pe rând valorile şirului (3).

1°. $a = 3$. Deoarece $\sqrt{x} < 31$, b nu poate avea decât valorile 1 sau 0. In aceste cazuri am avea:

$$\sqrt{x} = 31, c\ldots \quad , \quad \sqrt[3]{x} = 1, c\ldots$$

$\therefore \quad 961 < x < 1024 \qquad$ şi $\qquad 1 < x < 2 \qquad$ imposibilitate

sau

$$\sqrt{x} = 30, c\ldots \quad , \quad \sqrt[3]{x} = 0, c\ldots$$

$\therefore \quad 900 \leqslant x < 961 \qquad$ şi $\qquad 0 < x < 1 \qquad$ imposibilitate.

2^0. $a = 2$. Avem:

$$\sqrt{x} = 2b, c \ldots \quad ; \quad \sqrt[3]{x} = b, c \ldots$$

$$\therefore \quad 20 < \sqrt{x} < 30 \quad ;$$

$$\therefore \quad 400 < x < 900 \qquad \therefore \quad 7{,}368 < \sqrt[3]{x} < 9{,}647 \ldots$$

Ultima neegalitate arată că b ar puteà aveà numai valorile 9, 8 sau 7.

Luând $b = 9$ avem:

$$\sqrt{x} = 29, c \ldots \quad ; \quad \sqrt[3]{x} = 9, c \ldots$$

$$\therefore \quad 29 \leqslant \sqrt{x} < 30 \quad ; \quad 9 \leqslant \sqrt[3]{x} < 10$$

$$\therefore \quad 841 \leqslant x < 900 \quad ; \quad 729 \leqslant x < 1000$$

care conduc, pentrucă sunt simultane, la

$$(4) \qquad 841 < x < 900$$

$$\therefore \quad 9{,}429 \ldots < \sqrt[3]{x} < 9{,}655 \ldots$$

Aceste neegalități fixează limite pentru numărul c, anume

$$(5) \qquad 429 \ldots < c < 655 \ldots$$

Cum prin enunț nu se precizează numărul cifrelor lui c se pot da ca soluții a cazului 2^0 pentru $b = 9$, numerele din neegalitățile (4) pentru care c este dat de (5). Putem însă restrânge limitele neegalităților (4), dacă căutăm a preciză pe c. De exemplu să căutăm a determinà prima cifră a lui c, lăsând nedeterminate celelalte cifre.

Din (5) se vede că c poate începe cu 4, 5 sau 6.

Să considerăm cazul când c începe cu 4. Avem:

$$(6) \qquad \sqrt{x} = 29{,}4 \ldots \quad ; \qquad \sqrt[3]{x} = 9{,}4 \ldots$$

$$\therefore \quad 29{,}4 \leqslant \sqrt{x} < 29{,}5 \quad ; \quad 9{,}4 \leqslant \sqrt[3]{x} < 9{,}5$$

$$\therefore \quad 864{,}3 \leqslant x < 870{,}2 \quad ; \quad 830{,}6 \leqslant x < 857{,}3$$

neegalități care nu au loc simultan. Deci (6) nu sunt posibile.

Considerăm cazul când c începe cu 5. Avem:

$$\sqrt{x} = 29{,}5\ldots\ ; \qquad \sqrt[3]{x} = 9{,}5\ldots$$

$$\therefore\ 29{,}5 \leqslant \sqrt{x} < 29{,}6\ ; \qquad 9{,}5 \leqslant \sqrt[3]{x} < 9{,}6$$

$$\therefore\ 870{,}2 \leqslant x < 876{,}1\ ; \qquad 857{,}3 \leqslant x < 884{,}7$$

care au loc simultan pentru

$$(7) \qquad 870{,}2 \leqslant x < 876{,}1.$$

Luând c egal cu 6 ... se ajunge la neegalităţile

$$876{,}1 \leqslant x < 882{,}1 \quad \text{şi} \quad 884{,}7 \leqslant x < 912{,}6$$

imposibile simultan.

Dacă se dau lui b, valorile 8 şi 7, se ajunge pe aceiaşi cale la neegalităţile, imposibile simultan,

$729 \leqslant x < 784$ cu $343 \leqslant x < 512$ pentru $b = 7$

$784 \leqslant x < 841$ » $512 \leqslant x < 729$ » $b = 8$.

Cazul 2^0 are deci ca soluţiuni numerele date de (7).

3^0. $a = 1$. Ca la celelalte cazuri:

$$\sqrt{x} = 1b,\ c\ldots\ ; \qquad \sqrt[3]{x} = b,\ c\ldots$$

$$\therefore\ 10 \leqslant \sqrt{x} < 20$$

$$\therefore\ 100 \leqslant x < 400\ ; \quad 4{,}641\ldots < \sqrt[3]{x} < 7{,}368$$

ceeace arată că b ar puteà fi 4, 5, 6, 7. Examinând ca în cazurile precedente se găseşte că numai valoarea 6 dă soluţii. Deci:

$$a = 1\ ;\ b = 6\ ;\ \sqrt{x} = 16,\ c\ldots\ ;\ \sqrt[3]{x} = 6,\ c\ldots$$

Să căutăm şi în acest caz prima cifră a lui c. Avem:

$$16 \leqslant \sqrt{x} < 17\ ; \qquad 6 \leqslant \sqrt[3]{x} < 7$$

$$\therefore\ 256 \leqslant x < 289\ ; \qquad 216 \leqslant x < 343$$

$$\therefore\ 256 \leqslant x < 289 \qquad 6{,}341 < \sqrt[3]{x} < 6{,}611$$

ceeace arată că c se puteà începe cu 3,4, 5 sau 6.

Pentru $c = 3\ldots$ şi $c = 6\ldots$ găsim rezultate neadmisibile. Pentru $c = 4\ldots$ avem:

$$\sqrt{x} = 16{,}4\ldots \quad ; \quad \sqrt[3]{x} = 6{,}4\ldots$$

$$16{,}4 \leqslant \sqrt{x} < \sqrt{x} \quad ; \quad 6{,}4 \leqslant \sqrt[3]{x} < 6{,}5$$

$$\therefore \quad 268{,}9 \leqslant x < 272{,}2 \; ; \quad 262{,}0 \leqslant x < 274{,}6$$

$$\therefore \quad 268{,}9 \leqslant x < 272{,}2.$$

La fel pentru $c = 5\ldots$ găsim soluţiile

$$274{,}6 \leqslant x < 275{,}5\ldots$$

3^0. $a = 0$. In acest caz vom aveà soluţiuni formale pentru numărul de 2 cifre ab. Vom aveà:

$$\sqrt{x} = b,\ c\ldots \quad ; \quad \sqrt[3]{x} = b,\ c\ldots$$

$$\therefore \quad \sqrt{x} < 10$$

$$\therefore \quad x < 100 \quad ; \quad \sqrt[3]{x} < 4{,}641\ldots$$

care arată că b ar puteà aveà valorile 0, 1, 2, 3, 4.

Pentru $b = 0$ avem:

$$\sqrt{x} = 0,\ c\ldots \quad ; \quad \sqrt[3]{x} = 0,\ c\ldots$$

Să presupunem că c începe cu 9. Avem:

$$0{,}9 \leqslant \sqrt{x} < 1 \quad ; \quad 0{,}9 \leqslant \sqrt[3]{x} < 1$$

$$0{,}81 \leqslant x < 1 \quad ; \quad 0{,}729 \leqslant x < 1$$

$$\therefore \quad 0{,}81 \leqslant x < 1 \text{ pentru care } \sqrt{x} = 0{,}9\ldots \text{ şi } \sqrt[3]{x} = 0{,}9\ldots$$

Luând pe rând c egal cu 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0 se mai găsesc soluţiunile:

$$0{,}64 \leqslant x < 0{,}729 \quad \therefore \quad \sqrt{x} = 0{,}8\ldots \; ; \quad \sqrt[3]{x} = 0{,}8\ldots$$

$$0{,}49 \leqslant x < 0{,}512 \quad \therefore \quad \sqrt{x} = 0{,}7\ldots \; ; \quad \sqrt[3]{x} = 0{,}7\ldots$$

$$0 \leqslant x < 0{,}0081 \quad \therefore \quad \sqrt{x} = 0{,}0\ldots \; ; \quad \sqrt[3]{x} = 0{,}0\ldots$$

Pentru $b = 1$ şi $b = 2$ se procedează la fel şi se găseşte

$$1 \leqslant x < 1{,}210 \quad \therefore \quad \sqrt{x} = 1{,}0\ldots \; ; \quad \sqrt[3]{x} = 1{,}0\ldots$$

$$1{,}44 \leqslant x < 1{,}728 \quad \therefore \quad \sqrt{x} = 1{,}1\ldots \; ; \quad \sqrt[3]{x} = 1{,}1\ldots$$

$$4 \leqslant x < 4{,}41 \quad \therefore \quad \sqrt{x} = 2{,}0\ldots \; ; \quad \sqrt[3]{x} = 2{,}0\ldots$$

Pentru $b = 2$ şi $b = 4$ nu se găseşte nici o soluţie.

După cum se vede problema are o infinitate de soluţii, iar faptul că nu se precizează numărul cifrelor lui c măreşte nedeterminarea.

Centralizând rezultatele sub formă de tabel, avem pentru c de o singură cifră:

Limitele lui x	Valorile lui $\sqrt{x}$	Valorile lui $\sqrt[3]{x}$
$0{,}49 \leqslant x < 0{,}512$	0,7...	0,7...
$0{,}64 \leqslant x < 0{,}729$	0,8...	8,0...
$0\,81 \leqslant x < 1$	0,9...	0,9...
$1 \leqslant x < 1{,}210$	1,0...	1,0...
$1{,}44 \leqslant x < 1{,}728$	1,1...	1,1...
$4 \leqslant x < 4{,}41$	2,0...	2,0...
$268{,}9 \leqslant x < 272{,}2$	16,4...	16,4...
$274{,}6 \leqslant x < 275{,}5$	16,5...	6,5...
$870{,}2 \leqslant x < 876{,}1$	29,5...	29,5...

Iată şi un exemplu de soluţie pentru cazul când c este de 3 cifre.

$$271{,}37 \leqslant x < 271{,}41 \; ; \quad \sqrt{x} = 16{,}474\ldots \; ; \quad \sqrt[3]{x} = 6{,}474\ldots$$

Acest exemplu s'a calculat tot pe calea întrebuinţată pentru celelalte rezultate.

Notă. 1°. Problema, după cum se vede, nu este grea. Ea necesită multe calcule logaritmice. Poate că din cauza calculelor nici nu a fost încercată de mulţi corespondenţi. Calculele numerice, sunt greşit evitate în învăţământul nostru secundar, ceeace constitue o lacună.

3°. S'au primit câteva soluţii cu rezultate parţiale bune dar cu demonstraţii neriguroase. Astfel D-nii: I. Gh. Popa şi M. I. Ungheanu au găsit pentru *ab, c*... soluţiile 29,5... ; 16,5... ; 16,4... dar nu au dat limite pentru x.

D-l I. Gh. Popa a dat şi soluţia parţială

$$\sqrt{874} = 29{,}56\ldots \quad , \quad \sqrt[3]{874} = 9{,}56$$

pentru un c de 2 cifre.

D-l H. P. Ionescu a dat numai soluţia parţială.

$$271 < x < 272.$$

4°. Un corespondent observă că problema este analoagă cu problema 3712 rezolvată la pagina 435 Vol. XXXIV şi întrebuinţând metoda de acolo ajunge la rezultate care nu merită a fi menţionate. Trebuie ţinut seamă că în matematici, ca şi aiurea, *comparaison n'est pas raison.*

Gh. B.

---

*PROBLEMA 3877. *Să se determine coeficienţii ecuaţiei:*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

astfel încât una din rădăcini să fie cuprinsă în intervalul $(-1, 0)$ *şi alta în intervalul* $(0, +1)$.

Căpitan I. Linteş.

In «*Algebra pentru Cl. V reală*» de D-nii Manicatide şi Abramescu, găsim următoarele condiţiuni:

1) *Pentru ca ambele rădăcini ale ecuaţiei date să fie cuprinse în intervalul* α, β $(\alpha < \beta)$, *atunci avem* (pag. 227):

$$\frac{a.\alpha^2 + b.\alpha + c}{a.\beta^2 + b.\beta + c} > 0 \quad \text{şi} \quad \frac{2a\alpha\beta + b\alpha + b\beta + 2c}{a\beta^2 + b\beta + c} < 0.$$

2) *Pentru ca o rădăcină a ecuaţiei date să fie mai mare*

ca o cantitate γ *şi alta mai mică* ($\alpha < \gamma < \beta$), *atunci avem* (pag. 224):

$$a(a\gamma^2 + b\gamma + c) < 0.$$

In consecinţă, pentru ca una din rădăcinile ecuaţiei date să fie cuprinsă în intervalul (α, γ), iar alta în intervalul (γ, β), trebue ca să avem satisfăcute cele trei condiţiuni de mai sus deodată, ţinând, bine înţeles, seamă şi de condiţia de realitate a rădăcinilor.

Pentru cazul problemei *3877,* avem:

$$\alpha = -1 \quad , \quad \beta = +1 \quad \text{şi} \quad \gamma = 0$$

prin urmare condiţiunile devin:

1) $$\frac{a - b + c}{a + b + c} > 0$$

2) $$\frac{c - a}{a + b + c} > 0$$

3) $$a \cdot c < 0$$

4) $$b^2 - 4ac \geqslant 0.$$

Dar fiind impusă condiţia 3) rezultă imediat că 4) este satisfăcută, aşa dar ultima o eliminăm.

Stabilind un tablou de condiţiuni, analog tabelelor date în soluţia problemei 3858 (G. M. XXXVI, pag. 150), găsim:

I	$a > c$	$a + c > b > 0$	$a \cdot c < 0$
II	$a < c$	$a + c < b < 0$	

Au rezolvat complect problema D-hii: Mihail Velea (student) şi Vladimir I. Crivăţ (Bucureşti).

D-l Grecu M. Cristache a rezolvat problema cu ajutorul celor stabilite de D-l I. Murăroiu în R. M. T. Vol. X, pag. 75.

I. L.

BIBLIOTECA CENTRALĂ a „ASOCIAŢIUNII" SIBIIU

*PROBLEMA 3955. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\sqrt[3]{(x+3)(x+12)} + \sqrt{(x+1)(x+13)} = 7.$$

CĂPITAN I. LINTEŞ.

Soluţie dată de D-nii: ŞT. CUCIUREANU (Lic. Militar Iaşi), I. CURCHI (Chişinău), R. DUMITRAŞCU (Lic. Roman), P. GHIŞOIU (Şc. Politechnică, Bucureşti), T. GOSPODIN (Student Cluj), CONST. LUPESCU (Lic. Roman), EM. MEREUŢĂ (Student Bucureşti), N. MIHĂILEANU (Lic. Constanţa), M. MOŢOC (Lic. Oltenita), ŞT. OLTEANU (Şc. Politechnică), C. PALIŢA (Lic. Militar Iaşi), I. PAREPEANU (Lic. Braşov), SUB-LOCOT. A. STAN (Student Matematici, Cluj), M. VELEA (Student Matematici, Cluj), N. VELICESCU, TITU VELICESCU (Şc. Politechnică), CRIVĂŢ VLADIMIR (Şc. Politechnică Bucureşti), I. ZARDA (Cluj) şi ŞT. DOBRESCU (Lic. Militar Iaşi).

Insemnând:

$$y^3 = (x+2)(x+12)$$

avem:

$$(x+1)(x+13) = y^3 - 11.$$

Deci ecuaţia devine:

$$y + \sqrt{y^3 - 11} = 7.$$

Pe care o mai putem scrie:

$$\sqrt{y^3 - 11} = 7 - y.$$

Şi ridicând ambii membrii la patrat, găsim:

$$y^3 - y^2 + 14 \cdot y - 60 = 0.$$

Ecuaţie care se mai poate scrie:

$$(y-3)(y^2 + 2y + 20) = 0.$$

Deci vom aveà:

$$y - 3 = 0 \quad \text{sau} \quad y^2 + 2y + 20 = 0.$$

De unde rădăcinile:

$$y_1 = 3 \quad \text{şi} \quad y_{2,3} = -1 \pm \sqrt{-19}.$$

Cu aceste valori vom avea:

$$(x + 2)(x + 12) = x^2 + 14x + 24 = 3^3 = 27$$

deci:

$$x^2 + 14x - 3 = 0$$

de unde:

$$x_{1,2} = -7 \pm 2\sqrt{13},$$

care sunt singurele rădăcini reale ale ecuației.

Inlocuind valorile găsite, spre verificare, avem:

$$\sqrt[3]{(-5 \pm 2\sqrt{13})(5 \pm 2\sqrt{13})} + \sqrt{(-6 \pm 2\sqrt{13})(6 \pm 2\sqrt{13})} = 7,$$

ceeace se verifică ușor, făcând operațiunile.

Observație.

O parte din rezolvatori au făcut substituția:

$$\sqrt{(x+1)(x+13)} = y \quad \text{și} \quad \sqrt[3]{(x+2)(x+12)} = z$$

obținând sistemul:

$$y + z = 7 \quad \text{și} \quad z^3 - y^2 = 11.$$

Și eliminând pe y obținem:

$$(z - 3)(z^2 + 2z + 20) = 0.$$

---

*PROBLEMA 3981. *Din fracția 840/108 se scade o fracție care are numărătorul 100. Care este numitorul fracții scăzătoare, știind că restul e un număr întreg, și care este acel rest?*

I. IONESCU.

Soluție aritmetică dată de D-nii: ST. OLTEANU (Școala Politecnică, București), G. V. GHIUȚĂ (Lic. Bacău) și B. A. HAIM.

Fracția dată 840/108 se simplifică cu 4 și cu 3 și devine 70/9, sau 7 întregi și 7/9.

Dacă din descăzut scoatem restul, ne va rămâne scăzătorul. Restul fiind întreg, rezultă că scăzătorul trebuie să conțină întregi și neapărat fracția 7/9, sau numai această fracție. El nu poate avea mai mult de 7 întregi căci altfel scăderea nu s'ar mai puteà face.

Ni se spune însă că scăzătorul este o fracție cu numărătorul 100. Ea trebuie deci să se poată simplifică într'o fracție care să aibă numitorul 9, căci altfel scoțându-i întregii nu ne-ar mai rămâne fracția 7/9. Numitorul nu poate fi chiar 9, căci $100/9 > 11$ și deci fracția ar trece de 7. Numitorul este dar un multiplu al lui 9. Multiplicatorul lui 9 nu poate fi decât un divizor al lui 100, căci altfel fracția nu s'ar puteà simplificà într'una care să aibă numitorul 9. Dar $100 = 2^2 . 5^2$ nu are decât divizorii 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100. Un multiplicator mai mare ca 10 nu putem luà, căci chiar 20 ar da numitorul $20 \times 9 = 180$, iar fracția $100/180 = 5/9$ este inferioară celui mai mic scăzător pe care am arătat că l'am puteà admite și care este 7/9. Deci numitorul scăzătorului nu ar puteà fi căutat decât printre numerele $2 \times 9 = 18$, $4 \times 9 = 36$, $5 \times 9 = 45$ și $10 \times 9 = 90$. Ele ne conduc la fracțiile $100/18 = 50/9$, $100/36 = 25/9$, $100/45 = 20/9$ și $100/90 = 10/9$. Scoatem întregii din ele și ne rămân fracțiile 5/9, 7/9, 2/9 și 1/9. Restul care ne trebuie, 7/9, ni-l dă numai a doua. Deci scăzătorul căutat este 100/36. El conține 2 întregi, care scoși din cei 7 întregi ai scăzătorului ne dă ca rest al scăderii $7 - 2 = 5$, care e deci restul căutat.

Soluție dată de D-nii: E. Mereuță (Student, București), T. Gospodin (Student Cluj), V. I. Crivăț (Școala Politecnică București), I. Zarda (Cluj), C. I. Naforniță (Lic. Militar, Monastirea Dealului), I. A. Epuran și A. M. Buțan (Lic. Militar, Târgul Mureșului), V. Vasu, G. St. Roșca, N. N. Velicescu, H. P. Ionescu, D. Moise, I. Parepeanu.

După enunț trebuie să avem:

$$\frac{840}{108} - \frac{100}{x} = y,$$

$$\therefore \quad \frac{70}{9} - \frac{100}{x} = y,$$

$$\therefore \quad 70x - 900 = 9xy.$$

Toți termenii se împart cu 9, afară de primul. E necesar deci să luăm $x = 9z$, și ecuația devine:

$$70z - 100 = 9zy.$$

Prima parte a egalității e mai mică decât $70z$. Deci $9y \leqslant 70$ și deci $y \leqslant 8$. Prima parte a egalității de mai sus se divide cu 10 și deci în partea a doua, ori z, ori y, trebuie să se dividă cu 5. Deci, sau punem $z = 5u$, sau $y = 5$, căci y nu trece de 8. Făcând înlocuirile și divizând ecuația cu 5 ne va rămâne:

$$70u - 20 = 9uy, \qquad \text{sau} \qquad 14z - 20 = 9z.$$

A doua, — care corespunde lui $y = 5$, — ne dă $5z = 20$, de unde $z = 4$, și deci $x = 9z = 9 \times 4 = 36$. De aci reese că numitorul cerut este 36 și că restul căutat este 5.

Apoi, prima ecuație de mai sus, tot pentru motivele arătate, cere și $u = 5v$, așa că înlocuind devine:

$$70v - 4 = 9vy,$$

$$v(70 - 9y) = 4.$$

Insă am arătat că y e mai mic ca 8 și deci cel mult 7. Prin urmare $9y$ e cel mult $7 \times 9 = 63$ și deci parenteza de mai sus e cel puțin $70 - 63 = 7$. Cum v e cel puțin 1, el fiind întreg, reese că prima parte a egalității de sus trece de 7, pe când a doua este 4. Deci egalitatea e cu neputință.

Rămâne dar ca soluție a problemei numai cea găsită mai sus.

Au rezolvat problema prin încercări D-nii: N. Glușca, C. N. Avram, N. N. Aldea, N. N. Mihăileanu, I. Maevschi, A. E. Bădescu.

*EXERCIȚII

41. Se cere pătratul *aabaa*, unde *b* este și el pătrat.

N. A. Dobrogeanu.

R. Valorile lui *b* pot fi 4 sau 9, iar ale lui *a* sunt 0 sau 4, din care 0 dă numai soluțiuni formale. Rămân deci de cercetat numerele 44444 și 44944, din care numai $44944 = 212^2$.

42. Se cere pătratul de șase cifre *abcaca*, în care grupele *ab* și *ca* sunt numere prime, iar $c = 2b$.

N. A Dobrogeanu.

R. Din tabloul ultimelor două cifre cu care se poate termină un pătrat, deducem că $ca = 01, 29, 41, 61, 89$ şi ţinând seama de condiţiunea $c = 2b$, putem formă numerele:

$$100101,\ 912929,\ 124141,\ 136161,\ \text{şi}\ 948989.$$

Din acestea primul, al treilea şi al cincilea număr se elimină, deoarece grupul ab nu este prim, iar din cele două rămase numai $136161 = 369^2$.

43. Să se rezolve sistemul:

$$m \cdot \sqrt[\alpha]{a - x} = n \cdot \sqrt[\alpha]{y - x}.$$

$$\sqrt[\alpha]{y} - \sqrt[\alpha]{a - x} = \sqrt[\alpha]{y - x}.$$

(Generalizarea ex. 52, pag. 171 din „Curs complimentar de Algebră" de Manicatide *şi* Abramescu*).*

Mircea D. Motoc.

R. Se rezolvă prin sistemul format de prima ecuaţie ridicată la puterea α şi din ecuaţia care se formează înmulţind a doua ecuaţie cu m, adunând-o cu prima şi în urmă ridicând-o şi pe aceasta la puterea α.

Se găseşte:

$$X = \frac{m^\alpha \cdot a - n^\alpha \cdot Y}{m^\alpha - n^\alpha}$$

$$\therefore \quad Y = \frac{a \cdot m^\alpha \cdot (m+n)^\alpha}{n^\alpha \cdot (m+n)^\alpha - (m^\alpha - n^\alpha)\left[m^\alpha - (m+n)^\alpha\right]}$$

$$X = \frac{a \cdot m^\alpha \cdot \left[m^\alpha - (m+n)^\alpha\right]}{n^\alpha \cdot (m+n)^\alpha - (m^\alpha - n^\alpha)\left[m^\alpha - (m+n)^\alpha\right]}.$$

44. Să se determine valoarea lui a, pentru ca polinomul

$$f(x) = a(X^3 + 5) + X^2 + 4X + 1$$

să fie divizibil cu $X - 2$.

Mircea D. Motoc.

R. Condiţia este ca $f(2) = 0$, de unde deducem:

$$13a + 13 = 0$$

$$\therefore \quad a = -1.$$

Polinomul cerut este:

$$f(x) = -(X^3 - X^2 - 4X + 4).$$

Câtul va fi:

$$\varphi(x) = -X^2 - X + 2.$$

45. In orice triunghiu există relaţiile:

$$\sum \frac{\sin^n A}{a^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+2} R^{n+1}} \cdot \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{S}$$

$$\sum \frac{\sin^n A}{a^{n-1}} = \frac{p}{2^{n-1} R^n}$$

$$\sum \frac{\sin^n A}{a^{n-2}} = \frac{1}{2^{n-1} R^n} (p^2 - r^2 - 4Rr).$$

AL. A. ROŞU.

R. Se ţine seama de formulele

$$abc = 4RS \quad ; \quad \sin A = \frac{2S'}{bc}$$

şi respectiv de relaţiile

$$\Sigma\, ab = p^2 + r^2 + 4Rr$$

$$\Sigma\, a = 2p$$

$$\Sigma\, a^2 = 2(p^2 - r^2 - 4Rr).$$

46. In orice triunghiu există relaţiunea

$$\sum \frac{\sin^n A}{a^{n-3}} = \frac{p}{2^{n-1} R^n} (p^2 - 3r^2 - 6Rr).$$

AL. A. ROŞU.

R. Se ţine seamă de relaţiile

$$\sin A = \frac{2S}{bc} \quad ; \quad abc = 4Rpr \quad \text{şi} \quad \Sigma\, a^3 = 2p(p^2 - 3r^2 - 6Rr).$$

47. Să se verifice identitatea

$$\frac{2^n h_a^n h_b^n h_c^n (\operatorname{cotg} C - \operatorname{cotg} B)^{2n}}{(b^2 - c^2)^{2n}} \Sigma\, k_a^n = \Sigma \sin^n (B - C),$$

k_a , k_b , k_c fiind porţiuni din laturile triunghiului ABC cuprinse în cercul EULER, iar celelalte notări fiind cele cunoscute.

N. N. VELICESCU.

R. Este generalizarea exerciţiului 96, G. M. XXXIV pag. 438. Se folosesc aceleaşi relaţii ca la locul citat, având însă grija să ridicăm la puterea a n_a .

PROBLEME PROPUSE

4011. Care pot fi resturile împărțirii prin 137 a numerelor de forma 111 . . . 11?

AL. A. ROȘU.

*4012. Căutăm într'o tabelă de cuburi perfecte să vedem dacă un număr dat *ab* de două cifre se găsește printre numerele formate din ultimile două cifre ale cuburilor.

Cercetând până la cubul numărului N și găsind că până aci nici una din terminațiile de două cifre ale cuburilor nu este numărul dat *ab* — se întreabă dacă vom da peste acest caz la cubul unui număr superior lui N?

Aplicație pentru $ab = 94$ și $N = 134$.

CĂPITAN GH. NICULESCU.

*4013. Dacă A este un număr prim de forma $2(2p+1)+1$, iar $B = A^n$, să se arate că suma

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \, C_B^{B-i} \, k^{i-1} \, A^{i-1}$$

se divide cu B, oricare ar fi k, C_i^j fiind simbolul combinărilor a i obiecte luate câte j.

N. BOTEA.

4014. Porțiunile din înălțimi cuprinse între ortocentru și laturi fiind h'_a, h'_b, h'_c, celelalte notații fiind cele obișnuite într'un triunghiu oarecare, să se arate că avem:

$$S = \sqrt{\frac{R\,(h'_a\, h_b\, h_c + h'_b\, h_c\, h_a + h'_c\, h_a\, h_b)}{2}}.$$

NIC. DONCIU.

4015. Fie triunghiul ABC. Un cerc ce trece prin B și C, taie pe AB în C_1 iar pe AC în B_1. Dreptele BB_1 și CC_1 se taie în I, iar dreapta AI taie pe BC în A_1. Cercul $A_1B_1C_1$ taie a doua oară laturile triunghiului ABC în A_2, B_2, C_2.

Să se demonstreze că

1°) $\overline{B_2C_2}$ este paralelă cu $\overline{BC}$;

2°) A_2 este mijlocul laturei $\overline{BC}$.

S.-LT. I. G. ZAMFIRESCU.

*4016. Un amestec de aur și argint în greutate de 2350 gr. are forma unui con circular drept, cu înălțimea de 5 cm. Dacă cufundăm conul în apă, el pierde 148 grame din greutate. Să se afle raza bazei conului și cantitățile de aur și argint din amestec, știind că densitatea aurului este 19,25, iar a argintului 10,47.

M. GHERMĂNESCU.

4017. Să se studieze natura şi semnul rădăcinilor ecuaţiei

$$\lambda^2 (\lambda^2 x^2 - 2x + 1)^2 - (1 - x)(1 - \lambda^2 x)^3 = 0,$$

λ fiind un parametru pozitiv mai mic ca unu.

Ca o consecinţă să se discute ecuaţia

$$\cos\theta + \frac{\lambda (\cos 2\theta + \lambda^2 \sin^4\theta)}{(1 - \lambda^2 \sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

TH. ANGHELUŢĂ.

*4018 Intr'o Cosmografie, tipărită în limba română, citesc următoarele:

«Illustrulu autoru allu *Astronomiei populare* raportă că un professoru din Angers, voindu să dea elevilor sei uă idee sensibilă de mărimea pământului, comparată la acea-a sorelui, 'şi imagină să numere grăunţele de grâu conţinute într'unu litru: şi a aflatu 10000. Prin urmare 14 decalitruri trebuie să conţină 1400000. Turnându apoi într'uă tavă 14 decalitruri de grâu, arrătă eleviloru unu singure grăunte; şi le zise: «lată pământul şi (apoi aretându-le tava) iată sorele».

Care e minimum diametrului tavei, ştiind că grâul uscat se poate menţine sub un unghiu de 30^0?

I. IONESCU.

*4019. Oricare ar fi α şi β să se arate că avem:

$$\frac{\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta) + \operatorname{tg}^2(\alpha-\beta) + 2}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta) + \operatorname{tg}(\alpha-\beta)} - 2\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$$

$$\frac{\operatorname{cotg}^2(\alpha+\beta) + \operatorname{cotg}^2(\alpha-\beta) + 2}{\operatorname{cotg}(\alpha+\beta) + \operatorname{cotg}(\alpha-\beta)} + 2\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}.$$

N. C.

4020. Se dă unghiul xOy. Fie A şi B puncte fixe pe Ox; C un punct fix şi D un punct mobil pe Oy; E intersecţia dreptelor AC, BD; F al patrulea vârf al paralelogramului AEFB; H şi G intersecţiile dreptei OH cu AD şi cu BD. Să se găsiască locul geometric al punctelor F, G, H.

COL. GH. BUICLIU.

ERATĂ. La Nota 22 din acest an să se rectifice patratul lui 5316 astfel: 28259856.

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAŢIUNII" SIBIIU

BOLETIN MATEMATICO

FUNDAT ÎN ANUL 1928. — ABONAMENT ANUAL: 400 LEI

BOLETIN MATEMATICO ELEMENTAL

FUNDAT ÎN ANUL 1930. — ABONAMENT ANUAL: 125 LEI

Director: Dr. B. I. BAIDAFF

SUNT CELE MAI IMPORTANTE PUBLICAȚIUNI PERIODICE MATEMATICE DIN AMERICA DE SUD

SE PRIMESC ABONAMENTE PENTRU ANUL AL IV (IAN. — DEC. 1931)

ABONAMENTELE ȘI CORESPONDENȚA SE VOR TRIMITE LA ADRESA:

BOLETIN MATEMATICO, Belgrano 975, Buenos-Aires, Rep. Argentina.

Dela Ianuarie 1928 până în Octomvrie 1930 s'au publicat articole și note dela Domnii:

F. Anguita, B. I. Baidaff, F. Cernuschi, Cl. C. Dassen, A. Garrigos și **J. Tschlek,** Buenos-Aires (Rep. Argentina), **J. Hartmann,** La Plata (Rep. Argentina), **C. Dieulefait** și **E. Natale,** Rosario (Rep. Argentina), **O. Márquez,** Salta (Rep. Argentina), **M. A. Basoco** și **E. T. Bell,** Pasadena (California), **M. Krawtchouk** și **N. Kryloff,** Chiev (U. R. S. S.), **J. Gonzalez Perera, S. José** (Uruguay), **B. Jekhowsky,** Bordo (Francia), **W. Lewitzky,** Lemberg (Polonia), **O. J. Ramler,** Washington (Statele Unite) **J. Shohat,** Ann Arbor (Statele Unite), **D. M. J. Sommerville,** Wellington (N. Zelandia), **V. Thébault,** Le Mans (Francia), **O. Szász,** Frankfurt a. M. (Alemania), **G. Vivanti,** Milano (Italia), **J. R. Wilton,** Adelaida (Sud Australia).

Articolele, notele şi problemele însemnate cu * se referă la matematicile elementare (cursul de liceu).

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Aldea N. N. (3929, 92, 95, 4003); *Antoniu Eleonora* (3986, 89, 95); *Bădescu E. A.* (3995); *Berol A. H.* (3982); *Călinescu A. Gab.* (3995); *Cârstoiu D. I.* (3995, 4008); *Chiţu M.* (3996, 97); *Constantinescu C.* (3995); *Cristeanu Alice* (3965); *David Moise* (3988); *Dobrogeanu N. A.* (3961, 65, 82); *Dumitraşcu Romeo* (3837, 928, 37, 38, 39, 68, P); *Epuran A. I.* (3982, 92, 95); *Florescu D.* (3996); *Florescu M. U.* (P); *Gabriel A.* (3991); *Georgescu C.* (P); *Gheorghiu C. A.* (1424, 2789, 3019, 636, 749, 809, 908, 40, 59, 75, 80, P); *Ghiuţă V. Gh.* (3995, 96); *Ionescu-Biss P. H.* (2643, 3992, 95, 96, 4003); *Ionescu Gh. Mircea* (3966, 92, 95); *Ioniţă I. M.* (3982); *Lupescu G. C.* (3815, 24, 37, 40, 937, 82); *Mărgărit Faţe* (3968, 81, R); *Mihăileanu N. N.* (3571, 704, 28, 47, 58, 818, 27, 39, 40, 79, 88, 89, 937, 71, 84, 96, 4003, 08, E, N, P, R); *Naforniţă I. C.* (3982, 85, 95); *Parepeanu I.* (2643, 3922, 37, 66, 4003, 08, N); *Patraulea N.* (3984, 97); *Popa G. I.* (3982); *Popescu N. C.* (3929); *Puta Traian* (3992, 95, 97); *Roşca St. G.* (3968, 82, 88, 90, 95); *Roşu Al.* (2222, 3477); *Russu D. C.* (3937, 88, 92, 95, 96); *Şova C. I.* (3968, E); *Stan I. D.* (3980); *Stoica D. A.* (3951, 82, 91); *Truţescu Ştefania* (3968, 89, 95); *Vasu V.* (3997); *Zarda I.* (3975, 77); *Zamfirescu Gh. I. Subloc.* (3855, 75, 969, 97, 4009).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac deasemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani completi broşaţi cu preţul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX şi XXI care se vând cu preţul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV şi XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecţiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediţia IV revăzută şi adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).

Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamaţiunile şi cererile pentru cărţi din bibiioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Regiei Publice Comerciale «Monitorul Oficial şi Imprimeriile Statului», B-dul Elisabeta 29, Bucureşti I.

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii şi orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie şi expediţie, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călugei 23, Bucureşti 4.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXVI.
NUMĂRUL 10. — IUNIE 1931.

BIBLIOTECA CENTRALĂ
„ASOCIAȚIUNII"
SIBIIU

SUMARUL

1. Généralisation de théorèmes de Neuberg et de Gob . . . . . *V. Thébault.*
2. Dimensionarea unui aerodrom . . *Căpitan Gh. Niculescu.*
3. Note matematice: 39 — 40.
4. Chestiuni de examen.
5. Bibliografie.
6. Cereri: 206.
7. Diverse.
8. Probleme rezolvate: 1377, 3666, 3912, 3951, 3953, 3991.
9. Exerciţii: 48 — 51.
10. Probleme propuse: 4021 — 4030.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

REGIA M. O., IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1931

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXXVI se compune din D-nii: Colonel **Gh. I. Liteanu** dela Marele Stat Major al Armatei; **G. A. Nichifor**, Doctor în Matematici, Conferenţiar la Universitatea din Bucureşti; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Regiei Publice Comerciale «Monitorul Oficial şi Imprimeriile Statului», Cassier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui Inginer-Şef GH. ILIESCU, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 310, 33, 55, 64, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 82, 553, 87, 650, 79, 711, 29, 53, 64, 807, 76, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 53, 82, 405, 22, 30, 39, 56, 66, 77, 502, 03, 45, 56, 77, 80, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 65, 84, 92, 95, 709, 13, 17, 35, 58, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 56, 3005, 45, 69, 81, 127, 50, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 07, 08, 09, 10, 16, 18, 20, 50, 61, 79, 405, 12, 24, 25, 45, 72, 89, 91, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 20, 22, 25, 27, 32, 46, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 94, 99, 700, 03, 20, 33, 36, 80, 84, 93, 99, 804, 08, 10, 29, 35, 36, 44, 45, 48, 53, 64, 70, 80, 96, 98, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 33, 44, 49, 50, 72, 73, 76, 83, 87, 94, 99, 4000, 10, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procurà dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

GÉNÉRALISATION DE THÉORÈMES DE NEUBERG ET DE GOB [1])

1. Généralisant des propositions de I. NEUBERG et de GOB, M. R. GOORMAGHTIGH a obtenu ce beau théorème :

Soient P_a, P_b, P_c, *les projections arthogonales d'un point* P *du plan sur les côtés* $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, *d'un triangle,* A_1, B_1, C_1, *les milieux de ces côtés. L'on porte sur* BA *et* CA *les segments* AM_a, AN_a, *respectivement doubles de* B_1P_b *et* C_1P_c, *sur* CB *et* AB *les segments* BM_b *et* BN_b *respectivement doubles de* C_1P_c *et* A_1P_a, *sur* AC *et* BC *les segments* CM_c *et* CN_c *respectivement doubles de* A_1P_a *et* C_1P_b. *Les droites* M_aN_a, M_bN_b, M_cN_c, *sont alors perpendiculaires au diamètre* OP *du cercle circonscrit à* ABC *et les cercles* AM_aN_a, BM_bN_b, CM_cN_c, *ont même rayon égal à* OP [2]).

La démonstration de M. R. GOORMAGHTIGH repose sur les propriétés de l'orthopôle. Nous nous proposons de donner un énoncé plus général au moyen de raisonnements directs ou en faisant intervenir des vecteurs portés par les côtés du triangle ABC.

Pour fixer les idées, nous supposons que le sens positif de circulation sur le périmètre du triangle est BCA.

2. Soient deux points *quelconques* P et Q du plan du triangle ABC, P_a, P_b, P_c, Q_a, Q_b, Q_c, leurs projections orthogonales sur les côtés BC, CA, AB.

Considérons le segment $\overline{AM}$ équipollent au segment $\overline{PQ}$, M' le symétrique de M par rapport à la bissertrice intérieure de l'angle A du triangle, γ et γ', β et β', les projections orthogonales de M et M' sur les directions CA et AB.

D'après une propriété fondamentale des droites isogonales AM et AM', les droites $\beta'\gamma'$ et $\beta\gamma$ sont respectivement perpendiculaires aux directions AM et AM'.

Si l'on observe que les segments $\overline{A\beta}$ et $\overline{A\gamma}$ sont équipollents aux segments $\overline{P_bQ_b}$ et $\overline{P_cQ_c}$ et que $A\beta' = A\beta$, $A\gamma' = A\gamma$, la droite de direction $\beta'\gamma'$ est perpendiculaire à la droite PQ. De plus, le cercle circonscrit au triangle $A\beta'\gamma'$ a pour diamètre $AM' = AM = PQ$.

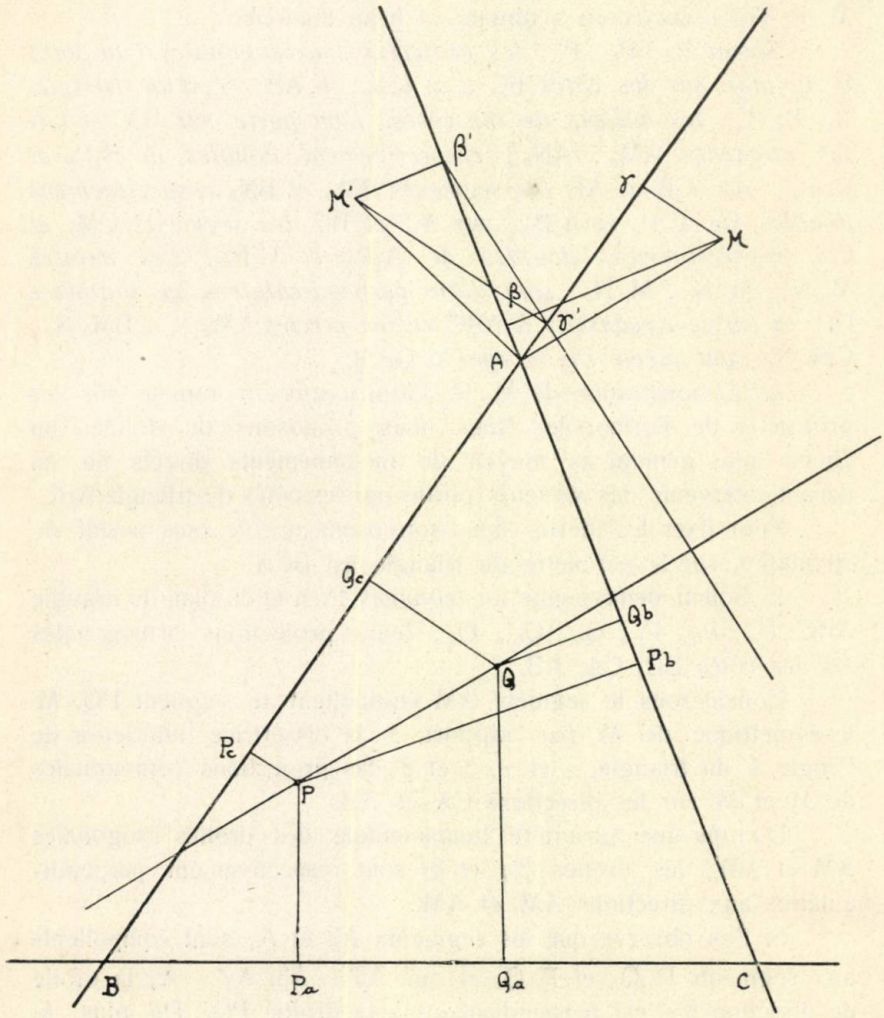
1) Nous avons déjà considéré cette question, vol. XXXV—41.

2) MATHESIS 1928—22.

Si, au lieu des segments $\overline{A\beta'}$ et $\overline{A\gamma'}$, on considère des segments

$$\overline{A\beta''} = k \cdot \overline{A\beta'} = k \cdot \overline{P_c Q_c} \; ; \; \overline{A\gamma''} = k \cdot \overline{A\gamma'} = k \cdot \overline{P_b Q_b},$$

la droite $\beta''\gamma''$, parallèle à $\beta'\gamma'$, est encore perpendiculaire à la



direction PQ et le cercle circonscrit au triangle $A\beta''\gamma''$ a pour diamètre $k \cdot PQ$.

Ou peut donc énoncer ce théorème tout à fait général:

Soient P_a, P_b, P_c *et* Q_a, Q_b, Q_c, *les projections orthogonales de deux points quelconques* P *et* Q *du plan sur les côtés* BC, CA, AB, *d'un triangle. L'on porte sur* BA *et* CA *les segments* AM_a *et* AN_a, *égaux respectivement à k.* $P_b Q_b$ *et k.* $P_c Q_c$, *sur les côtés* CB *et* AB *les segments* BM_b *et* BN_b *égaux respectivement à k.* $P_c Q_c$ *et k.* $P_a Q_a$, *sur* AC *et* BC *les segments* CM_c, CN_c, *égaux respectivement à k.* $P_a Q_a$ *et k.* $P_b Q_b$. *Les droites* $M_a N_a$, $M_b N_b$, $M_c N_c$, *sont perpendiculaires à la direction* PQ *et les cercles circonscrits aux triangles* $AM_a N_a$, $BM_b N_b$, $CM_c N_c$, *ont même diamètre égal à k.* PQ.

3. A partir de Q, portons sur les directions QQ_a, QQ_b, QQ_c, vers les côtés BC, CA, AB, des vecteurs respectivement proportionnels à, (mod. *k*),

$$\overline{BC}\ ,\ (b - k.\ \overline{P_c Q_c})\ ,\ (-c + k.\ \overline{P_b Q_b})\ ,$$

qui déterminent par leurs extrémités un triangle $A_2B_2C_2$.

La somme des moments des trois vecteurs $\overline{QA_2}$, $\overline{QB_2}$, $\overline{QC_2}$, par rapport au point P, a pour expression, en posant θ_a, θ_b, θ_c, les angles de même sens que la direction PQ détermine avec BC, CA, AB respectivement, et en remarquant que

$$\overline{P_a Q_a} = PQ\cos\theta_a\ ,\ \overline{P_b Q_b} = PQ\cos\theta_b\ ,\ \overline{P_c Q_c} = PQ\cos\theta_c\ ,$$

$$a.\ \overline{P_a Q_a} + (b - k.\overline{P_c Q_c})\ \overline{P_b Q_b} + (-c + k.\ \overline{P_b Q_b})\ \overline{P_c Q_c}\ ;$$

soit

$$a.\ P_aQ_a + b.\ P_bQ_b + c.\ P_cQ_c = PQ\ (a\cos\theta_a + b\cos\theta_b + c\cos\theta_c) = 0.$$

la résultante des trois vecteurs QA_2, QB_2, QC_2, *passe donc par le point* P.

Si l'on considère maintenant des vecteurs égaux à $\overline{QA_2}$, $\overline{QB_2}$, $\overline{QC_2}$, portés respectivement par BC, CA, AB, (axes respectivement perpendiculaires à QA_2, QB_2, QC_2), ces vecteurs forment un couple ou bien leur résultante est perpendiculaire à PQ.

Si l'on marque donc sur les côtés AB et CA du triangle, (vers B et C), des points M_a et N_a tels que

$$AM_a = k.\ \overline{P_b Q_b}\ ,\ AN_a = k.\ \overline{P_c Q_c}\ ,$$

la droite $M_a N_a$ *est perpendiculaire à* PQ.

Remarque. La résultante des vecteurs $\overline{QA_2}$, $\overline{QB_2}$, $\overline{QC_2}$, est aussi déterminée, en grandeur et direction, par le segment $QI = 3Qg$, g étant le centre de gravité du triangle $A_2B_2C_2$.

4. Dans le triangle $AM_a N_a$, par exemple, on a cette relation :

$$\overline{M_a N_a^2} = \overline{AM_a^2} + \overline{AN_a^2} - 2AM_a \cdot AN_a \cos A,$$

qui conduit à la suivante, puisque $\theta_b - \theta_c = A$, $\overline{M_a N_a^2} : k^2 \overline{PQ^2} = \cos^2\theta_b + \cos^2\theta_c - 2\cos\theta_b \cos\theta_c \cos(\theta_b - \theta_c)$.

En développant, il vient, après quelques réductions

$$\overline{M_a N_a^2} : k^2 \overline{PQ} = \cos^2\theta_b (1 - \cos^2\theta_c) + \cos^2\theta_c (1 - \cos^2\theta_b) - 2 \sin\theta_b \sin\theta_c \cos\theta_b \cos\theta_c$$

$$= \cos^2\theta_b \sin^2\theta_c + \cos^2\theta_c \sin^2\theta_b - 2\sin\theta_b \sin\theta_c \cos\theta_b \cos\theta_c$$

$$= \sin^2(\theta_b - \theta_c) = \sin^2 A ;$$

d'où

$$M_a N_a : \sin A = k \cdot PQ .$$

Ces raisonnements justifient à nouveau notre théorème général du second paragraphe.

V. THÉBAULT
Le Mans (France).

*DIMENSIONAREA UNUI AERODROM

Dimensionarea unui aerodrom este în funcţie de terenul pe care îl avem la dispoziţie, totuşi nu trebuie să situăm un aerodrom acolo unde nişte condiţiuni minime în dimensionare nu sunt îndeplinite.

In cele ce urmează voiu da expresiunea dimensiunilor principale: lungimea şi lăţimea aerodromului, expresiuni ce le cred a fi personale. In calculul nostru nu vom ţine seama şi de porţiunile de teren necesare instalaţiilor, adică ne vom referi numai la dimensiunile «utile» ale terenului de lucru.

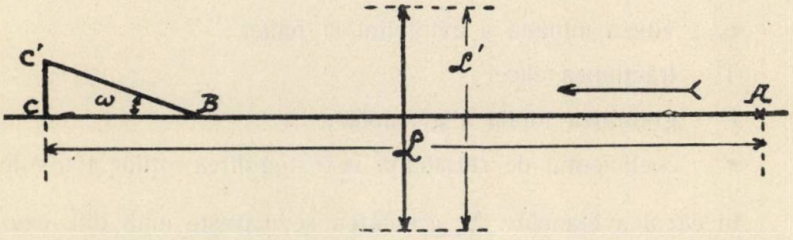
Lungimea Aerodromului. Vom calculà această lungime în ipoteza că aerodromul trebuie să servească şi la decolarea avioanelor ce rulează cel mai mult şi acestea sunt avioanele speciale de record de distanţă.

Am puteà porni calculul şi dela ipoteza că un astfel de avion imediat după ce a decolat este forţat să se întoarcă la aterisare, obţinând în acest mod o dimensionare mai mare, însă această ipoteză nu îmbrăţişează un caz normal.

Vom însemnà pentru uşurinţă cu Σ avionul special de record de distanţă şi cu N un avion normal, obicinuit.

Rămânând la prima ipoteză, să presupunem că avionul Σ a plecat dintr'un punct A şi că în punctul B el a decolat. Presupunem, încă, că în punctul C, — situat pe prelungirea lui AB — există o instalaţie de aerodrom, de înălţime $CC' = h$, lucru ce practic se verifică în mod curent.

Lungimea BC trebuie să fie de aşa natură ca avionul, care a



părăsit pământul în B şi a început urcarea cu un unghi ω, să poată trece peste vârful C' al instalaţiei.

Insemnând $AB = L_0$, lungimea minimă de dat aerodromului este:

$$L \text{ min} = L_0 + \frac{h}{\text{tg}\omega} .$$

Practic însă nu se pleacă din A, adică chiar dela capul pistei; apoi nu e deloc prudent a se trece razant deasupra lui C'. Referindu-ne la L_0, un avion nu decolează niciodată în mod matematic pe aceeaşi lungime L_0, căci intervine într'o mare măsură şi abilitatea pilotului — celelalte date — avion, natura terenului, starea atmosferică, admiţându-le constante.

Aceste considerațiuni ne conduc a scrie lungimea practică a aerodromului și anume:

$$L = m L_0 + n \frac{h}{\operatorname{tg}\omega} + p. \qquad \begin{pmatrix} m > 1 \\ n > 1 \end{pmatrix}$$

Să definim acum pe L_0. Pentru aceasta vom scrie lungimea de decolaj [1]) pentru un avion N și în cazul vântului de viteză zero, căci în acest caz lungimea de decolaj este mai mare. Insemnând cu l_0 această lungime, avem:

$$l_0 = 1,\ 1 \frac{v_m^2}{2g} \cdot \frac{1}{\frac{T}{P} - r} \qquad (1)$$

unde s'a însemnat cu:

v_m , viteza minimă a avionului în palier;

T , tracțiunea elicei;

P , greutatea totală a avionului;

r , coeficientul de rezistență la rostogolirea roților avionului.

In cazul avioanelor Σ, greutatea se mărește mult din cauza încărcăturii de combustibil și pe de altă parte bechia rămâne mai mult timp pe pământ. Pentru a păstrà formula (1),— care are o anumită preciziune, — vom vedeà în ce proporții a crescut greutatea P a unui avion inițial N, pentru a obține un avion Σ de greutate P', numai prin transformări interioare și adăugire de rezervoare sau cu modificări exterioare cel mult la fuzelaj. Un avion Σ trebuie pregătit a parcurge în linie dreaptă o distanță D km., cel puțin egală cu aceea a ultimului record. Admițând că avionul are pe traiect o viteză medie V, durata parcursului va fi:

$$D : V = t \text{ ore.}$$

1) A. Brissot: Etude sur les longueurs de roulement au décollage et à l'atterrissage des avions. Bulletin technique No. 59, Mai 1929. S. T. Aé.

Insemnând cu W puterea motorului, iar cu **c** consumația în combustibil pe cal și pe oră, combustibilul necesar pentru a parcurge distanța D este:

$$C = c \,.\, t \,.\, W \text{ kg.}$$

Să însemnăm încă cu Δ raportul:

$$\frac{P'}{W} = \Delta \text{ kg./cal.}$$

In acest caz ne mai rămâne disponibilă pentru avion, motor, personal, etc., o greutate de:

$$\Delta \,.\, W - c \,.\, t \,.\, W = W\,(\Delta - c \,.\, t) \text{ kg.}$$

greutate (fără combustibil) ce o vom considerà comună ambelor avioane N și Σ; adică pentru a simplifică lucrurile, neglijăm greutatea rezervoarelor suplimentare ce le are Σ, fapt permis de scopul ce-l urmărim.

Afectând atunci avionului normal N un număr $t_1 < t$ de ore de sbor, putem scrie imediat greutatea totală P a acestuia:

$$P = W\,(\Delta - c \,.\, t) + c \,.\, t_1 \,.\, W = W\,[\Delta - c\,(t - t_1)].$$

Vom face acum pe deoparte raportul:

$$\frac{P'}{P} = \frac{\Delta \,.\, W}{W\,[\Delta - c\,(t - t_1)]} = \frac{\Delta}{\Delta - c\,(t - t_1)} = A$$

iar pe de alta vom pune expresia lungimii de decolare l_0 sub altă formă:

$$l_0 = k'' \cdot \frac{P}{W} \left(\frac{P}{S}\right)^{3/2} \frac{1}{(C_{z_\beta})^{3/2}}$$

unde:

k'' , este o constantă
S , suprafața totală purtătoare
C_{z_β}, coeficientul de portanță al avionului pentru unghiul de atac β, corespunzător maximului de portanță.

Ținând seamă de cele până aci spuse, vom scrie atunci:

$$L_0 = k'' \frac{P \,.\, A}{W} \left(\frac{P \,.\, A}{S}\right)^{3/2} \cdot \frac{1}{(C_{z_\beta})^{3/2}}$$

şi deducem imediat:

$$L_0 = A^{5/2}\, l_0$$

valoare, pe care o vom introduce în expresiunea lungimii aerodromului pentru a obţine final, în metri:

$$L = m \frac{\Delta^{5/2} \cdot l_0}{[\Delta - c\,(t - t_1)]^{5/2}} + n \frac{h}{\mathrm{tg}\omega} + p \qquad (2)$$

expresie ce primeşte în sânul ei toate aproximaţiile specifice lui l_0 şi pe acelea ce le-am întâlnit în cursul stabilirii ei, dar totuşi necesară în lipsa uneia riguros matematică, ce nu se poate stabili. In forma ce i-am dat-o prezintă avantajul de a recurge la datele unui avion N, totdeauna la îndemână.

Lărgimea Aerodromului. Acestei dimensiuni îi vom cere să asigure aterisarea unui avion N. Vom considera deci lungimea de aterisare, pentru un astfel de avion, şi tot pentru vânt de viteză zero. Ea este dată de:

$$l'_0 = \frac{v_m^2}{2g} \cdot \frac{L \dfrac{1}{\lambda} \cdot \dfrac{Rx_\alpha}{Rz_\alpha}}{\dfrac{Rx_\alpha}{Rz_\alpha} - \lambda} = K \frac{v_m^2}{2g}$$

însemnând cu K factorul al doilea. Afară de notaţiunile deja definite, mai notăm:

Cu α, unghiul de atac al avionului rulând cu bechia pe pământ (aterisaj pe trei puncte).

Cu λ, coeficientul total de rezistenţă (rostogolirea roţilor + frecarea bechiei).

Pentru avioanele N avem:

$$0{,}15 < \frac{Rx_\alpha}{Rz_\alpha} < 0{,}25 \quad \text{şi} \quad 0{,}05 < \lambda < 0{,}1$$

şi cu aceste date rezultă pentru K o variaţie:

$$6 < K < 11$$

ceeace ne conduce a scrie :

$$6\frac{v_m^2}{2g} < l'_0 < 11\frac{v_m^2}{2g} \cdot \qquad (3)$$

Inlocuind acum şi în expresia lui l_0 variaţia raportului T : P, care pentru avioanele N variază între limitele :

$$0{,}15 < T : P < 0{,}35$$

obţinem :

$$3{,}5\frac{v_m^2}{2g} < l_0 < 7\frac{v_m^2}{2g} \cdot \qquad (4)$$

Inegalităţile (3) şi (4) dau posibilitatea unei relaţiuni între l_0 şi l_0 — şi aceasta o facem pentru a aveà şi în expresiunea lărgimii aerodromului tot pe l_0.— In scopul unei bune siguranţe vom luà cazul cel mai defavorabil, adică aterisarea se va face pe o lungime maximă, iar decolarea pe una minimă. In asemenea condiţiuni, raportul este :

$$\frac{l'_0}{l_0} = \frac{11}{3{,}5} \cong 3.$$

Insemnând cu L' lărgimea utilă a aerodromului şi păstrând pe m, n, p, h şi ω aceiaşi, vom aveà :

$$L' = 3m\, l_0 + n\frac{h}{\operatorname{tg}\omega} + p \qquad (5)$$

şi astfel expresiunile (2) şi (5) sunt condiţiunile minime ce ne-am propus să stabilim. Pentru a le aplicà trebuiesc precizaţi coeficienţii de siguranţă m şi n şi cantitatea p. Experienţa arată că acelaşi avion, pus în aceleaşi condiţiuni, decolează între limitele 0,8 ➔ 1,2 l_0. Coeficientul de suprasiguranţă n îl luăm de natură de a puteà prelungì decolarea cu o distanţă de cel puţin : $2\frac{h}{\operatorname{tg}\omega} - \varepsilon$, atunci când ea nu s'a putut produce pe distanţa dată de termenul prim al ex-

presiunei (2). Cantitatea p, minimă, este dată de lungimea avionului Σ, plus o distanță de 20 — 25 metri spre a ferì de norii de praf ridicați de suflul elicei, localul ce s'ar găsì înapoia punctului A.

Vom luà deci:

$$m = 1{,}2 \quad ; \quad n = 3 \quad ; \quad p = 100m.$$

In ambele expresiuni (2) și (5) intră l_0, care se va calculà după formula (1), luând $r = 0{,}03$ ceva superior coeficientului admis pentru automobilele rulând cu bandaje pneumatice pe un balast umed.

Pentru moment, recordul de distanță în linie dreaptă nedepășind 9000 km. și având în vedere că la ora actuală nici aerodroamele principale nu au ajuns la gradul de dezvoltare în a utilizà pentru instalații întreg perimetrul aerodromului și că în realitate toată distanța $n \frac{h}{\operatorname{tg}\omega}$ prezintă o siguranță — se va puteà luà $D = 9000$ km.

Restul de date sunt cele normal cunoscute în Aeronautică.

NOTE MATEMATICE

*39. *Numărul indicatorilor unui număr dat.*

In Gazeta Matematică No. 3 anul XXXVI se arată, făcând să intervie o funcție $I(x)$, că dacă:

1) $$\varphi_n(N) = 1$$

unde n este numărul ordinului indicator, și

$$N = a^{\alpha} . b^{\beta} . c^{\gamma} \ldots$$

atunci:

2) $$n \geqslant \alpha + \beta + \gamma + \ldots$$

In cele ce urmează voiu arătà acelaș lucru, însă fără să mai introducem o altă funcție auxiliară, căruia să-i studiem în prealabil proprietățile, ci direct, servindu-mă numai de cunoștinți elementare de aritmetică.

In adevăr, fie:

$$N = a^{\alpha}$$

a fiind prim absolut, atunci avem succesiv:

$$\varphi_1(N) = a^{\alpha-1} . A_1 \quad \text{unde} \quad A_1 = a - 1$$

$$\varphi_2(N) = a^{\alpha-2} . A_2 \quad \text{„} \quad A_2 = (a-1)\,\varphi(A_1)$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\varphi_\alpha(N) = A_\alpha \quad \text{unde} \quad A_\alpha = (a-1)\,\varphi(A_{\alpha-1}).$$

Pentru $A_\alpha = 1$ avem $n = \alpha$

„ $A_\alpha > 1$ „ $n > \alpha$.

Fie acum:

$$N = a^\alpha . b^\beta . c^\gamma \ldots$$

unde $a < b < c < \ldots$ sunt factorii primi ai lui N şi ne propunem să vedem cum se are n faţă de exponenţii: α, β, γ, ...

Să presupunem că toţi factorii primi îşi micşorează valorile şi devin egali cu primul, adică cu a, atunci vom aveà:

$$N' = a^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots}$$

Ori în baza celor de mai sus:

$$\varphi_{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}(N') = A_{\alpha+\beta+\gamma+\cdots}$$

unde

$$A_{\alpha+\beta+\gamma+\ldots} = (a-1)\,\varphi(A_{\alpha+\beta+\gamma+\ldots-1}).$$

Deci:

pentru $A_{\alpha+\beta+\gamma+\ldots} = 1$ avem $n = \alpha$

„ $A_{\alpha+\beta+\gamma+\ldots} > 1$ „ $n > \alpha$.

In consecinţă, pentru:

$$N = a^\alpha . b^\beta . c^\gamma \ldots$$

vom aveà:

$$n \geqslant \alpha + \beta + \gamma + \ldots$$

Altă cale.

Fie:

$$N = a^\alpha . b^\beta . c^\gamma \ldots$$

unde $a < b < c < \ldots$ sunt factorii primi a lui N. Să presupunem că $a > 2$, atunci avem succesiv:

$$\varphi_1(N) = a^{\alpha-1} \cdot b^{\beta-1} \cdot c^{\gamma-1} \ldots (a-1)(b-1)(c-1)\ldots$$

Dar numerile $a, b, c, \ldots$ fiind prime, înseamnă că:

$$(a-1)(b-1)(c-1)\ldots = 2^p \cdot A_1$$

unde p este mai mare sau cel puţin egal cu numărul factorilor primi ai lui N, iar A_1 este impar, având printre factorii lui primi, poate, şi pe a sau b, sau c, etc....

Mai departe avem:

$$\varphi_2(N) = 2^{2p+q_1-1} \cdot a^{\alpha-2} \cdot b^{\beta-2} \cdot c^{\gamma-2} \ldots A_2$$

unde q_1 este puterea lui 2 ce ar rezultă din indicarea factorilor lui A_1 diferiţi de $a, b, c, \ldots$ iar A_2 poate cuprinde şi unul sau mai mulţi din factorii $a, b, c, \ldots$ la diferite puteri.

$$\varphi_3(N) = 2^{3p+q_1+q_2-2} \cdot a^{\alpha-3} \cdot b^{\beta-3} \cdot c^{\gamma-3} \ldots A_3.$$

Presupunem acum că ε ar fi cel mai mic exponent din factorii primi ai lui N, atunci:

$$3) \quad \varphi_\varepsilon(N) = 2^{\varepsilon \cdot p + \Sigma q - \varepsilon + 1} \cdot a^{\alpha-\varepsilon} \cdot b^{\beta-\varepsilon} \cdot c^{\gamma-\varepsilon} \ldots A_\varepsilon$$

unde:

$$\Sigma q = q_1 + q_2 + \ldots + q_\varepsilon.$$

In produsul:

$$a^{\alpha-\varepsilon} \cdot b^{\beta-\varepsilon} \cdot c^{\gamma-\varepsilon} \ldots$$

dispare factorul prim e^ε, care devine $e^{\varepsilon-\varepsilon} = 1$. Atunci vom aveà:

$$(a-1)(b-1)(c-1)\ldots = M \cdot 2^{p-k_\varepsilon}$$

unde k_ε reprezintă puterea lui 2 cuprinsă in $(e-1)$.

Să presupunem apoi că imediat după ε, în ordinea mărimei, ar fi λ, atunci:

$$4) \quad \varphi_\lambda(N) = 2^{\varepsilon \cdot p + \lambda(p-k_\varepsilon) + \Sigma q - \varepsilon - \lambda + 1} \cdot a^{\alpha-\lambda} \cdot b^{\beta-\lambda} \cdot c^{\gamma-\lambda} \ldots A_\lambda$$

unde:

$$\Sigma q = q_1 + q_2 + \ldots + q_\lambda.$$

Să presupunem mai departe că după λ ar veni ρ, atunci avem:

5) $$\varphi_\rho(N) = 2^{\varepsilon.p+\lambda(p-k_\varepsilon)+\rho(p-k_\lambda)+\Sigma q-\varepsilon-\lambda-\rho+1} \times a^{\alpha-\rho}.b^{\beta-\rho}.c^{\gamma-\rho}\ldots A_\rho.$$

In sfârşit, să presupunem că cel mai mare exponent al factorilor primi ai lui N, ar fi ω, atunci avem:

6) $$\varphi_\omega(N) = 2^x . A_\omega$$

unde:

$$x = \varepsilon.p + \lambda(p - k_\varepsilon) + \rho(p - k_\lambda) + \ldots + \omega + \Sigma q - \Sigma\alpha + 1$$

având:

$$\begin{cases} \Sigma q = q_1 + q_2 + \ldots + q_\omega \\ \Sigma\alpha = \alpha + \beta + \gamma \ldots \end{cases}.$$

Dar continuând operaţiunea de indicare, ajungem la relaţia:

7) $$\varphi_{\Sigma\alpha}(N) = 2^y . A_{\Sigma\alpha}$$

unde avem:

$$y = x - (\Sigma\alpha - \omega) = x - \Sigma\alpha + \omega$$

$$y = \varepsilon(p-1) + \lambda(p - k_\varepsilon - 1) + \rho(p - k_\lambda - 1) + \ldots\ldots \ldots + \omega + \Sigma q - \Sigma\alpha + 1$$

iar:

$$\Sigma q = q_1 + q_2 + \ldots + q_{\Sigma\alpha}.$$

Dar cum p este mai mare sau cel mult egal cu numărul factorilor primi ai lui N, înseamnă că vom aveà:

$$y \geqslant 0 \qquad \text{şi} \qquad A_{\Sigma\alpha} \geqslant 1$$

prin urmare:

8) $$n \geqslant \alpha + \beta + \gamma + \ldots$$

Dacă presupunem acum că $a = 2$, atunci

8) $$\varphi_{\Sigma\alpha}(N) = 2^{y+\alpha-1} . A_{\Sigma\alpha}$$

unde p (care intră în expresia lui y) este mai mare sau cel mult egal cu numărul factorilor primi ai lui N, mai puţin unul.

Ori cum:

$$y + \alpha - 1 \geqslant 0 \qquad \text{şi} \qquad A_{\Sigma\alpha} \geqslant 1$$

înseamnă că:

$$n \geqslant \alpha + \beta + \gamma + \ldots$$

Observaţiuni:

1) Pentru cazul când:

$$N = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta}$$

aplicând formula 8) găsim:

$$\omega = \beta \qquad \text{şi} \qquad \Sigma q = 0$$

deci:

$$y = \beta - (\alpha + \beta) + 1 = -\alpha + 1$$

Apoi:

$$y + \alpha - 1 = 0 \qquad \text{deci} \qquad n = \alpha + \beta.$$

2) Din formulele 7) şi 8) se mai deduce că:

9) $n \geqslant y + \Sigma\,\alpha$ pentru $a > 2$

sau

10) $n \geqslant y + \alpha + \Sigma\alpha - 1$ pentru $a = 2$

apropiindu-ne astfel cu limita inferioară şi mai mult de n.

3) Pentru a da o condiţie mai uşor de reţinut lui n, voi admite că:

$$p = m \qquad \text{şi} \qquad \Sigma q = 0$$

unde m este numărul factorilor primi ai lui N; iar pentru simplificarea notării, voiu admite că exponenţii factorilor primi ai lui N, scrişi în ordinea mărimei, sunt:

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots < \alpha_m.$$

Atunci vom aveà:

11)
$$\begin{cases} n \geqslant \sum_{1}^{m} \alpha_i\,(m - i + 1) + 1 & \text{pentru } a > 2 \\ n \geqslant \sum_{1}^{m} \alpha_i\,(m - i) + \alpha_k & \text{„ } a = 2 \end{cases}$$

unde α_k este exponentul lui 2.

Limita superioară a lui n.

Iată trei soluțiuni aproximative, cari ne dau indicațiuni asupra limitei superioare pe care nu o poate depăși n, dat de relația:

$$\varphi_n(N) = 1.$$

1) Vom căuta o putere z a lui 2, astfel încât 2^z să fie imediat superior lui N. Atunci:

12) $$n \leqslant z.$$

2) Presupunem:

$$N = a^{\alpha} . b^{\beta} . c^{\gamma} \ldots l^{\lambda}.$$

Fie l cel mai mare factor prim, atunci vom egală toți factorii primi ai lui N cu l și avem:

$$N < l^{\Sigma\alpha}.$$

Căutăm apoi un număr t astfel încât să avem:

$$l = 2^t + 1$$

t putând fi chiar zecimal. Căutând apoi pe n astfel încât:

$$\varphi_n[(2^t + 1)^{\Sigma\alpha}] = 1$$

ca și cum $(2^t + 1)$ ar fi prim, vom găsi că:

13) $$n \leqslant (t - 1)\,\Sigma\alpha + 1$$

și se ia, bine înțeles, din membrul al doilea numai partea întreagă.

3) Căutăm diverse puteri ale lui 2 astfel încât să avem:

$$a = 2^{\alpha_1} \quad ; \quad b = 2^{\beta_1} \quad ; \quad c = 2^{\gamma_1} \; ; \ldots$$

întregi ori fracționare. Atunci

$$N = 2^{\alpha . \alpha_1} . 2^{\beta . \beta_1} . 2^{\gamma . \gamma_1} \ldots = 2^{\Sigma\alpha . \alpha_1}.$$

Ori în acest caz avem:

14) $$n \leqslant \Sigma\alpha . \alpha_1$$

luând deasemenea din membrul al doilea tot numai partea întreagă.

Observațiune:

Dacă:

$$N = a^{\alpha} . b^{\beta} . c^{\gamma} \ldots$$

şi dacă:

$$a = 2^{\alpha_1} \quad \text{atunci} \quad \alpha_1 = \frac{\log.a}{0{,}30103}$$

$$b = 2^{\beta_1} \quad \text{„} \quad \beta_1 = \frac{\log.b}{0{,}30103}$$

$$c = 2^{\gamma_1} \quad \text{„} \quad \gamma_1 = \frac{\log.c}{0.30103} .$$

. . . . . .

. . . . . .

Atunci:

$$N = 2^{\frac{\Sigma\alpha . \log.\ a}{0{,}30103}} .$$

Deci:

15) $$n \leqslant \frac{\Sigma\ (\alpha\ .\ \log.a)}{0{,}30103} .$$

Paranteza din membrul al doilea fiind luată ca valoare întreagă cu aproximaţie în plus.

Deci conchidem că:

$$\Sigma\alpha \leqslant n \leqslant \frac{\Sigma\ (\alpha\ .\ \log.a)}{0{,}30103} .$$

Căpitan I. Linteş.

40. *Asupra patratelor perfecte de 7 şi 8 cifre.*

Următoarele patrate conţin grupe de cifre identice:

a) două grupe de 3 şi 4 cifre:

$$\overline{3334}^2 = 11115556$$
$$\overline{3335}^2 = 11122225$$
$$\overline{6665}^2 = 44422225$$
$$\overline{6667}^2 = 44448889$$

b) două grupe de 2 şi 4 cifre:

$$\overline{2357}^2 = 5555449$$
$$\overline{8165}^2 = 66667225$$

c) două grupe de 3 cifre:

$$\overline{3332}^2 = 11102224$$
$$\overline{3333}^2 = 11108889$$
$$\overline{5771}^2 = 33304441$$
$$\overline{6666}^2 = 44435556$$
$$\overline{6668}^2 = 44462224$$
$$\overline{9995}^2 = 99900025$$
$$\overline{9997}^2 = 99940009$$
$$\overline{9998}^2 = 99960004$$
$$\overline{9999}^2 = 99980001$$

VIRGILIU C. POPESCU
(Toulouse).

CHESTIUNI DE EXAMEN

SEMINARUL DE MATEMATICI-CLUJ

Sesiunea Octomvrie 1930

Anul Preparator

ALGEBRA

1°. Să se rezolve sistemul:

$$x^2 - y^2 = 3$$
$$xy = -2$$

dând toate soluţiile, atât cele reale cât şi cele complexe.

2°. Să se calculeze:

$$\sqrt{3 - 4i}.$$

3°. Să se figureze curbele:

$$x^2 - y^2 = 3$$
$$xy = -2$$

şi să se deà coordonatele punctelor de intersecţie.

4°. Cari sunt punctele din plan cari satisfac inegalităţile:

$$x^2 - y^2 > 3$$

$$xy < -2.$$

GEOMETRIA

1°. Se consideră triunghiul ABC în care $\overline{AB}$ este fixă, iar $\overline{AC}$ constantă şi egală cu b. Fie D intersecţia dreptei $\overline{CB}$ cu bisectoarea unghiului A.

I. Să se arate că raportul BD : DC = const.

II. Fie E intersecţia lui $\overline{AB}$ cu paralela din D la $\overline{AC}$. Să se arate că punctul E este fix pe $\overline{AB}$.

III. Să se arate că locul lui D este un cerc cu centrul în E.

ARITMETICĂ ŞI TRIGONOMETRIE

I. O persoană cumpără o casă cu a 7-a parte din averea ei; cu un sfert din rest mai cumpără o vie. Din suma de bani care-i mai rămâne face două părţi proporţionale cu numerile 5 şi 6. Partea primă o pune la o bancă cu 6% şi partea a doua o pune la o altă bancă cu 9%. Are astfel dela bani depuşi un venit anual de 604.800 lei. Să se calculeze:

1°. Ce avere a avut la început aceà persoană.

2°. Care au fost sumele depuse la bănci.

3°. Cât a costat casa şi cât a costat via.

II. Zidul, care înconjoară un basin circular, are la partea superioară forma următoare: Conturul exterior este un exagon regulat cu latura de 2 m. Conturul interior e un cerc cu raza egală cu a 6-a parte din raza cercului circumscris conturului exterior. Să se calculeze suprafaţa părţii superioare a acestui zid.

ANUL I

ALGEBRA SUPERIOARĂ

Proba teoretică

1°. Să se găsească numărul de rădăcini reale ale ecuaţiei:

$$(x^2 + x - 2)\left[1 + \operatorname{Lg}\frac{x-1}{x-2}\right] - 3(2x+1) = 0.$$

2°. Să se găsească condiţia pe care trebuie să o îndeplinească coeficienţii p, q, r, s ai ecuaţiei:

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

pentruca ecuaţia să aibă două rădăcini egale şi de semn contrar.

a) Condiția fiind satisfăcută să se rezolve ecuația.

b) Să se aplice la ecuația:

$$x^4 + x^3 + qx^2 - 2x - 2 = 0.$$

Proba practică

Să se determine coeficienții α și β din ecuația:

$$x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + x - 2 = 0$$

știind că suma patratelor și suma cuburilor rădăcinilor ecuației $S_2 = 3$, $S_3 = -7$. α și β formând un sistem de ecuații, să se figureze curbele reprezentate de aceste ecuații (α, β coordonate curente din plan).

MATEMATICI GENERALE

Proba teoretică

1°. Să se găsească familia de curbe a căror subnormală exprimată în coordonate carteziene ortogonale este egală cu:

$$\frac{y^2 + 2x^3y}{x}.$$

Să se determine curba specială care trece prin punctul P(−1,8) precum și valorile extreme ale acestei curbe.

2°. Să se determine valoarea parametrului α astfel ca dreptele D_1 reprezentată prin ecuația:

$$(1) \qquad \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{-1}$$

și D_2 reprezentată sub forma

$$(2) \qquad \begin{aligned} 2x + \alpha y + 3z &= 1 \\ \alpha x - 5y + 2z &= 2 \end{aligned}$$

să se întâlnească.

Proba practică

1°. Să se calculeze valoarea integralei

$$\int_1^3 \frac{2x^2 + 3x + 9}{x^4 + 3x^3 + 3x^2}\, dx.$$

2°. Să se determine în radiani mărimea unghiului format de dreapta:

$$(D) \qquad \begin{aligned} 5x - 12y &= 3 \\ z + 1 &= 0 \end{aligned}$$

cu planul P

$$2x - 4y + 4z = 7.$$

GEOMETRIA DESCRIPTIVĂ

Intersecţia unui con cu un cilindru: Cadrul are dimensiunile, orizontală şi verticală de 270 mm. şi 420 mm. Linia de pământ este paralelă cu marginea orizontală la distanţa de 180 mm. de sus în jos Conul are baza în planul orizontal, cercul O cu centrul în O (45, 77, 0) şi raza 42 mm. iar vârful S (220, 35, 78). Cilindrul are baza în planul orizontal cercul O_1 cu centrul în O_1 (170, 135, 0) şi raza 40 mm. Generatoarele cilindrului în proecţie orizontală sunt paralele cu tangenta din dreapta dusă din punctul (170, 0, 0) la cercul O_1 iar generatoarele în vertical fac cu linia de pământ unghiul α astfel că $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

GEOMETRIA ANALITICĂ

Proba teoretică

Se dă o coardă oarecare AB pe o conică cu centru. In mijlocul ei M se ridică perpendiculara pe această coardă, care tae axele respectiv în punctele K şi S.

1°. Să se dovedească, că raportul $\frac{MK}{MS}$ e constant.

2°. Cazul tangentei. Să se deà o demonstraţie directă.

3°. Fie o coardă AB pe parabolă. In mijlocul ei M se ridică o perpendiculară pe această coardă care taie axa în K. Fie S proecţia lui M pe axă. Să se dovedească, că SK e constant.

4°. Cazul tangentei. Să se deà o demonstraţie directă.

Proba practică

Să se determine natura cuadricei:

$$x^2 + y^2 + z^2 + xz + 6x + 2z - 3 = 0.$$

Să se scrie ecuaţia redusă şi să se calculeze coordonatele centrului

ANUL II

MECANICĂ RAŢIONALĂ

PARTEA I

1°. Fie patrulaterul articulat ABCD; $\overline{AB} = \overline{AD}$; $\overline{CB} = \overline{CD}$. Punctele A şi B sunt fixe, dreapta $\overline{CD}$ este atunci mobilă şi presupunem că antrenează

cu ea un plan mobil care alunecă pe planul figurei. Se cere baza mişcării epicicloidale; se vor luà coordonate polare, Bx fiind axa polară şi B polul. Punându-se totodată pentru prescurtare:

$$AB = AD = a$$

$$CB = CD = b.$$

2°. Un mobil obligat de-a rămâne pe un cerc de centru O şi de rază r este atras de diametrul Oy al cercului cu o forţă: $F = -k^2mx$, m fiind massa mobilului. Mişcarea incepe din poziţia M_0 cu o viteză $v_0 = kr$. Se cere:

a) Expresiile coordonatelor x şi y ale mobilului în funcţie de timp.

b) Valoarea presiunii punctului pe cerc în funcţie de unghiul α.

ASTRONOMIA

Proba teoretică

1°. Să se găsească formulele cari dau coordonatele ecliptice λ, β, ale unei planete şi longitudinea ei în orbita l, când se cunosc coordonatele ecuatoriale ale planetei, α, δ; oblicitatea eclipticei ω şi longitudinea Ω a nodului ascendent al orbitei acestei planete.

2°. Să se aplice aceste formule la calcularea coordonatelor ecliptice ale centrului lunei în momentul când coordonatele ei ecuatoriale sunt: $\alpha = 15^h\,54^m\,2^s\,6$, $\delta = -16°39'35''9$ ştiind că $\omega = 23°27'10''6$ şi $\Omega = 101°50'10''$

Proba practică

Considerându-se pământul ca un elipsoid de revoluţie se dau cele două semiaxe ale pământului:

$a = 6377{,}398$ Km. $\qquad b = 6356{,}080$ Km.

şi latitudinea geografică a Clujului $46°41'16''$ şi se cere să se găsească:

1°. Latitudinea geocentrică a Clujului.

2°. Distanţa dela Cluj până la centrul pământului.

ANALIZA MATEMATICĂ

PARTEA I

Proba teoretică

Să se calculeze integrala:

$$I_n = \int \frac{x^3 dx}{(ax^4 + 2bx^2 + c)^n}$$

unde n e un număr întreg şi pozitiv şi $a \neq 0$.

Se vor considerà toate trei cazurile $b^2-ac>0$; $b^2-ac<0$; $b^2-ac=0$; în cazul $b^2-ac\neq 0$ se va găsi o formulă de recurență care leagă integralele I_n și I_{n-1}. Să se aplice această formulă la calculul integralei:

$$\int \frac{x^3dx}{(x^4+2x^2-3)^2}.$$

Proba practică

Se dă o curbă reprezentată parametric:

$$x=f(t)\ ;\ y=g(t)\ ;\ z=h(t)$$

să se calculeze determinantul:

$$D=\begin{vmatrix} x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \\ x^{IV} & y^{IV} & z^{IV} \end{vmatrix}$$

în funcție de R, T și s. Aplicație la elicea $x=\cos t\ ;\ y=\sin t\ ;\ z=t$.

ANUL III

MECANICA RAȚIONALĂ

PARTEA II

1°. Să se demonstreze că în loc de cele trei condiții de echilibru:

$$\Sigma X=0\ ;\ \Sigma Y=0\ ;\ \Sigma(xY-yX)=0$$

putem scrie ecuația a treia și alte două ecuații analoage referitoare la momentele în raport de două puncte din plan care să nu fie în linie dreaptă cu originea sistemului de axe coordonate.

2°. Să se determine mișcarea unui punct greu obligat de-a rămâne într'un plan care se'nvârtește cu o mișcare uniformă în jurul unui ax vertical

Să se calculeze și acțiunea planului asupra mobilului.

ANALIZA MATEMATICĂ

PARTEA II

Proba teoretică

Să se integreze ecuația:

$$x(y^3-2x^3)\frac{\partial z}{\partial x}-y(x^3-2y^3)\frac{\partial z}{\partial x}=9(x^3-y^3)z.$$

Proba practică

1°. Să se integreze ecuaţia diferenţială:

$$12x^3y''' - 25x^2y'' + 28xy' - 6y = 0.$$

2°. Integrala generală Y a ecuaţiei precedente conţine trei constante arbitrare.

Să se elimine aceste constante între Y ; Y′ ; Y″ ; Y‴.

TEORIA FUNCŢIUNILOR

Proba teoretică

1°. Să se construiască cercul definit de:

$$(C) \qquad \left|\frac{z-i}{z+i}\right| = \sqrt{2}.$$

2_0. Se consideră funcţiunea de variabilă complexă:

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + z^2 + 1}$$

să se găsească polurile acestei funcţiuni din interiorul cercului (C).

3°. Să se desvolte în seria TAYLOR funcţiunea $f(z)$ în domeniul centrului cercului (C).

4°. Să se găsească valoarea integralei:

$$I = \int_{(C)} \frac{dz}{z^4 + z^2 + 1}.$$

Proba practică

Să se calculeze integrala:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2 (x^2+4)}.$$

GEOMETRIA INFINITEZIMALĂ

Studiul geometric al cicloidei.

BIBLIOGRAFIE

Mathesis. Tomul XLV. No. 4. Aprilie 1931. Gembloux. Asupra curbelor în spaţiu care sunt elice de două conuri şi elice cilindro-conice, de R. GOORMAGHTIGH. Desfăşuratele suprafeţelor W, de A. DELGLEIZE. Asupra mişcării unui punct material supus acţiunii unei forţe centrale, atractivă sau respingătoare, direct proporţională cu distanţa, de R. J. H. GERMAY.

Boletin del Seminario Matematico Argentino, publicat de J REY PASTOR. No. 7 Iulie 1930. Bibliografii, rezumate de şedinţe. Buenos-Aires 1931.

Journal de mathématiques élémentaires, publicat de H. VUIBERT. Anul 55. No. 15. Mai 1931. Paris.

Idem. No. 16 Maiu 1931.

J. BABINI. *Sobre el comportamento de las Funciones theta de* JACOBI *de argumento nulo en el contorno del circolo de convergencia.* Buenos-Aires 1930.

Şcoala Politecnică din Bucureşti. *Aniversarea a 75 ani de învăţământ tecnic în România, de 50 ani dela reorganizarea Şcoalei naţionale de poduri şi şosele, 10 ani dela înfiinţarea Şcoalei politecnice* I. Darea de seamă asupra învăţământului în Şcoala politecnică din Bucureşti de N. VASILESCU KARPEN. II. Istoricul învăţământului ingineriei în România până la înfiinţarea Şcoalelor politecnice, de I. IONESCU III. Tabloul absolvenţilor ingineri dela 1878 până azi. Bucureşti 1931.

Şcoala Politecnică „Regele Carol II". Lucrările personalului didactic expuse cu ocaziunea serbării dela 7 Maiu 1931. Bucureşti.

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Tonul CXI. Fascicola IV. Aprilie 1931. Buenos-Aires. Unghiurile şi rotaţiunile imaginare. Al treilea capitol de geometrie vectorială, de C. C. DASEN.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XXXVII. No. 4 Aprilie 1931. New York. Transformări funcţionale lineare în spaţii generale de T. H. HILDEBRANDT. Asupra zerorilor sumelor exponenţiale şi integralelor de R. E. LANGER. Tipuri de serii şi tipuri de sumabilităţi, C. N. MOORE. Factorabilitatea funcţiunilor numerice de E. T. BELL. Două tipuri de şiruri conexe, de P. M. SWINGLE. Cuadrilatere înscrise şi circumscrise unei cubice, de A. H. DIAMOND. Asupra unui tip de teoreme ilusorii privitoare la ecuaţiile nedeterminate superioare, de E. T. BELL. Soluţiuni parametrice asupra unor ecuaţii diofantice, de T. A PIERCE. Sume de patru sau mai multe valori ale lui $\alpha x^2 + \beta x$ pentru x intreg, de G. PALL. Grup generat de doi operatori ale căror patrate sunt invariante, de G. A. MILLER. Asupra unei probleme a lui N. ARONSZAJN şi unei axiome a lui R. L. MOORE, de L. ZIFFIN. Statistica unui şir de intervale închise, de F. H. MURRAY. Extensiunea unei teoreme a lui MAZURKIEWICZ, de R. L. WILDER. O proprietate a continumului similară cu connectivitatea locală, de W. A. WILSON. Asupra condiţiunii normă a lui WEDDERBURN pentru algebra ciclică, de A. A. ALBERT.

Bulletin Mathématique de la Société Roumaine de Sciences. Vol. 32 (2) Bucarest 1931. TRAJAN LALESCO par P. SERGESCO. Sur la distribution des propiété de voisinage des fonctions de variables réelles, par AL. FRODA. Le premier Congrès des mathématiciens roumains, par P. SERGESCO. Le cinquantenaire scientifique de M. D. EMMANUEL, par P. SERGESCO. Procese-Verbale.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XI. No. 3 Maiu 1931. Timişoara. O clasă de ecuaţiuni cu rădăcinile reale, de V. ALACI.

Boletin Matematico. Anul IV. No. 1. Martie 1931. Buenos-Aires. Reprezentarea grafică a unei clase de funcţiuni discontinui, de F. MONTERO BUSTAMANTE. Consideraţiuni didactice asupra unui caz particular al diviziunii polinoamelor, de S. J. PILLADO.

CERERI

206. Dau Anul XX din Gazeta Matematică în schimbul Anului XXV.
CAMIL MITESCU.

DIVERSE

Societatea română de ştiinţe, Secţiunea matematică, a ţinut şedinţă în seara zilei de 11 Maiu, când D-l AL. PANTAZI a făcut o comunicare asupra unor proprietăţi proiective ale familiilor de suprafeţe.

In seara zilei de 25 Maiu au făcut comunicări D-nii O. ONICESCU şi D. BARBILIAN.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1377. *La problema precedentă (1376) să se mai găsiască:* 1) *Locul proecţiunilor punctelor* D *şi* E *pe tangenta în* F *la cercul* C; 2) P′ *fiind proecţia lui* P *pe* AB, *locul intersecţiunei lui* PP′ *cu cercul de centru* P′ *şi rază* NB.

† I. S. TEODORESCU.

Soluţie dată de D-l U. M. FLORESCU.

Problema 1376, propusă de D-l N. PETRESCU-TIBERIU, a fost rezolvată la pagina 104 Vol. XVII şi are următorul enunţ:

Se dă un cerc fix O *cu diametrul* AB *şi un cerc variabil* C *cu centrul* A, *ce taie cercul* O *în* D *şi* E, *iar pe* AB *în punctul* F *în interiorul lui* O. *Paralela dusă prin* F *la* BE *taie pe* DE *în* N, *iar* AN *taie cercul* O *în* P. *Se cere:* 1. *Locul lui* M, *intersecţia lui* AN *cu* BE. 2. *Locul punctelor* T *şi* T′, *intersecţiile lui* AP *cu cercul de centru* A *şi de rază* PM.

S'a găsit că M descrie o strofoidă iar T şi T′ o cisoidă.

Pentru rezolvarea problemei 1377 iau ca axe de coordonate, diametrul AB şi tangenta în A la cercul O.

1. Fie H şi H′ proecţiile lui D şi F pe tangenta în F la cercul C şi R raza cercului O. Ecuaţia cercului O va fi

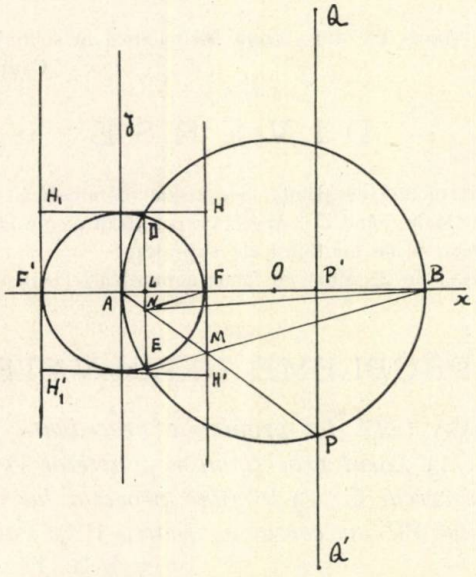
(1) $$x^2 + y^2 - 2Rx = 0$$

iar acea a cercului C

(2) $$x^2 + y^2 - \lambda^2 = 0$$

λ fiind un parametru variabil. Axul radical al cercurilor (1) şi (2) este

(3) $$x = \frac{\lambda^2}{2R}.$$



Din (1) şi (3) se găseşte că ecuaţiile dreptelor DH şi EH′ sunt

(4) $$y = \pm \frac{\lambda}{2R} \sqrt{4R^2 - \lambda^2}.$$

Eliminând acum pe λ între ecuaţiile (4) şi ecuaţia

(5) $$x = \lambda$$

a dreptei HH′, se găseşte că H H′ descriu curba

$$y = \pm \frac{x}{2R} \sqrt{4R^2 - x^2}$$

sau

(6) $$4R^2y^2 = x^2(4R^2 - x^2)$$

care este ecuația curbei *opt*, simetrică față de ambele axe. Pentru cazul problemei 1377 numai bucla interioară cercului O corespunde locului. Dacă însă se consideră și punctul F', diametral lui F în C, atunci bucla exterioară a curbei (6) va fi descrisă de punctele H_1, H'_1.

2. Fie Q, Q' intersecțiile lui PP' cu cercul de rază BN. Se vede că Q, Q' au ca abscisă pe AP' și ca ordonate pe $\pm$BN.

Voi calcula deci pe AP' și pe BN în funcție de un parametru pe care-l voi elimină apoi între valorile lui AP' și BN. Iau ca parametru variabil unghiul

$$\sphericalangle PAB = \omega.$$

Oserv că

$$\sphericalangle EAB = 2\omega$$

căci N fiind ortocentrul triunghiului isoscel EAF, dreapta ANP este înălțime și bisectoară. Insemn cu X , Y coordonatele lui Q și Q'.

Din triunghiul AP'P se scoate

$$X = AP' = AP\cos\omega$$

și ținând seamă că AP este catetă în APB

$$X = 2R\cos^2\omega. \tag{7}$$

Fie L proecția lui N pe AB. Din ALN avem

$$AN = \frac{AL}{\cos\omega} = \frac{AE\cos 2\omega}{\cos\omega} = \frac{2R\cos^2 2\omega}{\cos\omega}. \tag{8}$$

Inlocuind pe (8) în relația

$$\overline{NB}^2 = \overline{AN}^2 + \overline{AB}^2 - 2AN \cdot AB\cos\omega$$

se găsește după efectuarea calculelor

$$y^2 = \overline{NB}^2 = \frac{4R^2(\cos^4 2\omega + \cos^2\omega - 2\cos^2\omega \cdot \cos^2 2\omega)}{\cos^2\omega}.$$

$$\therefore \quad y^2 = \frac{4R^2[16\cos^8\omega - 40\cos^6\omega + 32\cos^4\omega - 9\cos^2\omega + 1]}{\cos^2\omega}. \tag{9}$$

Eliminând pe $\cos^2\omega$ între (7) și (9) se găsește că locul punctelor Q, Q' este curba

$$aXy^2 = 16X^4 - 40aX^3 + 32a^2X^2 - 9a^3X + a^4 \tag{10}$$

în care a este egal cu 2R.

Notă. D-l U. M. Florescu a însoțit soluția și de o construcție a curbei (10) în cazul $a = 1$.

PROBLEMA 3666. *Fie* (x_1 , x_2) , (x'_1 , x'_2) *rădăcinile reale, ale ecuaţiunilor*

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$a'x^2 + b'x + c' = 0.$$

Pe o axă cu originea în 0 se iau perechile de puncte (A , B) , (A′ , B′) *ale căror abscise sunt respectiv cele patru rădăcini. Să se stabilească relaţia de condiţie între coeficienţii celor două ecuaţiuni aşà în cât cercurile descrise pe* AB *şi* A′B *ca diametre să fie ortogonale.*

In ce caz aceste cercuri se taie sub un unghiu ω ?

COL. GH. BUICLIU.

Insemnând:

$$2p = \frac{b}{a} \quad ; \quad q = \frac{c}{a} \quad ; \quad 2p' = \frac{b'}{a'} \quad ; \quad q' = \frac{c'}{a'}$$

ecuaţiunile date devin

$$x^2 + 2px + q = 0$$
$$x^2 + 2p'x + q' = 0.$$

Pentru ca problema să aibă sens, trebuie ca rădăcinele să fie reale, deci:

(1) $$p^2 - q > 0$$

(2) $$p'^2 - q' > 0$$

eliminând prin aceste neegalităţi şi cazul rădăcinelor egale, care ar reduce pe amândouă cele două cercuri sau numai pe unul din ele la puncte. In fine, pentru ca cercurile să se taie cum prevede enunţul trebuie ca rădăcinele celor două ecuaţii să fie în anume ordine de mărime şi adică o rădăcină a unei ecuaţiuni trebuie să fie cuprinsă între rădăcinele celeilalte ecuaţiuni. Cu alte cuvinte trebuie să avem,

$$x_1 < x'_1 < x_2 < x'_2 \qquad \text{sau} \qquad x'_1 < x_1 < x'_2 < x_2 .$$

Condiţiunea pe care trebuie să o îndeplinească coeficienţi ecuaţiunilor, pentru a aveà una din aceste ordine de mărimi este:

(3) $$E = (q - q')^2 - 4(p - p')(p'q - pq') < 0$$

după cum s'a arătat la pagina 56 Vol. III *Gazeta Matematică* în articolele D-lui I. IONESCU, întitulate *Comparaţiunea rădăcinelor mai multor ecuaţiuni de gradul al doilea.*

Presupunem deci condițiunile (1), (2) și (3) îndeplinite și fie C, C' centrele cercurilor de diametru respectiv AB, A'B' și M intersecția acestor cercuri. Luând ca axe de coordonate OA și perpendiculara în O pe OA, avem:

$$A(x_1, 0) \;;\; B(x_2, 0) \;;\; A'(x'_1, 0) \;;\; B'(x'_2, 0)$$

$$C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, 0\right) \;;\; C'\left(\frac{x'_1 + x'_2}{2}, 0\right)$$

$$\overline{CB}^2 = \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_2\right)^2 = \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2$$

$$\overline{C'B'}^2 = \left(\frac{x'_1 + x'_2}{2} - x'_2\right)^2 = \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2$$

sau ținând seamă de relațiunile dintre rădăcinile și coeficienții une ecuațiuni, avem:

$$C(p, 0) \;;\; C'(p', 0)$$

$$\overline{CB}^2 = p^2 - q \;;\; \overline{C'B'}^2 = p'^2 - q'.$$

Cu acestea ecuațiunile cercurilor (AB) și (A'B') sunt respectiv:

(4) $$F(x, y) = x^2 + y^2 + 2px + q = 0$$

(5) $$f(x, y) = x^2 + y^2 + 2p'x + q' = 0.$$

Coeficienții unghiulari ai tangentelor în M la cele 2 cercuri sunt respectiv:

$$m_1 = -\frac{F'_x}{F'_y} \;;\; m_2 = -\frac{f'_x}{f'_y}.$$

Avem însă

$$F'_x = 2x + 2p \;;\; F'_y = 2y$$

$$f'_x = 2x + 2p' \;;\; f'_y = 2y.$$

Unghiul ω al tangentelor în M este dat de

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

sau înlocuind pe m_1, m_2 prin valorile lor și făcând calculele

(6) $$\operatorname{tg}\omega = \frac{(p - p')\, y}{x^2 + y^2 + (p + p')\, x}.$$

Eliminând pe x , y între (4), (5) şi (6) se găseşte relaţia de condiţie între coeficienţi şi tgω.

Adunând ecuaţiunile (4), (5) membru cu membru se găseşte

$$x^2 + y^2 + (p + p')\, x = -\frac{q + q'}{2}$$

care introdus în (6) dă:

$$(7) \qquad y = \frac{[2pp' - (q + q')]\ \mathrm{tg}\omega}{2(p - p')}.$$

Acum rezolvând pe (4) şi (5) în raport cu $x^2 + y^2$ şi cu x, avem:

$$(8) \qquad x^2 + y^2 = \frac{p'q - pq'}{p - p'}$$

$$(9) \qquad x = \frac{q' - q}{2(p - p')}.$$

Se ridică (7) şi (9) la patrat. Rezultatele se adună şi se egalează cu (8). După efectuarea reducerilor posibile, se găseşte:

$$(10) \quad (q - q')^2 + [2pp' - (q + q')]^2\, \mathrm{tg}^2\omega = 4(p - p')(p'q - pq')$$

care este condiţiunea ca cercurile de diametru AB şi A'B' să se taie sub unghiul ω.

Zic că această condiţiune este *necesară şi suficientă*, (atunci când rădăcinile sunt reale). In adevăr (10) se mai scrie

$$(q - q')^2 - 4(p - p')(p'q - pq') = -[2pp' - (q + q')]^2\, \mathrm{tg}^2\omega.$$

Membrul II fiind negativ şi membrul I este negativ, deci dacă cercurile fac unghiul ω ele se taie căci avem relaţiunea (3) necesară şi suficientă pentru ca rădăcinele ecuaţiunilor date să fie în ordinea de mărime:

$$x_1 < x'_1 < x_2 < x'_2 \qquad \text{sau} \qquad x'_1 < x_1 < x'_2 < x_2.$$

Dacă se ţine seamă de notaţiile din articolele citate ale D-lui I. Ionescu, atunci condiţia (10) devine:

$$E + S^2\, \mathrm{tg}^2\omega = 0 \qquad \text{sau} \qquad E\, \mathrm{cotg}^2\omega + S^2 = 0$$

unde E şi S sunt respectiv *eliminantul* şi *separantul* ecuaţiunilor date.

Când cercurile sunt ortogonale, $\cot g\omega$ este nul iar condiția (10) devine:

$$2pp' = q + q' \tag{11}$$

sau

$$S = 0.$$

In concluzie, *cercurile de diametru* AA', BB' *există și sunt ortogonale când avem condițiile* (1), (2) *și* (11), *ele fac unghiul* ω *când avem condițiile* (1), (2) *și* (10).

Dacă revenim la coeficienții inițiali condițiile găsite devin:

$$4(a'c-ac')^2+[bb'-2(a'c+ac')]^2\operatorname{tg}^2\omega=(a'b-ab')(b'c-bc') \tag{12}$$

$$bb' = 2(a'c + ac'). \tag{13}$$

Notă. 1°. Am propus problema 3666 ca o aplicațiune la articolul citat al D-lui I. Ionescu. Nici unul din corespondenții anunțați pe copertă, nu au căutat să găsiască condițiunile necesare și suficiente.

2°. D-l A. I. Stan (Sub-Locotenent în Regimentnl 32 Obuziere, Cluj) este singurul care a găsit condițiunile exacte sub formele (12) și (13). D-sa nu a dovedit că aceste condiții sunt suficiente.

3°. Au considerat că unghiul cercurilor se măsoară prin unghiul CMC' pe care-l fac razele ce duc la M și deci au ajuns la rezultate eronate dar au rezolvat problema exact în cazul particular al cercurilor ortogonale D-nii: A. V. Anghelescu, C. Coșniță, Nic. I. Dinulescu, Gh. Th. Gheorghiu, P. I. Ghișoiu, N. P. Onizabă, A. Pârvu, Al. Al. Roșu și J. N. Vâlceanu.

4°. Celelalte soluțiuni primite sunt complet eronate.

Gh. B.

PROBLEMA 3912. *Se cere bipatratul de 21 cifre:*

$$abbbccbbdefbghecacfca$$

în care:

$$*)\ egf = (af)^2 \quad \text{și} \quad ccb + a = (ea)^2.$$

H. P. Ionescu.

Soluție dată de D-nii: N. V. Aldea (Student, București), I. G. Popa (Liceul Oltenița), C. Gh. Lupescu (Liceul Roman).

*) Rectificată.

Bipatratul neavând ultimele patru cifre identice, nu se divide cu 10 şi deci a nu este 0. Pe de altă parte, $(af)^2$ fiind de trei cifre, $af \leqslant 31$. Deci a ar putea fi 1, 2 sau 3. Insă a termină bipatratul dat şi deci nu poate fi 2 sau 3. El e deci 1.

In acest caz ultima egalitate dată devine:

$$ccb + 1 = (10e + 1)^2 = 100e^2 + 20e + 1,$$

$$ccb = 10e\ (10e + 2).$$

Partea a doua a egalităţii se divide cu 10, deci $b = 0$. Inlocuind găsim:

$$11c = e\ (10e + 2).$$

Cum e e de o cifră, nu se poate divide cu 11, care e prim. Deci paranteza se va divide cu 11. Ea se poate scrie $[11e - (e - 2)]$, de unde se vede că nu se poate divide cu 11 decât dacă $e = 2$, căci e nu poate trece de 9. Inlocuind găsim $c = 4$.

In aceste condiţiuni prima din egalităţile date devine:

$$2gf = (1f)^2$$

De aci se vede că $1f$ este cuprins între rădăcinile lui 200 şi 299, adică între 14 şi 18. Egalitatea de mai sus ar puteà deci fi:

$$15^2 = 225\ ,\ 16^2 = 256\ ,\ 17^2 = 289.$$

Observăm că la nici unul din acestea, cifra unimilor rădăcinii nu se găseşte la mijlocul patratului, cum se dăduse în enunţul problemei, şi de aci nevoia de o rectificare. Se vede că la primele două coincid unimile rădăcinii cu ale patratului, ceeace ne conduce la rectificarea făcută în enunţul de mai sus. Primul patrat nu convine, căci are cifre identice pe când enunţul le dă diferite. Deci rămâne numai patratul 256, căci ultimul nu are nici o cifră identică cu a rădăcinei. Aşadar $f = 6$, $g = 5$.

Am găsit dar până acum:

$$a = 1,\ b = 0,\ c = 4,\ e = 2,\ f = 6,\ g = 5.$$

Bipatratul este dar de forma:

$$10004400d2605h2414641.$$

Cele mai mici valori pentru d şi h, sunt deci 3 şi cele mai mari 9; iar după acestea 7 şi 8. Deci dacă n este rădăcina bipatratului, vom avea:

$$100044003260572414641 \leqslant n^4 \leqslant 100044009260582414641,$$

BIBLIOTECA CENTRALA a „ASOCIAŢIUNII" SIBIIU

şi extrăgând de două ori rădăcina patrată găsim:

$$100010 < n < 100012.$$

Reese de acì că nu am puteà aveà decât $n = 100011$. Acesta ne dă:

$$n^4 = 100044007260532414641,$$

la care distribuţia cifrelor corespunde cu cele găsite până acum şi de unde se vede că $d = 7$ şi $h = 3$ sunt diferite de toate celelalte. Bipatratul de mai sus este dar singura soluţie a problemei.

Au demonstrat că problema aşà cum a fost propusă e insolubilă, D-nii: P. I. Chişoiu, A. C. Constantinescu.

PROBLEMA 3951. *Inmulţindu-se un număr cu 29,364 s'a găsit la produs 154073,84064. Proba nu reuşeşte. Verificându-se calculele se constată că produsele parţiale au fost bine calculate, că primul, al doilea şi ultimul produs parţial au fost puse la locul lor, dar că din eroare, produsele parţiale date de 3 şi de 9 au fost scrise unul sub altul.*

Se cere deînmulţitul şi produsul exact. Să se sporiască apoi cât se poate de puţin produsul fals dat, aşa ca problema să fie posibilă dar să nu mai fie ertă.

I. Ionescu.

Soluţie dată de D-l Alexandru D. Stoica (Clasa III, Liceul «Marele Voevod Mihaiu», Bucureşti).

A înmulţi un număr cu 29,364 înseamnă a-l înmulţi pe rând cu 20, cu 9, cu 0,3, cu 0,06 şi cu 0,004 şi a face suma produselor obţinute. Dacă am scris produsul parţial prin 9 sub al lui 3, însemnează că am înmulţit cu $20 + 0{,}9 + 0{,}3 + 0{,}06 + 0{,}004 = 21{,}264$, iar dacă am scris produsul prin 3 sub al lui 9, atunci de fapt am înmulţit cu $20 + 9 + 3 + 0{,}06 + 0{,}004 = 32{,}064$. Inmulţitorul în aceste două cazuri ar fi:

$154073{,}84064 : 21{,}264 = 7245{,}76$ (împărţirea e exactă)

$154073{,}84064 : 32{,}064 = 4805{,}1971 \ldots .$

Impărţirea trebuind să fie exactă, a doua soluţie nu e admisibilă. Rămâne dar că deînmulţitul căutat este *7245,76*.

Produsul adevărat este:

$$7245{,}76 \times 29{,}364 = 212764{,}49664.$$

In cazul când şi împărţirea prin 32,064 ar fi fost exactă, am fi avut două soluţiuni şi nu am mai fi ştiut care a fost adevăratul deînmulţit cu care s'a făcut calculul. Problema ar fi fost incertă. Să vedem care este cel mai mic număr superior produsului falş dat, care ar conduce la două soluţiuni. Acest produs trebuind să se împartă cu 21,264 şi cu 32,064, va trebui să se împartă cu cel mai mic comun multiplu al lor. Dar avem:

$$21264 = 2^4 \cdot 3 \cdot 443, \text{ şi } 32064 = 2^6 \cdot 3 \cdot 167.$$

Cel mai mic comun multiplu al lor este $2^6 \cdot 3 \cdot 167 \cdot 443 = 32064 \times 433 = 142064352$. Deci cel mai mic comun multiplu al ţiilor zecimale 32,064 şi 21,264 este 14204,352. Să împărţim produsul falş dat cu acest număr. Găsim:

$$154073{,}84064 : 14204{,}352 = 10{,}84 \ldots .$$

Cel mai mic număr care împărţit cu 14204,352, peste produsul falş dat, este evident $14204{,}352 \times 10{,}85 = 154117{,}21920$. Acesta întrece produsul falş cu:

$$154117{,}21920 - 154073{,}84064 = 43{,}37856.$$

Acesta este sporul căutat. In adevăr, pentru produsul 154117,21920 luat ca produs falş, problema admite două soluţii:

$154117{,}21920 : 21{,}264 = 7247{,}80$ şi $15117{,}21920 : 32{,}064 = 4806{,}55$,

şi nu mai e certă.

Au rezolvat prima parte, observând că problema ar puteà comportà două soluţii, D-nii N. Mihaileanu, C. D. Rusu,

Au rezolvat prima parte, dând numai soluţia 7245,76, D-nii I. Parepeanu, E. Mereută, A. M. Butan, C. Gh. Lupescu, R. N. Dumitraşcu.

D-l C. D. Rusu a dat o soluţie, a primei părţi, prin metoda imitării calculelor numerice, determinând cifră cu cifră a deînmulţitului. Soluţiunea pe această cale e prea lungă. Autorul ei dealtfel a dat primei părţi şi o soluţie simplă.

Chestiunea incertitudii a dat loc la fel de fel de ipoteze, soluţia adevărată însă a dat-o numai D-l Al. D. Stoica.

PROBLEMA 3953. *Fie patru puncte* A, B, C, D. *Se duc cercurile circumscrise la fiecare din triunghiurile formate de aceste puncte luate câte trei şi se înseamnă cu* O_a, O_b, O_c, O_d *centrele lor. Să se arate că perechile de puncte* A, O_a; B, O_b; C, O_c; D, O_d *sunt isogonale respectiv faţă de triunghiurile* $O_b O_c O_d$, $O_c O_a O_d$, $O_a O_b O_d$, $O_a O_b O_c$.

D. BARBILIAN.

Soluţie dată de D-nii: N. ALDEA, TRAIAN BUTA, ADRIAN C. GHEORGHIU, VASILE VASU, ION ZARDA.

Unghiul $\sphericalangle O_d O_a O_b$ îşi are laturile respectiv perpendiculare pe ale unghiului $\sphericalangle$ BCD, în virtutea faptului că linia centrelor a două cercuri e perpendiculară pe coarda comună. Aşa dar

$$\sphericalangle O_d O_a O_b = \sphericalangle \text{BCD}.$$

Pe de altă parte, $O_c O_a$ e linia centrelor a două cercuri cari se taie după coarda comună DB. Avem deci:

$$\sphericalangle O_c O_a \text{D} = \frac{1}{2} \sphericalangle \text{BO}_a \text{D} = \sphericalangle \text{BCD}$$

Egalităţile de unghiuri de mai sus, cari au loc geometriceşte, au loc şi într'un sens mai strict: acela în care două unghiuri sunt considerate egale, dacă vârfurile lor şi intersecţiile respective ale laturilor iniţiale şi finale, se găsesc pe acelaş cerc.

Comparând egalităţile precedente, conchidem la egalitatea de unghiuri, *în sens strict:*

$$\sphericalangle O_d O_a O_b = \sphericalangle O_c O_a \text{D}$$

Acest fel de egalitate ne dă dreptul să afirmăm că $O_d O_a$ şi DO_a sunt isogonale faţă de triunghiul $O_a O_b O_c$.

Prin repetarea judecăţii de mai sus, se obţine proprietatea enunţată.

Soluţie mai complicată a dat şi Dl. FL. V. N. ŞERBĂNESCU.

Niciunul din rezolvitorii problemii n'a folosit egalităţi de unghiuri în *sensul strict.* De aceea soluţiile trimise, cel puţin în formă, nu întrunesc toată rigoarea şi toată generalitatea. Ele par legate de materialitatea figurii întrebuinţate.

Interesul proprietății de mai sus nu e numai teoretic. Se poate observà că proprietatea ne duce la soluția următoarei probleme de construcție geometrică: *Să se determine un patru-punct, cunoscând figura formată de centrele cercurilor cirsumscrise fiecăruia din triunghiurile în care se descompune patru-punctul.* Problema, după cum vedem, admite o soluție unică. Totuș punerea ei în ecuație duce la un sistem de 4 ecuații cu 4 necunoscute în aparență complicat. Ar fi interesant să se studieze direct acel sistem.

D. B.

PROBLEMA 3991. *Care este capacitatea minimă în decalitri a unui butoiu care ar conține un număr exact de vedre, fie de Muntenia, fie de Moldova? Vadra aveà în ambele țări 10 ocale, iar ocaua din Muntenia echivalà cu 1,288 litri și cea din Moldova 1,52 litri. Câtă greutate de apă ar intrà în acel butoiu, știind că ocaua de greutate avea 1,27186 kg în Muntenia și 1,29 kg în Moldova?*

I. Ionescu.

Soluție dată de D-l Alexandru D. Stoica (Elev, clasa III, Liceul «Marele Voevod Mihaiu», București) și Gabriel A. Călinescu (Elev, clasa VII, Liceul «Enăchiță Văcărescu», Târgoviște).

Vadra de Muntenia echivalează cu 12,88 litri sau 1288 cl.

Vadra de Moldova echivalează cu 15,2 litri sau 1520 cl.

Numărul de centilitri pe care-l conține butoiul trebuie să se împartă exact cu 1288 și cu 1520, și fiindcă se cere capacitatea cea mai mică, acel număr trebuie să fie cel mai mic comun multiplu al acestor din urmă două numere. Dar, descompunând aceste numere în factori primi, găsim:

$$1288 = 2^3 \cdot 7 \cdot 23 \quad , \quad 1520 = 2^4 \cdot 5 \cdot 19.$$

Cel mai mic comun multiplu al lor este dar:

$$2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 23 = (2^4 \cdot 5 \cdot 19) \times (7 \cdot 23) = 1520 \times 161 = 244720$$

Butoiul trebuie să conțină 244720 cl. sau *244,72* dal.

Butoiul conținând 2447,2 litri, greutatea apei ce o poate conține va fi de 2447,2 kg. Transformăm această greutate în ocale.

Pentru Muntenia greutatea în ocale va fi:

$$2447{,}2 : 1{,}27186 = 1924{,}1 \ldots .$$

adică ceva mai mult ca *1924* ocale.

Pentru Moldova greutatea în ocale va fi:

$$2447{,}2 : 1{,}291 = 1895{,}5 \ldots .$$

adică ceva mai mult ca $1895\frac{1}{2}$ ocale.

Au rezolvat exact prima parte şi Domnii N. MIHAILEANU (Constanţa) şi A. M. BUŢAN.

*EXERCIŢII

48. Notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu oarecare, să se demonstreze relaţiile:

$$\Sigma\ (r_a - r_b)^3 = 3\frac{p}{r}(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$\Sigma\ r_a (r_b - r_c)^3 = \frac{p}{r}(4R + r)(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$\Sigma\ r_a^2 (r_b - r_c)^3 = \frac{p^3}{r}(a-b)(b-c)(c-a).$$

N. ALDEA.

R. Se ţine seama de relaţiile

$$r_a = \frac{s}{p-a} \quad ; \quad r_b = \frac{s}{p-b} \quad \text{şi} \quad r_c = \frac{s}{p-c}$$

precum şi de identităţile:

$$\Sigma\ (x-y)^3 = 3(x-y)(y-z)(z-x)$$

$$\Sigma z\ (x-y)^3 = (x+y+z)(z-y)(y-z)(z-x)$$

$$\Sigma z^2 (x-y)^3 = (xy+yz+zx)(x-y)(y-z)(z-x).$$

49. Într'un triunghiu oarecare avem relaţia

$$ak_a + bk_b + ck_c = 0,$$

k_a, k_b, k_c fiind segmentele din laturile triunghiului cuprinse în cercul lui EULER.

N. VELICESCU-MUSCEL.

R. Avem

$$k_a = R \sin(B - C), \text{ etc.}\ldots$$

$$ak_a = Ra \sin(B - C), \text{ etc.}\ldots$$

Deci

$$ak_a + bk_b + ck_c = R[a \sin(B-C) + b \sin(C-A) + c \sin(A-B)].$$

Cum

$$\Sigma\, a \sin(B - C) = 0, \quad \text{rezultă} \quad ak_a + bk_b + ck_c = 0.$$

50. In cari triunghiuri există relaţia

$$S = r_a r_c \frac{b - c}{(b + c)\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}(B - C)}.$$

EM. MEREUŢĂ.

R. Deoarece

$$\mathrm{tg}\frac{A}{2} = \frac{b - c}{(b + c)\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}(B - C)}, \text{ iar } r_a = p\,\mathrm{tg}\frac{A}{2}, \text{ etc....}$$

relaţia din enunţ devine $S = p^2\,\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}\,\mathrm{tg}\frac{C}{2}$, şi ţinând seama că

$S = p^2\mathrm{tg}\frac{A}{2}\,\mathrm{tg}\frac{B}{2}\,\mathrm{tg}\frac{C}{2}$, rezultă $\sphericalangle A = \sphericalangle B$, adică triunghiurile sunt isoscele.

51. Notaţiile fiind cele obicinuite în ce triunghiuri avem relaţia

$$r_a^2 + 2r_a r_c = p^2.$$

MIRCEA GH. STAVRAT.

R. Ţinând seama de

$$r_a = p\,\mathrm{tg}\frac{A}{2} \quad \text{şi} \quad r_c = p\,\mathrm{tg}\frac{C}{2}$$

relaţia devine

$$\mathrm{tg}^2\frac{A}{2} + 2\,\mathrm{tg}\frac{A}{2}\,\mathrm{tg}\frac{C}{2} = 1.$$

Cum în orice triunghiu avem

$$\mathrm{tg}\frac{A}{2}\,\mathrm{tg}\frac{B}{2} + \mathrm{tg}\frac{B}{2}\,\mathrm{tg}\frac{C}{2} + \mathrm{tg}\frac{C}{2}\,\mathrm{tg}\frac{A}{2} = 1$$

rezultă $\sphericalangle A = \sphericalangle B$, adică triunghiurile sunt isoscele.

PROBLEME PROPUSE

*4021. Se cere fracţia $abc/a'b'c'$, cu numărătorul şi numitorul de trei cifre, ştiind că aceà fracţie şi inversa ei se transformă exact în zecimale, iar dacă la aceste fracţii le înlocuim numărătorii şi numitorii prin răsturnatele lor, una se transformă în fracţie periodică simplă şi alta în fracţie periodică mixtă.

I. IONESCU.

*4022. Să se găsiască un patrat perfect de opt cifre, format din trei grupe de câte două cifre semnificative, separate între ele prin câte un zero, fiecare grupă fiind un patrat perfect.

N. C.

*4023. Insemnând cu V_b , V_c volumele născute de un triughiu dreptunghiu BAC, care se roteşte succesiv în jurul catetelor AC, AB, avem relaţia

$$V_b^2 + V_c^2 = \pi^2 \cdot \overline{BC}^2 \cdot \overline{ABC}^2.$$

M. Ghermănescu.

4024. Unde trebuie să se găsească unul din vârfurile unui patrulater convex, mijloacele laturilor căruia sunt fixe, astfel ca acest patrulater să fie inscriptibil.

N. Ciorănescu.

4025. Se dă patratul ABCD cu centrul în O şi cu latura egală cu a. Se notează cu 1, 2, 3, 4 mijloacele laturilor AB, BC, CD, DA. Pe AB se ia punctul A_1 dela A spre B şi punctul B_1 dela B spre A aşà în cât:

$$AA_1 = BB_1 = x < a$$

Se construesc la fel, pentru aceiaşi valoare x, punctele B_2, C_2, C_3, D_3, D_4. A_4 pe celelalte laturi. Fie O_b , O_2 intersecţia dreptei CB_1 respectiv cu dreptele OB şi 42. La fel se obţin punctele O_c , O_3, O_d , O_4, O_a , O_1. Se cere:

1°. Să se demonstreze că există o valoare a lui x, şi să se găsiască aceà valoare, pentru care octogonul $O_1O_b\ O_2O_c\ O_3O_d\ O_4O_a$ este regulat.

2°. Să se calculeze suprafaţa acestui octogon şi să i se găsiască valoarea numerică cu aproximaţie de 1/100 pentru a egal cu unitatea.

3°. Aceleaşi chestiuni pentru $x > a$.

4°. Când x se ia ca la 1° însă în sens contrar, se obţine o stea cu 8 vârfuri. Să se calculeze x aşà în cât unind vârfurile eşinde şi vârfurile întrânde ale stelei să se obţină 2 patrate.

5°. Să se calculeze suprafaţa stelei în condiţiile dela 2°.

Col. Gh. Buicliu.

*4026. Să se determine polinomul complect de gradul al 3-lea $P(x)$, ştiind că:

$$P(1) = 1 \ ; \ P(2) = 2 \ \text{şi} \ P(3) = 3.$$

Căp. I. Linteş.

4027. Să se rezolve sistemul

$$(x+y)^7 - (x^7+y^7) = 75810$$
$$x^2 + xy + y^2 = 19.$$

CEZAR COŞNIŢĂ.

4028. Să se studieze numărul şi distribuţia rădăcinilor ecuaţiei:

$$z^2 + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) z + \frac{1}{12}\left(\frac{7}{20} - \lambda\right) = 0,$$

în intervalul $\left(0, \frac{1}{4}\right)$, când parametrul λ variază între $-\infty$ şi $+\infty$.

ERNEST ABASON.

4029. Se consideră un cerc O înscris într'un triunghiu echilateral ABC cu latura a.

Să se studieze variaţia produsului

$$\overline{AM} \times \overline{MB}$$

în funcţie de unghiul MOD, M fiind un punct pe cerc, iar D piciorul perpendicularei din O pe AB.

IULIU DEAC.

4030. Dându-se ecuaţia cu coeficienţi reali

$$x^3 + px + q = 0$$

a cărei rădăcină imaginară să fie

$$x_k = a + i\sqrt{1 - a^2}$$

şi unghiul α dat de relaţia

$$\alpha = \arccos a$$

să se demonstreze relaţia

$$\sum_0^n C_n^p q^n \sin 3(n-p)\alpha \equiv (-1)^n p^n \sin n\alpha.$$

LOCOT. M. FOCŞENEANU.

ERATĂ. 1°. La problema 4020 propusă la pagina 360 se înlocueşte OH prin OF.

2°. Problema d-lui I. IONESCU prezolvată la pagina 303 din Nr. 8 Vol. XXXVI poartă N-rul 2233 iar nu 2223 cum din eroare s'a imprimat.

BOLETIN MATEMATICO

FUNDAT ÎN ANUL 1928. — ABONAMENT ANUAL: 400 LEI

BOLETIN MATEMATICO ELEMENTAL

FUNDAT ÎN ANUL 1930. — ABONAMENT ANUAL: 125 LEI

Director: Dr. B. I. BAIDAFF

SUNT CELE MAI IMPORTANTE PUBLICAȚIUNI PERIODICE MATEMATICE DIN AMERICA DE SUD

SE PRIMESC ABONAMENTE PENTRU ANUL AL IV (IAN. — DEC. 1931)

ABONAMENTELE ȘI CORESPONDENȚA SE VOR TRIMITE LA ADRESA:

BOLETIN MATEMATICO, Belgrano 975, Buenos-Aires, Rep. Argentina.

Dela Ianuarie 1928 până în Octomvrie 1930 s'au publicat articole și note dela Domnii:

F. Anguita, B. I. Baidaff, F. Cernuschi, Cl. C. Dassen, A. Garrigos și **J. Tschiek,** Buenos-Aires (Rep. Argentina), **J. Hartmann,** La Plata (Rep. Argentina), **C. Dieulefait** și **E. Natale,** Rosario (Rep. Argentina), **O. Márquez,** Salta (Rep. Argentina), **M. A. Basoco** și **E. T. Bell,** Pasadena (California), **M. Krawtchouk** și **N. Kryloff,** Chiev (U. R. S. S.), **J. Gonzalez Perera, S. José** (Uruguay), **B. Jekhowsky,** Bordo (Francia), **W. Lewitzky,** Lemberg (Polonia), **O. J. Ramler,** Washington (Statele Unite) **J. Shohat,** Ann Arbor (Statele Unite), **D. M. J. Sommerville,** Wellington (N. Zelandia), **V. Thébault,** Le Mans (Francia), **O. Szász,** Frankfurt a. M. (Alemania), **G. Vivanti,** Milano (Italia), **J. R. Wilton,** Adelaida (Sud Australia).

Articolele, notele şi problemele însemnate cu * se referă la matematicile elementare (cursul de liceu).

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Aldea N. (3717, 967, 93, 4004, 06, 11); *Antoniu El.* (3986, 93); *Aurian J.* (4003, 06); *Bădescu Em. A.* (3995); *Berol Haim.* (3982); *Buţan Aurelian* (3982); *Cârstoiu I.* (4004); *Chiţu M.* (3967, 97); *Cojocaru I.* (4004); *Cristeanu A.* (4004); *Deac I.* (4004); *Dicu I.* (3967); *Dobrogeanu A. N.* (3982); *Dumitraşcu R.* (4004); *Epuran I.* (3943, 93, 98, 4002, 03, 04); *Gheorghiu A.* (3636, 980); *Ghiuţă G.* (3993, 4004); *Goormaghtigh R.* (A, N); *Ionescu-Bis H.* (3993, 4004); *Ionescu M.* (3943); *Ioniţă I. Marin* (3982); *Lupescu Gh. Const.* (3982); *Mărgărit Faţe* (3967, R); *Mihăileanu N. N.* (4004, 07, 11, 12, 16); *Mihăileanu A.* (3967); *Mirescu Lygia.* (3992, 4003); *Naforni Const.* (3982, 93, 4004); *Negrea Mircea L.* (3940, 4004); *Parepeanu I.* (3967, 4004); *Patraulea N.* (3993, 4004); *Patraulea R.* (3993, 95, 97, 4004); *Popa Gh. Ioan* (3982); *Popescu N.* (4004); *Puta Tr.* (3993, 97); *Roşca St. G.* (3965, 66, 82, 93, 96, 4001, 04, 06); *Roşu A. Al.* (1911, 2217); *Rusu C.* (3967); *Sachelarie I.* (3967); *Sandu I.* (4004); *Stan A. Subloc.* (3980); *Stoica D. Alex.* (3982); *Truţescu Ştefania* (4004); *Vasu V.* (3997); *Vissarion V.* (4004, 16); *Zaharia O. N.* (E); *Zamfirescu I. Subloc.* (3986, 87, 4004, 16, N); *Zane N.* (4016); *Ziff M.* (3993, 98).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, **ele** *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac deasemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani completi broșați cu prețul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX și XXI care se vând cu prețul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV și XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu** și **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecțiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția IV revăzută și adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu** și **G. Țițeica,** *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu** și **Șt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediția II revăzută și adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicațiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediția III-a revăzută și îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu** și **G. Țițeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Țițeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* (Ediția II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Regiei Publice Comerciale «Monitorul Oficial și Imprimeriile Statului», B-dul Elisabeta 29, București I.

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, București 4.

BIBLIOTECA CENTRALĂ a „ASOCIAȚIUNII“ SIBIIU

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXVI.

NUMĂRUL 11. — IULIE 1931.

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAȚIUNII SIBIU

SUMARUL

1. Généralisation du théorème de d'Ocagne sur la courbure du contour apparent d'une surface . . . . . *R. Goormaghtigh.*
2. Relaţiuni între triunghiurile sferice şi unghiurile triedre. . . . . *N. Abramescu.*
3. Asupra unui determinant . . . . . *T. Popoviciu.*
4. Note matematice: 41 — 46.
5. Bibliografie.
6. Cereri: 207.
7. Diverse.
8. Probleme rezolvate: 1564, 2031, 2234, 2448, 3942, 3964, 3966, 3970, 3990, 3992, 3998.
9. Exerciţii: 52 — 54.
10. Probleme propuse: 4031 — 4040.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

REGIA M. O., IMPRIMERIA NAŢIONALĂ

1931

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXXVI se compune din D-nii: Colonel **Gh. I. Liteanu** dela Marele Stat Major al Armatei; **G. A. Nichifor**, Doctor în Matematici, Conferenţiar la Universitatea din Bucureşti; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Regiei Publice Comerciale «Monitorul Oficial şi Imprimeriile Statului», Cassier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui Inginer-Şef GH. ILIESCU, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 310, 33, 55, 64, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 82, 553, 87, 650, 79, 711, 29, 53, 64, 807, 76, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 53, 82, 405, 22, 30, 39, 56, 66, 77, 502, 03, 45, 56, 77, 80, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 65, 84, 92, 95, 709, 13, 17, 35, 58, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 56, 3005, 45, 69, 81, 127, 50, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 07, 08, 09, 10, 16, 18, 20, 50, 61, 79, 405, 12, 24, 25, 45, 72, 89, 91, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 20, 22, 25, 27, 32, 46, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 94, 99, 700, 03, 20, 33, 36, 80, 84, 93, 99, 804, 08, 10, 29, 35, 36, 44, 45, 48, 53, 64, 70, 80, 96, 98, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 33, 44, 49, 50, 72, 73, 76, 83, 87, 94, 99, 4000, 10, 13, 17, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procurà dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE D'OCAGNE SUR LA COURBURE DU CONTOUR APPARENT D'UNE SURFACE

On connaît le théorème de D'OCAGNE :

La courbure du contour apparent d'une surface en un point M_1 *s'obtient en divisant la courbure totale de la surface au point correspondant* M *par la courbure en* M *de la section normale passant par* MM_1.

Considérons plus généralement la développable Σ_1 circonscrite à une surface Σ le long d'une courbe (M). Soient K la courbure totale de Σ en un point M de la courbe (M), λ la distance de M au point central ω de la génératrice de Σ_1 passant par M, θ l'angle de cette génératrice avec la tangente à (M) en M, et cherchons une expression du rayon de courbure ρ_1 en M de la trajectoire orthogonale Γ des génératrices de Σ_1 passant par M.

Appelons encore N, N' les courbures normales de Σ en M suivant la tangente à (M) en M et la direction orthogonale, T la torsion géodésique de Σ en M, enfin N_θ la courbure normale dans la direction de $M\omega$.

On sait que, si ρ_0, τ_0 sont les rayons de courbure et de torsion en un point Ω de l'arête de rebroussement d'une surface développable et si une courbe (L) tracée sur cette surface coupe la génératrice passant par un point L de (L) sous l'angle φ, la courbure normale et la courbure géodésique de (L) en L sont [1])

$$n_\varphi = \frac{\rho_0}{\tau_0}\,\frac{\sin^2\varphi}{l} \quad , \quad g_\varphi = \frac{d\varphi}{ds} + \frac{\sin\varphi}{l} \, ,$$

l désignant le segment ΩL et s l'arc de la courbe (L).

Appliquant ces relations aux courbes Γ et (M) tracées sur la surface Σ_1, et appelant maintenant ρ_0, τ_0 les rayons de courbure et de torsion de l'arête de rebroussement de Σ_1 en ω, on a successivement

$$\frac{1}{\rho_1^2} = n_{\frac{\pi}{2}}^2 + g_{\frac{\pi}{2}}^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{\rho_0^2}{\lambda^2\tau_0^2} = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{N^2}{\sin^4\theta} \, .$$

[1]) PAUL SERRET, *Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure*, Paris 1860, p. 138.

Or

$$N_\theta = N\cos^2\theta - 2T\sin\theta\cos\theta + N'\sin^2\theta,$$

et l'on sait que la dirèction de la génératrice de la développable Σ_1 est déterminée par l'angle θ tel que

$$tg\theta = N : T.$$

Dès lors,

$$N_\theta = \frac{NN' - T^2}{N^2 + T^2} N = \frac{K\sin^2\theta}{N}.$$

On a donc enfin

$$\frac{1}{\rho_1^2} = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{K^2}{N_\theta^2}.$$

Si ω *est le point central de la génératrice de la développable circonscrite à une surface* Σ *le long d'une courbe* (M) *passant par un point* M, *le carré de la courbure de la trajectoire orthogonale, passant par* M, *des génératrices de cette développable, est égal au carré de l'inverse de la distance* Mω *augmente du carré du rapport de la courbure totale de* Σ *en* M *à la courbure de la section normale à* Σ *passant par* Mω.

Lorsque λ devient infini, l'on retrouve le théorème de D'OCAGNE.

Bruges (Belgique). R. GOORMAGHTIGH.

RELAȚIUNI INTRE TRIUNGHIURILE SFERICE ȘI UNGHIURILE TRIEDRE

Egalitatea, proprietățile triunghiurilor sferice și relațiile dintre două triunghiuri sferice polare (suplimentare) se stabilesc ușor dacă asociem unui triunghi sferic ABC triedrul cu vârful în centrul O al sferei pe care e tras triunghiul, iar ca muchii ale triedrului razele OA, OB, OC.

1. Se cunoaște[1]) proprietatea că fiind dat unghiul diedru cu muchia AS, și căruia îi corespunde unghiul plan DSE (planul DSE fiind perpendicular pe muchia AS, iar DS, SE intersecțiile acestui

1) A se vedeà, ROUCHÉ et COMBEROUSSE, *Traité de Géométrie*, t. II, p 40.

plan cu feţele diedrului), unghiul D'SE', format de perpendicularele SD' şi SE' pe feţele ASE şi ASD, este suplimentul unghiului DSE [Căci $\sphericalangle$ D'SE' = $\sphericalangle$ DSE — $\sphericalangle$ DSD' = 1dr — (DSE — D'SE) = 1dr — (DSE — 1dr) = 2dr — DSE].

2. Aşà fiind, considerând triedrul SABC, cu vârful S şi muchiile SA, SB, SC, perpendicularele SA', SB', SC' respectiv pe feţele SBC, SCA, SAB ale triedrului SABC, formează un triedru SA'B'C' suplimentar cu SABC; în adevăr, SC' fiind perpendiculară pe SA, SB, iar SB' fiind perpendiculară pe SA, SC, urmează că SA este perpendiculară pe SB', SC', deci muchia SA a primului triedru este perpendiculară pe faţa SB'C' a noului triedru. Deci şi muchiile triedrului SABC sunt perpendiculare pe feţele triedrului format SA'B'C'; există deci reciprocitate între aceste triedre, muchiile unuia sunt perpendiculare pe feţele celuilalt.

Dar, am văzut mai sus că unghiul B'SC', adică faţa a' a triedrului SA'B'C', este suplimentul unghiului A format de feţele BSA, CSA ale triedrului SABC. Deci, feţele a', b', c' ale triedrului SA'B'C' sunt suplimentele unghiurilor diedre A, B, C ale triedrului dat SABC; de aceea se zic suplimentare aceste triedre, feţele unuia fiind suplimentele unghiurilor diedre ale celuilalt,

$$a' = \pi - A,\ b' = \pi - B,\ c' = \pi - C,$$
$$A' = \pi - a,\ B' = \pi - b,\ C' = \pi - c.$$

3. Acestea fiind reamintite, să asociem triunghiului sferic ABC triedrul OABC, cu vârful O în centrul sferei şi cu muchiile OA, OB, OC. Se vede că laturile a = arc BC, b = arc CA, c = arc AB sunt feţele BOC, COA, AOB ale triedrului; unghiurile A, B, C ale triunghiului sferic, măsurate de unghiurile tangentelor în A, B, C respectiv la arcele de cercuri mari BA, CA, CB şi AB, AC şi BC, sunt tocmai unghiurile diedre ale triedrului OABC, căci unghiurile triunghiului sferic sunt unghiurile plane ale acestor diedre.

Deci, când vorbim de un triunghi sferic ABC, înţelegem că laturile sale a, b, c, şi unghiurile sale A, B, C sunt feţele şi unghiurile diedre ale triedrului OABC, O fiind centrul sferei pe care e tras triunghiul. Aşa că toate proprietăţile şi egalitatea triedrelor au loc şi pentru triunghiurile sferice. Astfel, într'un triunghi sferic, *o latură este mai mică de cât suma celorlalte două; suma unghiurilor este cuprinsă între 2 şi 6 unghiuri drepte; două triunghiuri sferice sunt egale când au două laturi şi unghiul cuprins*

între ele egale; când au o latură şi două unghiuri alăturate egale; când au toate laturile egale; când au toate unghiurile egale.

4. Să considerăm acum triunghiul sferic ABC, deci şi triedrul OABC. Să formăm triedrul OA'B'C' suplimentar cu OABC, adică OA', OB', OC' respectiv perpendiculare pe feţele BOC, COA, AOB. A', B', C' fiind intersecţiile acestor perpendiculare cu sfera şi situate de aceeaşi parte a feţelor BOC, COA, AOB ca şi OA, OB, OC, se vede că A' este polul cercului mare din care face parte arcul BC, şi B', C' polii arcelor CA, AB. Deci A'B'C' este triunghiul sferic polar al triunghiului sferic ABC. Şi cum este reciprocitate între triedrele suplimentare OABC, OA'B'C', de asemenea şi între triunghiurile sferice ABC, A'B'C' este reciprocitate; vârfurile unuia sunt polii laturilor celuilalt triunghi sferic.

Cum elementele *a, b, c,* A, B, C şi *a', b', c',* A', B', C' ale acestor *triunghiuri polare* sunt feţele şi unghiurile diedre ale triedrelor suplimentare OABC, OA'B'C', rezultă că avem

$$a' = \pi - A, \ldots, \quad A' = \pi - a, \ldots,$$

adică *laturile unuia sunt suplimentele unghiurilor celuilalt triunghiu sferic.*

5. Se cunoaşte[1]) expresiunea arii, $A + B + C - 2$, a unui triunghi sferic ABC, A, B, C fiind numerile care măsoară unghiurile. Cred că nu este fără interes a se găsi formula care dă *aria unui triunghi sferic isoscel* ABC ($AB = AC$). Pentru aceasta, să considerăm o calotă sferică cu baza cercul EBCF (Fig. 1) şi înălţimea AD.

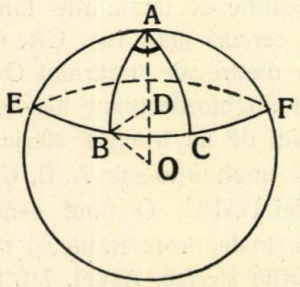


Fig. 1.

Să ducem prin vârful A al calotei două arce de cercuri mari

1) A se vedeà, ROUCHÉ et COMBEROUSSE, *Traité de Géometrie,* t. II, p. 201.

AB şi AC. S'a format triunghiul isoscel ABC tras pe sferă, căruia îi corespunde unghiul A şi a cărui arie este în legătură cu calota AEBCF. In adevăr, dacă la un unghiu A, corespunde aria triunghiului ABC, când unghiul creşte, aria triunghiului obţinut se măreşte şi când ajunge ca unghiul A să fie 180^0 sau π, aria sa este jumătatea calotei AEBCF. Deci

la unghi π corespunde $\frac{1}{2}$ aria calotei .... $\frac{1}{2}\, 2\pi r \,.\, AD$

„ „ A „ ABC.... $\sphericalangle A \,.\, r \,.\, AD$,

adică *aria triunghiului isoscel* ABC (arcAB = arcAC) *este egală cu produsul dintre măsura unghiului* A, *raza sferii şi înălţimea calotei din care face parte acest triunghi*, adică măs. ABC = $\sphericalangle A \,.\, r \,.\, AD$.

N. Abramescu.

ASUPRA UNUI DETERMINANT

Să considerăm determinantul

$$\Delta \begin{pmatrix} a_1, & a_2, & \dots & a_n \\ \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^{\rho_1} & a_1^{\rho_2} & \dots & a_1^{\rho_n} \\ a_2^{\rho_1} & a_2^{\rho_2} & \dots & a_2^{\rho_n} \\ & & & \\ a_n^{\rho_1} & a_n^{\rho_2} & \dots & a_n^{\rho_n} \end{vmatrix}.$$

Dacă

$$\rho_1 = 0,\ \rho_2 = \rho,\ \rho_3 = \rho + 1, \dots \rho_i = \rho + i - 2, \dots (\rho > 0)$$

$$0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$$

acest determinant e positiv. Pentru demonstraţie se poate vedeà spre exemplu un articol al D-lui Y. Watanabe în Proc. of the Phys. — Math. Society of Japon 3rd. Ser. vol. 12 (1930) p. 143.

Se vede uşor că avem

$$\Delta \begin{pmatrix} a_1, & a_2, & \dots & a_n \\ \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_n \end{pmatrix} = (a_1 a_2 \dots a_n)^{\rho_1} \Delta \begin{pmatrix} a_1, & a_2, & \dots & \dots & a_n \\ 0 & \rho_2 - \rho_1 & \rho_3 - \rho_1 & \dots & \rho_n - \rho_1 \end{pmatrix}.$$

Să punem pentru prescurtare

$$b_{ij} = a_i^{\rho j - \rho_1} - a_{i-1}^{\rho j - \rho_1}$$

atunci o transformare simplă ne dă

$$\Delta \begin{pmatrix} a_1, & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & \rho_2 - \rho_1 & \dots & \rho_n - \rho_1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Insă

$$(1) \quad b_{ij} = (\rho_j - \rho_1) \frac{a_i^{\rho j - \rho_1} - a_{i-1}^{\rho j - \rho_1}}{\rho_j - \rho_1} = (\rho_j - \rho_1) \int_{a_{i-1}}^{a_i} t_{i-1}^{\rho j - \rho_1 - 1} \, dt_{i-1}$$

din care deducem relaţia de recurenţă

$$(2) \; \Delta \begin{pmatrix} a_1, & a_2, \dots & a_n \\ \rho_1, & \rho_2, \dots & \rho_n \end{pmatrix} = (\rho_2 - \rho_1)(\rho_3 - \rho_1) \dots (\rho_n - \rho_1)(a_1 a_2 \dots a_n)^{\rho_1}$$

$$\times \int_{a_1}^{a_2} \int_{a_2}^{a_3} \dots \int_{a_{n-1}}^{a_n} \Delta \begin{pmatrix} t_1, & t_2, \dots & t_{n-1} \\ \rho_2 - \rho_1 - 1, & \rho_3 - \rho_1 - 1, \dots & \rho_n - \rho_1 - 1 \end{pmatrix} dt_1 dt_2 \dots dt_{n-1}.$$

Putem presupune că a_i sunt diferiţi, deoarece în cazul contrar determinantul e nul. Noi presupunem că $a_i > 0$, $i = 1, 2 \dots n$ şi că a^m, m fiind real, e pozitiv. Se poate lua

$$0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n .$$

Putem deasemenea presupune că numerele ρ_i sunt distincte, căci altfel determinantul e evident nul.

In aceste cazuri formula (1) are un sens, deci relaţia (2) e complet justificată.

Să considerăm determinantul lui VANDERMONDE

$$V(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{k-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha_k & \alpha_k^2 & \dots & \alpha_k^{k-1} \end{vmatrix}.$$

Să punem încă

$$\text{signe } z = \begin{cases} +1 & z > 0 \\ 0 & z = 0 \\ -1 & z < 0 \end{cases}$$

atunci

$$\text{signe } a \,.\, b = (\text{sig} a) \,.\, (\text{signe } b).$$

Avem relația de recurență

$$V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k) = (\alpha_k - \alpha_1)(\alpha_k - \alpha_2)\ldots(\alpha_k - \alpha_{k-1})\, V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{k-1})$$

deci

$$\text{signe } V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k) = \text{signe } [(\alpha_k - \alpha_1)(\alpha_k - \alpha_2)\ldots(\alpha_k - \alpha_{k-1})]. \\ . \text{signe } V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{k-1}).$$

Avem deasemenea

$$V(\alpha_1 + \lambda, \alpha_2 + \lambda, \ldots \alpha_k + \lambda) = V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k).$$

Teoremă. *Presupunând* $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, *determinantul*

$\Delta \begin{pmatrix} a_1, & a_2, \ldots a_n \\ \rho_1, & \rho_2 \ldots \rho_n \end{pmatrix}$ *verifică egalitatea*

$$\text{signe } \Delta \begin{pmatrix} a_1, & a_2, \ldots a_n \\ \rho_1, & \rho_2, \ldots \rho_n \end{pmatrix} = \text{signe } V(\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n).$$

Se vede direct că pentru $n = 2$ proprietatea e adevărată. Să presupunem că e adevărată pentru $n - 1$ și să arătăm că va fi adevărată pentru n. In formula (2) elementul de integrală multiplă depinde de $t_1, t_2, \ldots t_{n-1}$ cari însă verifică relația

$$0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3 \ldots \leqslant t_{n-1}.$$

Se vede dar că avem

$$\text{signe } \Delta \begin{pmatrix} t_1, & t_2, \ldots t_{n-1} \\ \rho_2 - \rho_1 - 1, \ldots \rho_n - \rho_2 - 1 \end{pmatrix} = \text{signe } V(\rho_2 - \rho_1 - 1, \rho_3 - \rho_2 - 1, \ldots \rho_n - \rho_2 - 1) \\ = \text{signe } V(\rho_2, \rho_3, \ldots \rho_n).$$

Sau

$$\text{signe } \Delta \begin{pmatrix} t, & t_2, \ldots\ldots t_{n-1} \\ \rho_2 - \rho_1 - 1, & \ldots \rho_n - \rho_2 - 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Dar dacă signe $V(\rho_2, \rho_3, \ldots \rho_n) \neq 0$ integrala multiplă nu poate fi nulă, ceeace rezultă din continuitatea funcţiunii integrate şi din faptul că presupunem teorema adevărată pentru $n - 1$.

Avem deci

$$\text{signe} \int_a^{a_2} \int_{a_2}^{a_3} \ldots \int_{a_n}^{a_n} {}_1\Delta \begin{pmatrix} t_1, & t_2 \ldots \ldots \ldots & t_{n-1} \\ \rho_2-\rho_1-1, & \rho_3-\rho_1-1, \ldots & \rho_n-\rho_1-1 \end{pmatrix} dt_1 dt_2 \ldots dt_{n-1}$$

$$= \text{signe } V(\rho_2, \rho_3, \ldots \rho_n).$$

Aşa dar

$$\text{signe } \Delta \begin{pmatrix} a_1, & a_2, \ldots & a_n \\ \rho_1, & \rho_2 \ldots & \rho_n \end{pmatrix} = \text{signe } [(\rho_2 - \rho_1)(\rho_3 - \rho_1) \ldots (\rho_n - \rho_1)]$$

$$. \text{signe } (a_1 a_2 \ldots \overset{\cdot}{a}_n)^{\rho_1} . \text{signe } V(\rho_2, \rho_3 \ldots \rho_n)$$

$$= \text{signe } V(\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n),$$

de oarece

$$\text{signe } (a_1 a_2 \ldots a_n)^{\rho_1} = 1$$

Chestiunea e deci demonstrată.

Făcând schimbări convenabile de linii, vedem că teorema se poate exprimă şi sub forma următoare:

a_i, $i = 1, 2, \ldots n$ *fiind pozitive, avem egalitatea*

$$\text{signe } \Delta \begin{pmatrix} a_1, & a_2, \ldots & a_n \\ \rho_1, & \rho_2 \ldots & \rho_n \end{pmatrix} = \text{signe } [V(a_1, a_2, \ldots a_n) . V(\rho_1, \rho_2 \ldots \rho_n)].$$

T. Popoviciu.

NOTE MATEMATICE

41. *Sur le problème 3954 (pag. 313).* D'après la solution de cette question, le lieu des intersections des droites de Simson de deux points fixes d'un cercle, par rapport aux triangles inscrits à ce cercle et ayant même orthocentre, est un cercle.

Cette proposition peut être considérée comme un cas particulier du théorème suivant que nous avons donné dans *Mathesis* 1914, p. 151:

L'orthopôle d'une droite fixe par rapport aux triangles inscrits à un cercle et circonscrits à une conique à centre est un cercle.

Dans le cas de la question 3954, les triangles considérés ont même centre du cercle circonscrit et même orthocentre; ils sont donc circonscrits à une conique ayant ces points pour foyers.

R. GOORMAGHTIGH.

42. *Sur un théorème de* NEUBERG *et* GOB. L'extension que M. V. THÉBAULT vient de donner à la généralisation – due à M. R. GOORMAGHTIGH — d'un théorème de NEUBERG et GOB [1]) est susceptible à son tour d'une extension encore plus large, si nous remplaçons la projection orthogonale par une projection oblique, d'un angle quelquonque φ.

En effet, considérons deux points P et Q dans le plan du triangle ABC, que nous projeterons sur les cotés du triangle, en obtenant les paires de points (P_a, Q_a), (P_b, Q_b), $P_c, Q_c)$, tels, par exemple que

$$\sphericalangle PP_b A = \sphericalangle QQ_b A = \varphi$$

Prenons le segment $\overline{AM}$, équipollent à $k.\overline{PQ}$ et sont symétrique $\overline{AM'}$ par rapport à la bissectrice intérieure de l'angle A. Soient $A\gamma$, $A\beta$ les projections obliques du segment AM sur AB et AC et aussi $A\gamma'$, $A\beta'$ celles de AM' sur les mêmes cotés. La droite $\beta'\gamma'$ coupe AM au point M_1. On a:

$$\sphericalangle \gamma' M_1 A = \sphericalangle \beta'\gamma' A - \sphericalangle \gamma' A M_1$$

mais

$$\sphericalangle \beta'\gamma' A = \sphericalangle \beta'\gamma' M' + \sphericalangle M'\gamma' A = \sphericalangle \beta'\gamma' M' + \varphi$$

et encore

$$\sphericalangle \beta'\gamma' M' = \sphericalangle \beta' A M' = \sphericalangle \gamma' A M_1$$

parceque les points β', γ' sont situés sur l'arc décrit sur AM', capable de l'angle φ. On a donc

$$\sphericalangle \gamma' M_1 A = \varphi$$

ce qui prouve que la droite $\beta'\gamma'$ fait l'angle φ avec la droite PQ.

Si l'on remarque maintenant que

$$A\beta' = A\gamma = k.\overline{P_c Q_c}\,, \quad A\gamma' = A\beta = k.\overline{P_b Q_b}$$

1) „Gazeta Matematică" XXXVI pag. 361 — 364.

en faisant les mêmes constructions et raisonnements pour les deux autres sommets B,C, on peut énoncer le théorème général suivant.

Soient P_a , P_b , P_c , Q_a , Q_b , Q_c *les projections obliques d'angle* φ *de deux points quelquonques du plan sur les cotés d'un triangle ABC. L'on porte sur* BA, CA *les segments* AM_a , AN_a , *égaux respectivement à k.* $P_b Q_b$ *et k.* $P_c Q_c$, *sur les cotés* CB *et* AB *les segments* BM_b *et* BN_b , *égaux respectivement à k.* $P_c Q_c$ *et k.* $P_a Q_a$, *sur* AC *et* BC *les segments* CM_c CN_c , *égaux respectivement à k.* $P_a Q_a$ *et k.* $P_b Q_b$. *Les droites* $M_a N_a$, $M_b N_b$, $M_c N_c$ *sont également inclinées* (φ) *sur* PQ *et les cercles circonscrits aux triangles* $AM_a N_a$, $BM_b N_b$, $CM_c N_c$ *ont le même diamètre égal à k* PQ. *sec* φ.

M. Ghermanesco.

43. *Variante ale problemei 3941.* Analog cu problema propusă de D-l I. Ionescu şi rezolvată la pag. 157, Vol. XXXVI, se pot rezolvà încă următoarele probleme, care nu-i sunt decât variante.

1°. *Să se găsiască numerele întregi* X *şi* Y *care au pe* D *ca c. m. m. c. d. şi pe* A *ca sumă sau diferenţă a două puteri asemeni.*

Avem:

$$X^n \pm Y^n = A \; ; \; X = DX' \; ; \; Y = DY' \; ; \; X > Y \; ; \; D^n < A$$

în care X' şi Y' sunt prime între ele. Se deduce imediat

$$D^n [X'^n \pm Y'^n] = A \qquad \therefore \qquad X'^n \pm Y'^n = \frac{A}{D^n} = k$$

k fiind întreg. Se caută puterile n cuprinse între 1 şi k care sunt prime între ele. Dintre acestea vor fi soluţii acelea pentru care

$$X'^n \pm Y'^n = k$$

2°. *Să se găsiască două numere întregi* X *şi* Y *care au pe* m *ca c. m. m. m. c. şi pe* A *ca sumă sau diferenţa a două puteri asemeni.*

Analog cu 1°, avem

$$X^n \pm Y^n = A \quad ; \quad X = DX' \quad ; \quad Y = DY'$$

$$\therefore \; m = DX'Y' \; \text{şi} \; D^n [X'^n \pm Y'^n] = A.$$

Numerele X', Y' fiind prime între ele, urmează că şi X'Y' este prim cu $X'^n \pm Y'^n$ căci dacă aceste numere ar avea un divizor d' acest divizor ar trebui să dividă sau pe X' sau pe Y', factorii lui X'Y' şi atunci d va trebui să dividă şi pe Y' sau X' a doua parte a sumei $X'^n \pm Y'^n$, ceva ce este contrar ipotezei că X' şi Y' sunt primi între ei. Prin urmare m^n şi A au pe D^n ca c. m. m. c. d. Deci pentru a rezolvà problema, se caută c. m. m. c. d. al numerelor m^n şi A, i se extrage rădăcina a n-a şi atunci se recade peste problema 1°, sau se ajunge la sistemul de ecuaţii:

$$X'Y' = \frac{m}{D} \quad ; \quad X'^n \pm Y'^n = \frac{A}{D^n}.$$

Pentru ca această problemă să fie aritmetic posibilă, trebuie ca datele ei să fie aşa alese în cât c. m. m. c. d. al numerilor m^n şi A să fie puterea n a unui întreg.

3. *Să se găsiască* n *numere întregi, care să aibă pe* d *ca c. m. m. c. d. şi pe* A *ca sumă a patratelor.*

Avem

$$X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2 = A$$

$$X_1 = dX'_1 \quad ; \quad X_2 = dX'_2 \; ; \ldots ; \; X_n = dX'_n$$

$$\therefore \; X'^2_1 + X'^2_2 + \ldots + X'^2_n = \frac{A}{d^2} = k.$$

In datele problemei A şi d trebue aleşi aşà încât k să fie întreg. Pentru a găsì pe $X_1, X_2, X_3 \ldots X_n$ se va procedà ca la 1°. Pentru cazul când k este pătrat perfect, $X_1, X_2 \ldots X_n$ se găsesc între soluţiile care se dau problemei din articolele d-lui E. Ştefănescu: *Rezolvarea în numere întregi a unei ecuaţii,* publicată în *Gazeta Matematică,* Vol. XXXII.

Col. Gh. Buicliu.

44. *Generalizarea problemei 3955.* Forma particulară sub care se prezintă polinoamele de sub radicalele ecuaţiei, care formează obiectul problemei 3955, rezolvată la pagina 353 Vol XXXVI sugerează imediat următoarea generalizare:

Ştiind că $F(x)$ *este un polinom întreg de* x *şi presupunând* $A > B$, *să se rezolve ecuaţia:*

$$(1) \qquad \sqrt[p]{F_{(n)} + A} + \sqrt[q]{F_{(n)} + B} = a.$$

Se procedează întocmai ca la problema 3955. Se pune

$$y^p = F_{(n)} + A$$

şi avem

$$\sqrt[q]{y^p - b} = a - y$$

după care ridicând la puterea q se găseşte o ecuaţie de gradul q sau p, după cum $q \gtrless p$. Am însemnat prin b diferenţa A — B.

Făcând în (1)

$F_{(n)} = x^2 + 14x$; A = 24 ; B = 13 ; $p = 3$; $q = 2$; $a = 7$

se găseşte cazul particular al problemei 3955.

Cu această ocazie remarc că în primul radical al enunţului dela pagina 353 trebuie înlocuit factorul $x + 3$ prin $x + 2$.

COL. GH. BUICLIU.

45. *Asupra problemei 134 din Boletin Matematico.* La pag. 125 B. M. II, se rezolvă următorul sistem de trei ecuaţii cu trei necunoscute:

$(y+z)(x+y+z)=2a;(z+x)(x+y+z)=2b;(x+y)(x+y+z)=2c.$

In cele ce urmează voi rezolvà următorul sistem mai general de n ecuaţii cu n necunoscute:

$$\left(\sum_1^n x_i - x_1\right)(\Sigma x_i) = (n-1)\,a_1$$

$$\left(\sum_1^n x_i - x_2\right)(\Sigma x_i) = (n-1)\,a_2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\left(\sum_1^n x_i - x_n\right)(\Sigma x_i) = (n-1)\,a_n.$$

Vom notà:

$$S = \sum_1^n x_i,$$

de unde sistemul devine

$$(S - x_1)\,S = (n-1)\,a_1$$
$$(S - x_2)\,S = (n-1)\,a_2$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$(S - x_n)\,S = (n-1)\,a_n$$

Adunând avem:

$$S\,(nS - S) = (n-1)\,\Sigma a_i.$$

Sau:

$$S = \pm \sqrt{\Sigma a_i}$$

de unde:

$$x_k = \frac{S^2 - (n-1)a_k}{S} = \frac{\left(\sum_1^n a_i\right) - (n-1)a_k}{\sum_1^n a_i}; \quad k = 0,1,2,\ldots n.$$

In cazul problemei 134 avem $n = 3$.

† Tr. A. Dordea.

*46. *Asupra problemei No. 3862.* Această problemă în care se cereau cuburile terminate în *szu*, astfel ca s^2 să se scrie *zu*, a fost propusă în Vol. XXXV, pag. 239 şi rezolvată în Vol. XXXVI pag. 189. La finele soluţiei acestei probleme, D-l P. I. Ghiţoiu, rezolvă şi cazul în care s^3 se scrie *zu*, dar soluţiile acestui caz nu-s complecte, iar unele sunt eronate.

Iată soluţiile complecte în cazul când s^3 se scrie *zu*

1.	Cubul numerelor	$10n$	se	termină	cu	000
2.	» »	$1000n + 701$	»	»	»	101
3.	» »	$250n + 102$	»	»	»	208
4.	» »	$1000n + 903$	»	»	»	327
5.	» »	$250n + 54$	»	»	»	464

unde n e un întreg oarecare. Problema admite 5 grupe de soluţii.

Observare. In mod analog s'ar căutà orice cuburi, pentru care *szu* ia o anumită valoare. Se observă că acest grup în şirul consecutiv al cuburilor perfecte se repetă din 1000 în 1000. Intr'adevăr, cuburile numerelor

(1) N şi $1000n + N$ $(0 < N < 1000, n = 0, 1 \ldots)$

se termină cu acelaş grup de trei cifre, căci

$$(1000n + N)^3 = 1000000000n^3 + 3000000n^2N + 3000nN^2 + N^3$$
$$= 1000 \cdot A + N^3.$$

Deci e suficient a cunoaşte pe $N < 1000$, căci celelalte numere se găsesc cu (1).

Ioan V. Măţieş.

BIBLIOGRAFIE

Journal des Mathématiques élémentaires publié par H. VUIBERT, Anul 55, Nr. 17 şi Nr. 18, Iunie 1931. Paris.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XI, Nr. 4, Iunie 1931. Timişoara. Asupra unei probleme de geometrie de VIRGILIU CLAUDIAN.

N. ABRAMESCU. *Le mouvement d'une figure plane variable avec conservation de similitude.* (Extras din *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences* din Paris), Paris 1931.

CERERI

207. Unde se poate găsi o biografie a profesorului de matematici EM. CONSTANTINESCU de pe timpul domniei lui BARBU ŞTIRBEI?

I. IONESCU.

DIVERSE

Societatea Română de ştiinţe, secţiunea matematică a ţinut şedinţă in seara zilei de 15 Iunie, când au făcut comunicări D-l D. GERMANI despre similitidine aplicată la calculul de rezistenţă al baragelor şi D-l M. NICULESCU despre funcţiunile subarmonice de ordinul p.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1564. *Coordonatele ecuatoriale mijlocii ale stelei* θ *din Carul mare fiind respectiv:*

$$AR = 9^{ore}\ 26^{min.}\ 50^{sec.},\ 7$$

$$D = 52^{0},\ 5'\ 17'',\ 1$$

se cere să se găsiască coordonatele azimutale ale acestei stele pentru un punct depe ecuatorul terestru?

ST. N. MIREA.

Soluţie dată de D-nii: I. FUNDĂŢEANU, GH. HOGAŞ, E. GRIGORESCU, GH. LUCESCU, GH. PITIŞ şi AL. M. PANTAZI.

Transformăm ascensiunea dreaptă în grade, înmulţind cu 15.

Avem:

$$AR = 9^{ore}\,26^{min.}\,,\,50^{sec.}\,,\,7 \times 15 = \pi - 37^0\,,\,8$$

Coordonatele azimutale sunt: azimutul şi distanţa zenitală. Iau timpul sideral $\theta = 0$ şi avem $AR = -H$.

Avem:

$$\cos z = \cos D\ \cos AR = \cos 52^0\,,\,5'\,,\,17''\,,\,1 \times \cos 38^0\,,\,8'$$
$$= 0{,}61339 \times 0{,}78622 = 0{,}47825.$$

De unde:

$$z = 61^0\,,\,20'$$

Pentru determinarea lui A avem:

$$\sin z\ \cos A = -\sin D$$

de unde deducem:

$$\cos A = -\frac{\sin D}{\sin z} = -\frac{0{,}78930}{0{,}87743} = -0{,}82116$$

$$A = 122^0\,,\,40'.$$

Avem prin urmare:

$$z = 61^0\,20' \qquad A = 122^0\,,\,40'.$$

PROBLEMA 2031. λ *fiind o constantă dată, iar variabilele* $\alpha\,,\beta\,,u$ *şi* v *fiind legate prin relaţiile:*

$$\alpha = u + \lambda v\ ,\ \beta = u - \lambda v$$

să se arate că dacă avem:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta}\,\frac{D(y,z)}{D(\alpha,\beta)} + \frac{\partial^2 y}{\partial\alpha\,\partial\beta}\,\frac{D(z,x)}{D(\alpha,\beta)} + \frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\,\partial\beta}\,\frac{D(x,y)}{D(\alpha,\beta)} \equiv 0$$

avem şi

$$\sum\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - \frac{1}{\lambda^2}\,\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right)\frac{D(y,z)}{D(u,v)} \equiv 0.$$

ST. N. MIREA.

Soluţie dată de D-nii: O. MAYER, P. SERGESCU, S.-Lt. MIHAIL GHERMĂNESCU, AL. TIMOTIN, GH. C. TULEA, GR. C. ZAMFIRESCU, AL. PROCA, GH. D. ROŞIANU, AL. M. PANTAZI, N. KAUFMANN, C. AVRAMESCU şi ST. D. GHIOLU.

Avem:

$$u = \frac{1}{2}(\alpha + \beta), v = \frac{1}{2\lambda}(\alpha - \beta). \qquad (1)$$

Ca consecinţă imediată a teoremei lui J. BERTRAND, avem:

$$\frac{D(y, z)}{D(\alpha, \beta)} = \frac{D(y, z)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(\alpha, \beta)} \quad \text{etc.}$$

Cum însă

$$\frac{D(u, v)}{D(\alpha, \beta)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\lambda} & -\frac{1}{2\lambda} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2\lambda}$$

urmează

$$\frac{D(y, z)}{D(\alpha, \beta)} = -\frac{1}{2\lambda}\frac{D(y, z)}{D(u, v)} \quad \text{etc.}$$

Avem apoi, considerând pe x, y ca funcţiuni de u, v prin intermediul relaţiilor (1):

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \alpha} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial x}{\partial v}\right\}$$

şi

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha\, \partial \beta} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v}\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v}\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial \beta}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right\} \quad \text{etc.}$$

Din cele de mai sus rezultă:

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right)\frac{D(y, z)}{D(u, v)} + \ldots \equiv 0.$$

Notă. D-l T. POPOVICIU generalizează problema propusă pentru n variabile $v, v_1 \ldots v_n$.

PROBLEMA 2234. *Centrul unei sfere* S *care trece printr'un punct fix* O *descrie un plan dat* P. *Să se arate că planul radical al unei sfere fixe având centrul în* O *cu fiecare din sferele* S *trece printr'un punct fix. Ce devine teorema în cazul când centrul sferelor* S *descrie o linie dreaptă.*

ST. N. MIREA.

Soluţie dată de D-nii: MAX MENASSE, R. VEISBERG, RADU ST. AUGUSTIN, C. BULGĂREANU, E. GRIGORESCU, ST. D. GHIOLU şi P. BEJAN.

Fie R punctul diametral opus lui O în sfera S. Considerăm o secţiune făcută după diametrul OSR. Cele două sfere vor fi reprezentate prin 2 cercuri mari O şi S; II' reprezintă intersecţia planului radical cu planul de intersecţie. Triunghiul RI'O fiind dreptunghic, urmează că II' este polara punctului R faţă de cercul O.

In spaţiu, planul radical va fi plan polar al lui R în raport cu sfera fixă O. Când S descrie un plan dat P, R va descrie un plan Q omotetic cu P faţă de O în raportul $^1/_2$. Când R descrie planul Q, planul său polar, planul radical al celor 2 sfere trece printr'un punct fix, polul planului Q.

Când S descrie o dreaptă Δ, să considerăm planul de secţiune (O,Δ). Planul radical rămânând perpendicular pe acest plan iar intersecţia lui, II' va trece printr'un punct fix, polul dreptei descris de R. Urmează că planul radical trece în continuu printr'o dreaptă fixă, perpendiculară pe planul (O,Δ) în polul dreptei descrisă de R.

Au dat soluţia analitică D-nii: E. W. ABASOHN, AL. M. PANTAZI, SILVIU MARCELINO, N. KAUFMANN, S. KIVOVICZ, P. MELAS şi I. KIVOVICZ.

PROBLEMA 2448. *Se consideră într'un cerc* O *de rază variabilă, două secante* AB, CD *şi perpendicularele pe ele în extremităţile lor, care se întâlnesc în* E_0, E_1, L_0, L_1. — *Presupunând că punctele* (AD, CB), (AC, DB) *şi* O *sunt fixe, se cer locurile geometrice ale punctelor* E_0, E_1, L_0, L_1.

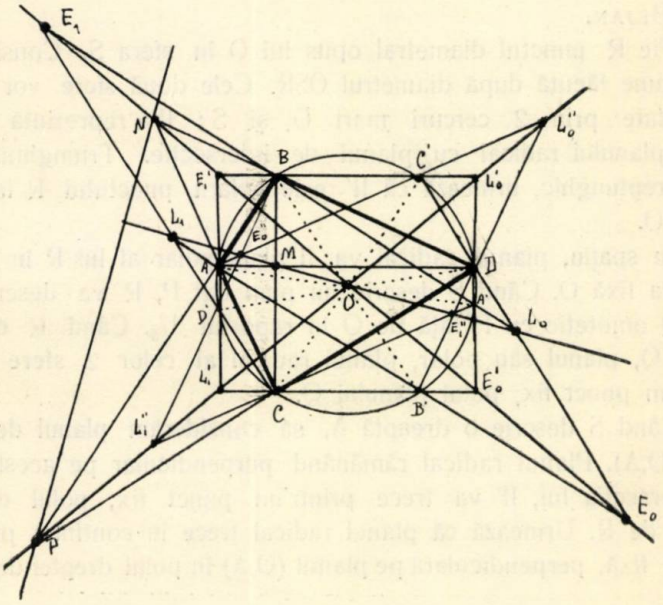
C. BULGĂREANU.

Fi M şi N punctele (AD, CB), şi (AC, DB) iar P punctul (AB, CD). Se notează cu A′, B′, C′, D′ punctele diametral opuse lui A, B, C, D în cercul O. — Dreptele AB′, DC′ se tae în E_0; BA′ şi CD′ în E_1; DC′ şi BA′ în L_0; AB′ şi CD′ în L_1.

Consider exagonul C′DAA′BC. Conform teoremei lui PASCAL punctele L_0 (C′D, A′B), M (DA, BC), O (AA′, CC′) sunt colineare.

Exagonul AB′BCD′D arată că L_1, O, M sunt colinerare.

Deci L_0, L_1 se află pe O M.



Considerând exagoanele B′ACC′DB şi BA′ACD′D se arată că şi punctele E_0, E_1, O, N sunt colineare.

Ar urma că dacă raza lui O variază, locurile cerute să fie dreptele fixe OM şi ON, ori se demonstrează imediat că dacă punctele O, M, N şi dreptele AB şi CD sunt fixe, raza cercului O nu poate să varieze. In adevăr se ştie că N P este polara lui M faţă de O şi că dacă Q este intersecţia lui OM cu NP, atunci OQ este perpendicular pe NP, iar

$$OM \times OQ = R^2$$

R fiind raza lui O. — Cum în membrul întâi factorii sunt constanți, rezultă că și R este constant.

In concluzie, rezultă că problema 2448 nu este o problemă de loc geometric, ci prin ea trebue să se ceară a se demonstră *că* E_0, E_1 *se află pe* ON, *iar* L_0, L_1 *pe* OM.

Bănuesc că aceasta trebuie să fi fost proprietatea pe care și-a bazat autorul problemei enunțul, așă cum a fost propus. Nu am soluția trimisă de propunător, pentru a vedeà interpretarea pe care a dat-o el.

Observațiuni. 1°. D-l M. Florescu a trimis o soluție în care începeà prin a spune că enunțul nu este clar și apoi a rezolvat analitic următoarea problemă:

Un cerc de rază variabilă și de centru fix taie 2 drepte fixe în A, B, C, D. — *Construind punctele* E_0, E_1, L_0, L_1 *ca în enunțul problemei 2448, se cer locurile acestor puncte.*

Astfel pusă, problema prezintă un interes particular, de aceia am trimis-o redacției pentru a fi propusă sub numele d-lui M. Florescu.

2°. Ceilalți rezolvitori, care au fost anunțați pe copertele numerelor anterioare, au întrebuințat relații de unghiuri sau relații metrice și au dedus fără rigoarea necesară că locurile cerute sunt dreptele OM și ON.

3°. Din soluția pe care am dat-o proprietății geometrice a punctelor E_0, E_1, L_0, L_1 se vede că centrul O al cercului nu a servit decât ca punct de întâlnire al dreptelor AA', BB',... sau ceiace este tot una, proprietatea că E_0 A, L_0 B,... sunt perpendiculare pe AB,... nu a fost utilizată decât spre a arătă că E_0 A trece prin intersecția lui BO cu cercul. — Această observație conduce la următoarea generalizare interesantă:

«Se dă un cerc ABCD *și un punct oarecare* O *fix în planul acestui cerc. — Fie* A', B', C', D' *intersecțiile dreptelor* OA, OB, OC, OD *cu cercul. — Să se arate că punctele* E_0 (AB' DC'), E_1 (BA', CD') *sunt pe* ON, *iar* L_0 (BA', DC'), L_1 (AB', CD') *sunt pe* OM. — M *și* N *fiind intersecțiile* (AD, BC) *și* (AC, BD).

4°. Se poate observà că E_0, E_1, L_0, L_1 sunt vârfurile patrulaterului obținut ducând perpendiculare pe AB și CD. — Dacă se duc însă perpendiculare pe AC și DB apoi pe AD și BC se obțin alte două patrulatere E'_0 E'_1 L'_0 L'_1, E''_0 E''_1 L''_0 L''_1. — Întrebuințând teorema lui Pascal, ca mai sus, se găsește următoarea teoremă interesantă:

In fie-care din vârfurile unui patrulater inscriptibil ABCD *se ridică perpendiculare pe laturile și diagonalele care concură în acele vârfuri. Se obțin astfel 12 perpendiculare care prin intersecția lor determină o serie de puncte dintre cari 4 se află pe* OM, 4 *pe* ON *și 4 pe* OP.

Această teoremă este adevărată și pentru cazul general când cele 12 drepte nu sunt perpendiculare ci fac unghiuri oarecare, dar se întâlnesc într'un punct O din planul cercului ABCD.

5°. Intru cât teorema lui PASCAL este adevărată pentru ori ce conică, proprietatea generală de la 4° se poate enunța în felul următor:

O *fiind un punct fix în planul* **conicelor** *care trec prin punctele fixe* A, B, C, D *se înseamnă cu* A', B', C', D' *a doua intersecție a dreptelor* OA, OB, OC, OD *cu una oarecare din aceste conice. Se duc dreptele* AB', AC', AD', *apoi* BA', BC', BD',... *Cele 12 drepte astfel obținute determină prin intersecția lor o serie de puncte din care 4 se află pe* OM, *4 pe* ON *și 4 pe* OP. *Se notează* M (AD, CB), N (AC, BD), P (AB, CD).

6°. Proprietatea de la 5° poate fi enunțată și sub formă de loc geometric. — În adevăr, prin cele 4 puncte A, B, C, D trec o infinitate de conice, pentru fie-care conică vom avea un E_0. E_1,... particular. Toate aceste puncte se găsesc pe dreptele fixe OM, ON, OP. — Deci în cazul general se poate spune că *atunci când se consideră toate conicele care trec prin* A, B, C, D *punctele* E_0, E_1, L_0, L_1, E'_0,... *construite ca la 6° descriu dreptele* OM, ON, OP.

7°. În fine, o ultimă observație pentru cazul particular de la 4°. — Se observă că $E_0\ E_1\ L_0\ L_1$, $E'_0\ E'_1\ L'_0\ L'_1$, $E''_0\ E''_1\ L''_0\ L''_1$ sunt paralelograme, ca având laturile opuse paralele. Cu aceasta observație proprietatea particulară de la 4° se poate enunță astfel:

Paralelogramele $E_0\ E_1\ L_0\ L_1$,... *construite ca la 4° au centrele în* O *și vârfurile pe* OM, ON, OP.

PROBLEMA 3942. *Admițând că suma și produsul a două numere este respectiv mai mare ca un același număr dat, în ce caz fiecare din acele numere este mai mare decât numărul dat?*

CĂPITAN I. LINTEȘ.

Fie k un număr dat, să presupunem:

$$x + y = k + a \quad \text{unde} \quad a > 0$$

$$xy = k + b \quad \text{»} \quad b > 0$$

x și y fiind rădăcinile ecuației:

$$X^2 - (k + a) \cdot X + (k + b) = 0.$$

Atunci ne propunem să vedem în ce caz rădăcinile acestei ecuații sunt mai mari decât numărul dat k?

Ori condiţiunile generale pentru o ecuaţie de forma:

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

sunt:

$$\frac{A \cdot k^2 + B \cdot k + C}{A} > 0 \text{ şi } -\frac{2Ak + B}{A} > 0.$$

Deci în cazul particular condiţiunile sunt:

$$\frac{k^2 - (k + a)\, k + (k + b)}{1} > 0$$

şi

$$-\frac{2k - (k + a)}{1} > 0$$

cari se reduc la:

$$k + b - k \cdot a > 0$$

$$-k + a > 0$$

sau:

$$k < \frac{b}{a - 1} \text{ şi } k < a.$$

Deci dacă avem $a < \frac{b}{a-1}$

atunci $k < a$

şi $b > a\,(a - 1)$

iar dacă $a > \frac{b}{a-1}$,

atunci avem: $k < \frac{b}{a-1}$,

şi $b < a\,(a - 1)$.

Dacă extindem discuţia şi la alte cazuri, raţionând analog, avem:

$x+y>k;\ xy>k$

$x>k$	$y>k$	$k<\frac{b}{a-1}$	$b<a\,(a-1)$
		$k<a$	$b>a\,(a-1)$
$x<k$	$y<k$	$\frac{b}{a-1}>k>a$	$b>a\,(a-1)$
		$a>k>\frac{b}{a-1}$	$b<a\,(a-1)$
$x>k$	$y<k$	$k<\frac{b}{a-1}$	—

$x+y<k;\ xy<k$

$x>k$	$y>k$	$-a>k>\frac{b}{a+1}$	$b>a\,(a+1)$
		$\frac{b}{a+1}>k>-a$	$b<a\,(a+1)$
$x<k$	$y<k$	$k>\frac{b}{a+1}$	$b<a\,(a+1)$
		$k>-a$	$b>a\,(a+1)$
$x>k$	$y<k$	$k<\frac{b}{a+1}$	—

$x+y>k;\ xy<k$

$x>k$	$y>k$	$k>\frac{b}{a+1}$	$b>a(a-1)$
		$k>-a$	$b<a(a-1)$
$x<k$	$y<k$	$-\frac{b}{a-1}>k>a$	$b<a(a-1)$
		$a>k>-\frac{b}{a-1}$	$b>a(a-1)$
$x>k$	$y<k$	$k>\frac{b}{a-1}$	—

$x+y<k;\ xy>k$

$x>k$	$y>k$	$k>\frac{b}{a+1}$	$b>a(a+1)$
		$k>a$	$b<a(a+1)$
$x<k$	$y<k$	$a>k>\frac{b}{a+1}$	$b<a(a+1)$
		$\frac{b}{a+1}>k>a$	$b>a(a+1)$
$x>k$	$y<k$	$k>\frac{b}{a+1}$	—

Au rezolvat problema în cazul particular D-nii: M. Velea, N. Mihăileanu, A. Buțan și Sub-Locot. I. Gh. Zamfirescu.

I. L.

PROBLEMA 3964. *Fie* ABC *şi* A'B'C' *două triunghiuri echilatere de acelaş centru, cu vârfurile în acelaş sens de rotaţie. Să se arate că triunghiurile sunt de trei ori omologice şi anume în fiecare din ordinele următoare:*

$$\begin{pmatrix} ABC \\ A'C'B' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} ABC \\ C'B'A' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} ABC \\ B'A'C' \end{pmatrix}.$$

D. BARBILIAN.

Soluţie. Insemnăm cu O centrul comun al triunghiurilor echilatere. Să unim pe A,B,C respectiv cu A', B', C',. Obţinem trei drepte AA', BB', CC' ale căror intersecţii două, câte două, formează un triunghiu A"B"C". Rotind figura formată de triunghiurile date ABC, A'B'C' în jurul centrului comun O, respectiv de 120^0 şi de 240^0, observăm că următoarele diviziuni colineare se suprapun, adică sunt egale:

$$A''B'C''B \ , \ B''C'A''C \ , \ C''A'B''A \ .$$

A fortiori urmează egalitatea următoarelor rapoarte anarmonice

$$(A''B'C''B) = (B''C'A''C) \ .$$

Dar raportul anarmonic nu se schimbă dacă permutăm în acelaş timp două perechi de litere. Aşadar:

$$(A''B'C''B) = (A''CB''C')$$

Cele două diviziuni, din amândoi membrii, au un punct omolog comun: intersecţia A" a dreptelor care le serveşte de bază. Se ştie că, în asemenea condiţii, dreptele B'C, BC', B"C" sunt concurente. Dar ele sunt tot una cu dreptele B'C, C'B, A'A.

Prin urmare triunghiurile ABC şi A'B'C' sunt omologice în prima din ordinele indicate. Proprietatea depinzând numai de *sensul* în care distribuim literele A',B',C' celui de al doilea triunghiu, şi nu de această distribuţie însăş, e clar că triunghiurile sunt omologice şi în celelalte două ordine.

S'a primit o foarte bună soluţie, bazată pe teorema lui MENELAUS dela D-l S-LT. S. G. ZAMFIRESCU, din Piteşti.

Corespondenţii noştrii, sau cel puţin rezolvitorul de mai sus al problemei, ar puteà întreprinde o cercetare analitică (ori elementară) completă a chestiunii precedente: Determinarea tuturor cazurilor când două triunghiuri echilatere sunt de două ori omologice (cea de a treia oară, rezultă ca o consecinţă) fie în ordinea *aciclică* (aceea din enunţ) fie în ordinea

ciclică, adică în ordinea corespunzătoare unui anumit sens de rotaţie. Rezultatele la care vor ajunge sunt remarcabile.

Poate că nu strică să indic pe scurt felul cum a fost găsită proprietatea precedentă.

Fie IOJ un triunghiu de referinţă şi ε rădăcina cubică complexă a unităţii. Avem atunci o omografie plană, numită ciclică, în legătură cu triunghiul. Ecuaţiile acestei omografii sunt:

$$\frac{x_1}{\varepsilon x} = \frac{y_1}{\varepsilon^2 y} = \frac{z_1}{z} .$$

Considerăm un punct P şi îl transformăm de două ori prin omografia precedentă. Insemnăm cu P_1 şi P_2 poziţiile astfel obţinute (poziţia care ar trebui însemnată cu P_3 coincide cu P).

Considerând un al doilea punct Q şi procedând la fel, obţinem un al doilea triunghiu QQ_1Q_2. Se verifică imediat că triunghiurile PP_1P_2 şi QQ_1Q_2 sunt de trei ori omologice în ordinea *aciclică*.

Presupunând că I şi T sunt punctele absolute ale planului, avem chiar proprietatea elementară din enunţ.

D. B.

PROBLEMA 3966. *Intre mărimile* a, b, c, *şi* x, y, z *există relaţiile:*

$$b^2 + c^2 = x^2 \quad ; \quad c^2 + a^2 = y^2 \quad ; \quad a^2 + b^2 = z^2.$$

Să se demonstreze identitatea:

$$4 . \Sigma a^2 b^2 \equiv (x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z).$$

Să se deă o interpretare geometrică acestei identităţi şi să se deducă deaici o nouă demonstraţie a ei.

ALEXANDRU NICULESCU

Soluţie. Dacă însemnăm cu π partea II-a a indentităţii propuse, avem succesiv:

$$\pi \equiv (x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)$$
$$\equiv [(y+z)^2 - x^2][x^2 - (y-z)^2]$$
$$\equiv [2yz + y^2 + z^2 - x^2] . [2yz - (y^2 + z^2 - x^2)].$$

Cum:

$$y^2 + z^2 - x^2 = 2a^2$$

rezultă:

$$\pi \equiv [2y \cdot z + 2a^2] \cdot [2yz - 2a^2] \equiv 4 \cdot (yz + a^2) \cdot (yz - a^2)$$
$$\equiv 4 (y^2 z^2 - a^4);$$

şi înlocuind pe y^2 şi z^2:

$$\pi \equiv 4 [(b^2 + a^2)(c^2 + a^2) - a^4]$$
$$\equiv 4 \Sigma a^2 \cdot b^2. —$$

Interpretare geometrică.

Relaţiile date între cele şase mărimi ne conduc a considerà tetraedrul tridreptunghic OABC, astfel că:

$$OA = a \quad ; \quad OB = b \quad ; \quad OC = c$$
$$BC = x \quad ; \quad CA = y \quad ; \quad AB = z .$$

Să calculăm în două feluri deosebite suprafaţa Δ-lui ABC; pentru aceasta e nevoie să cunoaştem înălţimea OE coborîtă din vârful tetraedrului pe planul de bază ABC.

Să ducem planul COD prin muchea CO şi perpendicular pe latura opusă AB. Se ştie că acest plan conţine dreapta OE; demonstraţia este de-altfel simplă: în adevăr AB fiind perpendiculară pe planul COD, va fi perpendiculară şi pe direcţia dreptei OE' ⊥ CD; deci OE' perpendiculară pe două direcţii din planul ABC, adică pe: AB şi CD, va fi perpendiculară pe planul ABC şi deci OE' se confundă cu înălţimea OE.

Cunoaştem pe de-altă parte relaţia:

$$(1) \qquad \frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

dintre înălţimea h şi cele două catete b şi c ale unui triunghiu dreptunghic, relaţie ce se poate deduce uşor din: $S = a \cdot h = b \cdot c$.

Vom avea atunci în Δ-ul dreptunghic COD:

$$\frac{1}{OE^2} = \frac{1}{OD^2} + \frac{1}{c^2}$$

şi în Δ-ul dreptunghic AOB:

$$\frac{1}{OD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

înlocuind pe OD, obţinem:

ASOCIAŢIUNII SIBIIU

(2) $$\frac{1}{OE^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

relația căutată, cunoscută și care generalizează relația (1).

Avem atunci:

$$\Sigma a^2 . b^2 = a^2b^2c^2 . \Sigma \frac{1}{a^2} = \frac{a^2 . b^2 . c^2}{OE^2} ;$$

dacă însemnăm cu V_1 volumul prismei construită pe muchiile OA, OB, OC; cu V volumul piramidei OABC și S suprafața Δ-lui ABC avem:

$$V_1 = a . b . c \quad ; \quad V_1 = 6V = a . b . c ;$$

deci: $$\frac{abc}{OE} = \frac{6V}{OE} = 2\ \frac{3V}{OE} = 2S .$$

și prin urmare:

(3) $$\Sigma a^2 . b^2 = \left(\frac{abc}{OE}\right)^2 = 4S^2$$

Se cunoaște însă formula care dă suprafața unui Δ-iu ABC în funcție de laturile x, y, z:

(4) $$S^2 = p\,(p - x)\,(p - y)\,(p \quad z)$$

unde: $$2p = x + y + z .$$

Egalând expresiile (3) și (4) avem identitatea propusă.

Observând acum că:

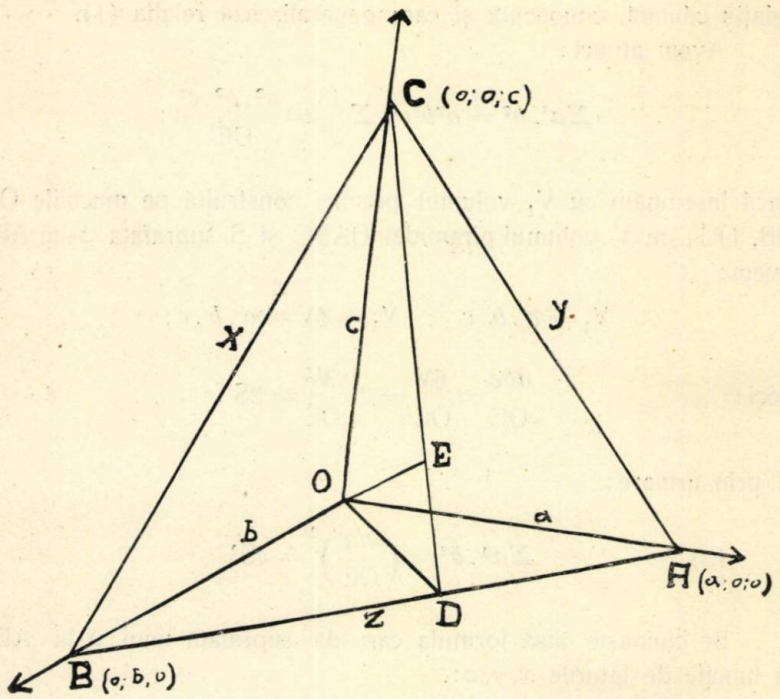
$$\text{Supr. OAB} = \frac{a . b}{2}; \quad \text{supr. OAC} = \frac{c . a}{2}; \quad \text{supr. OBC} = \frac{b . c}{2}$$

rezultă din (3) și (4):

(5) $$(OAB)^2 + (OBC)^2 + (OCA)^2 \equiv (ABC)^2,$$

de aci interpretarea geometrică:

„Patratul suprafeţei unui triunghiu este egal cu suma patratelor proecţiilor acestui triunghiu pe trei plane dreptunghiulare două câte două."



Teorema aceasta nu este decât un caz particular al unei teoreme mai generale de geometrie analitică.

Au rezolvat bine problema: D-şoara MARIA AL. LICHERDOPOL-BURO şi D-nii BUŢAN M. AURELIU (cl. VI Lic. militar M.-Dealu); CINSCHY CONST.; GHIŞOIU I. PETRE (Şc. Politechnică Buc.); IONESCU I. V. (cl. VII Lic. M. Eminescu Buc.); LUPESCU GH. CONST. (Lic. Roman-Vodă); NEGREA A. MIRCEA-LEONTE (student Buc.); MIHĂILEANU N. NICOLAE (cl. VII Lic. Constanţa); POPESCU-STĂNEŞTI I. M. (cl. V Lic. Sf. Iosef Buc.); Sublocot. AURELIAN STAN (Cluj); VASU VASILE; VELEA MIHAIL (student Cluj); ZARDA ION.

Au rezolvat problema fără interpretarea geometrică ori au greşit această interpretare d-nii: Sublocot. ZAMFIRESCU I. GH. (Piteşti); VARLAM M. PETRE (elev cl. V. Lic. M. Eminescu Buc); ŞERBAN C. IOV şi EPURAN A. ION (elevi Lic. militar Tg.-Mureş).

Observări.

1. Majoritatea corespondenţilor au utilizat pentru interpretarea geometrică rezultate dela problema 3965 propusă de d-l prof. Gh. Ţiţeica; o bună parte au presupus cunoscută formula (5); ori trebuia să se ajungă la aceasta.

2. Unii corespondenţi au folosit pentru efectuarea produsului π şi identităţile:

$$2\Sigma x^2 . y^2 - \Sigma x^4 \equiv \pi$$

$$4x^2 . y^2 - (x^2 + y^2 - z^2)^2 \equiv \pi .$$

3. Formula (2) se puteà deduce şi pe calea geometriei analitice astfel: $(a, 0, 0)$; $(0, b, 0)$; $(0, 0, c)$ fiind respectiv coordonatele vârfurilor A, B, C, ecuaţia planului ABC este:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$$

sau: $$bc . x + ca . y + ab . z - abc = 0;$$

distanţa originei la acest plan va fi atunci:

$$d = \frac{abc}{\sqrt{b^2 . c^2 + c^2 a^2 + a^2 . b^2}}$$

care se poate pune uşor sub forma (2).

4. D-l Mihăileanu N. N. (Constanţa) a dat o interpretare geometrică plană problemei, construind pe laturile Δ-lui ABC triunghiuri dreptunghice corespunzătoare relaţiilor date.

5. Atragem în general atenţia corespondenţilor asupra redijării manuscriselor lor; e de dorit mai multă grije, osteneală şi control în ceeace ne trimit. Dăm pildă pe d-l Mihail Velea (stud. Cluj) pentru manuscrisul d-sale atât de îngrijit.

Problema aceasta este în strânsă legătură cu problema 3965. Fără să fi avut cunoştinţa de ea — d-l prof. Gh. Ţiţeica mi-a spus că a propus-o elevilor şcoalei politechnice, — trebuie să recunosc totuş ca fost elev al d-sale o influenţă... dela distanţă, căci numai aşà s'ar puteà explicà coincidenţa acestor două probleme.

6. In ultimul moment s'au mai primit soluţii dela d-nii: Ionescu Mircea, cl. VII Lic. militar Tg.-Mureş şi Parepeanu I. Lic. Braşov (2 soluţii); o altă soluţie e fără autor.

Al. N.

PROBLEMA 3970. *Dacă* $\alpha + i\beta$ $(\beta \neq 0)$ *este o rădăcină de modul 1 a ecuației*

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

atunci 2 $(\alpha + 1)$ *este o rădăcină a ecuației:*

$$x^3 + (a - 5)\, x^2 + (b - 3a + 6)\, x + a - b + c - 1 = 0.$$

N. CIORĂNESCU.

Soluție dată de D-nii: T. GOSPODIN, M. VELEA și I. ZARDA (Toți din Cluj).

Se știe că dacă o ecuație cu coeficienți reali admite o rădăcină imaginară, admite atunci și conjugata ei. Deci rădăcinile ecuației:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

sunt:

$$\alpha + i\beta \quad , \quad \alpha - i\beta \quad x_1.$$

Scriind relațiile dintre rădăcini și coeficienți, obținem:

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha + i\beta + \alpha - i\beta + x_1 = -a \\ (\alpha + i\beta)\,(\alpha - i\beta) + x_1(\alpha + i\beta) + x_1(\alpha - i\beta) = b \\ (\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta)\, x_1 = -c. \end{cases}$$

Făcând reducerile posibile și ținând seama că $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, obținem:

$$(2) \quad \begin{cases} 2\alpha + x_1 = -a \\ 1 + 2\alpha\, x_1 = b \\ x_1 = -c. \end{cases}$$

Din relațiile (2) deducem:

$$(3) \qquad 2\alpha = c - a.$$

$$(4) \qquad c\,(c - a) - 1 + b = 0,$$

care-i relația de condiție la care trebuie să satisfacă coeficienții.

Din (3) avem:

$$2\alpha + 2 = c - a + 2.$$

Inlocuind această expresie $c - a + 2$ în ecuația:

$$x^3 + (a - 5)\, x^2 + (b - 3a + 6)\, x + a - b + c - 1 = 0,$$

obținem:

$$(c-a+2)^3 + (a-5)\,(c-a+2)^2 + (b-3a+6)(c-a+2) + a - b + c - 1 = 0.$$

Desvoltând şi făcând reducerile avem:

$$c^3 - 2c^2a + c^2 + a^2c - c + a - ac + bc - ab + b - 1 = 0$$

sau

$$c(c-a)^2 + c(c-a) - 1 + b - (c-a) + b(c-a) = 0 \quad \therefore$$

$$c(c-a) - 1 + b + (c-a)[c(c-a) - 1 + b] = 0 \quad \therefore$$

$$[c(c-a) - 1 + b][1 + c - a] = 0$$

dar în baza relaţiei (4)

$$c(c-a) - 1 + b$$

este nul deci $2(\alpha + 1)$ e rădăcină, verificarea făcându-se în baza condiţiei (4).

Soluţii analoage date de D-nii: Sub-Locot. Aurelian I. Stan, Const. V. Cinsky, Adrian Gheorghiu, Mircea L. A. Negrea, Nicolae I. Gheorghe, St. Olteanu, Mircea P. Ţiucra.

N. C.

PROBLEMA 3982. *Numărul de ordine* abcd *al unei probleme propuse, publicată în 1929—1930 în „Gazeta Matematică" se bucură de următoarele proprietăţi:*

1) $$a + b + c + d = 13.$$

2) *Numerile* ab, bc, ca *sunt divizibile prin* 13.

Câte probleme al căror număr de ordin se bucură de aceleaşi proprietăţi, s'au mai publicat în „Gazeta Matematică"? Câte se vor mai publica?

Miron Nicolescu.

Soluţie dată de D-l Ioan Gh. Popa (cl. VII-a Lic. Oltenita).

Numerile *ab, bc, ca* fiind divizibile prin 13, vor fi unele din numerile 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91. Dintre acestea vom elimină dela început pe 78, pentru care suma cifrelor este superioară lui 13. Pentru celelalte, vom formă grupe de câte 3 numere astfel încât fiecare să înceapă cu cifra cu care se sfârşeşte precedentul.

Obţinem astfel grupele

13, 39, 91
26, 65, 52
39, 91, 13
52, 26, 65
65, 52, 26
91, 13, 39.

Se verifică pentru fiecare grup că avem:

$$a + b + c = 13$$

deci $d = 0$. Obţinem prin urmare numerele:

1390, 2650, 3910, 5260, 6520, 9130.

Problema propusă în „Gazeta Matematică", anul 1929—1930, şi al cărui număr de ordine se bucură de proprietăţile citate mai sus, este problema 3910, propusă de D-l MIRON NICOLESCU.

Au mai fost publicate două probleme, satisfăcând aceloraşi condiţii:

1390 şi 2650.

Se vor mai publică 3:

5260, 6520 şi 9130.

Au rezolvat problema şi D-nii: IONIŢĂ I. MARIN (cl. IV, Lic. „Mihail Eminescu", Bucureşti), GEORGE ŞT. ROŞCA, N. A. DOBROGEANU, HAIM A. BEROL (Liceul Naţional, Iaşi), CONST. GH. LUPESCU (cl. VII, Lic. „Roman-Vodă"), AURELIU M. BUŢAN (cl. VI, Lic. Militar „Nicolae Filipescu"), CONST. I. NAFORNIŢĂ (Lic. Militar Tg.-Mureş), ALEXANDRU D. STOICA (cl. III, Lic. „Marele Voevod Mihai", Bucureşti).

Din „Soluţia" D-lui EPURAN A. IOAN, reţinem concluzia:

«*Deci* numărul din 1929—1930 a fost 9130. S'au mai publicat 5. Nu se va mai publică niciuna».

Observare. Ţinând seama de faptul că $d = 0$, problema dată se transformă în următoarea: Să se găsească numerile abc ştiind că:

I) $a + b + c = 13$, II) $bc \equiv 0 \pmod{13}$, III) $ca \equiv 0 \pmod{13}$, IV) $ab \equiv 0 \pmod{13}$.

E uşor de văzut că aceste patru condiţiuni nu sunt independente şi că două oarecari dintre ele atrag şi pe celelalte două. Intr'adevăr, să presupunem, în primul loc, că avem:

$$(1) \qquad \begin{cases} 10b + c = 13m \\ 10c + a = 13m' \end{cases} \qquad (m,\ m' \text{ întregi}).$$

Deducem de aici imediat:

$$10(10a + b) = 1300m' - 13m - 1001c \equiv 0 \pmod{13},$$

pentrucă $1001 = 13 \times 77$. Cum 10 este prim cu 13, rezultă

$$(2) \qquad 10a + b = 13m'' \qquad (m'' \text{ întregi}).$$

Adunând (1) şi (2) obţinem:

$$11(a + b + c) = 13(m + m' + m'')$$

şi, pentrucă 11 este prim cu 13, rezultă:

$$a + b + c = 13k;$$

k poate fi egal cu 1 sau 2. Insă, dacă avem $k = 2$, atunci una cel puţin dintre cifrele a, b, c, trebuie să fie egală cu 9.

Fie deci $a = 9$. Rezultă:

$$b + c = 17.$$

deci una dintre cifrele b, c trebuie să fie egală cu 9. Fie $b = 9$; rezultă $c = 8$. Cum aceste rezultate contrazic ipoteza ca bc şi ca sunt divizibile prin 13, rezultă că nu putem aveà $k = 2$, deci:

$$a + b + c = 13.$$

In mod analog se va arătà că ipotezele

1) $a + b + c = 13$, 2) $10b + c = 13m$

atrag după ele

3) $10c + a = 13m'$, 4) $10a + b = 13m''$.

Lăsăm această demonstraţie, ca exerciţiu, în seama corespondenţilor noştri. Va fi deajuns să se arate că 1) şi 2) atrag pe 3), şi atunci condiţia 4) va rezultà din demonstraţia de mai sus.

S'au mai primit soluţii şi dela D-nii: N. N. Aldea (Student, Bucureşti), Const. N. Avram (Şcoala Militară de Geniu, Bucureşti), Gh. A. Ciocoiu-Bârlad, Tudor Gospodin (Student, Cluj), Emilian Mereuţă (Student, Bucureşti), Nic. N. Mihăileanu (Liceul Constanţa), I. Parepeanu, Const. D. Rusu (Liceul Constanţa), Mihail Velea (Student, Cluj).

M. N

---

*PROBLEMA 3990. *Un motor cu explozie cumpărat cu 400.000 lei, este garantat pentru 500 ore de funcţionare, consumaţia lui costând în mediu 3 lei pentru un cal-oră. Vânzătorul propune însă cumpărătorului să-i furnizeze, pentru acelaş preţ, acelaş motor, însă cu un alt carburator, care ar micşorà consumaţia motorului cu 30% dar reduce garanţia de funcţionare cu 20%. Se întreabă, ce alternativă va alege cumpărătorul?*

Căpitan I. Linteş.

Fie în general N lei costul motorului, n ore garanția de funcționare, l lei costul unui cal-oră, W puterea în cai a motorului, $\alpha^0/_0$ procentul de reducere al garanției de funcționare și $\beta^0/_0$ procentul de reducere al costului consumației.

Pentru o durată de funcționare de n ore, în prima alternativă costul total va fi:

$$C_1 = l \,.\, n \,.\, W + N.$$

Iar în a doua alternativă va fi:

$$C_2 = l \,.\, n \,.\, W \,.\left(1 - \frac{\alpha}{100}\right) \,.\left(1 - \frac{\beta}{100}\right) + N$$

$$+ n \,.\, \frac{\alpha}{100} \,.\, l\left(1 - \frac{\beta}{100}\right) \,.\, W$$

$$+ \frac{\frac{\alpha}{100}}{1 - \frac{\alpha}{100}} \,.\, N$$

$$= l \,.\, n \,.\, W \,.\left(1 - \frac{\beta}{100}\right) + N \,.\left(1 + \frac{\alpha}{100 - \alpha}\right),$$

unde am presupus că vom utiliză un motor cu carburatorul al doilea, timp de $\left[n \,.\left(1 - \frac{\alpha}{100}\right)\right]$ ore, apoi vom mai cumpără încă o fracțiune de motor, tot cu al doilea carburator, necesar numai duratei de funcționare de $\left[n \,.\, \frac{\alpha}{100}\right]$ ore.

Costul acestei fracțiuni de motor va fi:

$$\frac{n \,.\, \frac{\alpha}{100}}{n\left(1 - \frac{\alpha}{100}\right)} \,.\, N \text{ lei}$$

Apoi dacă:

$$C_1 - C_2 < O,$$

înseamnă că prima alternativă este mai bună; iar dacă:

$$C_1 - C_2 > O,$$

înseamnă că alternativa a doua este mai bună.

Pentru cazul numeric al problemei 3990, avem:

$$C_1 = 3 \times 500 \times W + 400.000$$

şi

$$= 1500 \cdot W + 400.000 \text{ lei}$$

$$C_2 = 1050 \cdot W + 500.000 \text{ lei}$$

Deci:

$$C_1 - C_2 = 450 \cdot W - 100.000.$$

De unde vedem că pentru:

$$W < \frac{100.000}{450} = 222{,}2 \text{ cai-vapori}$$

avem:

$$C_1 - C_2 < 0,$$

deci prima alternativă este mai bună căci costul total va fi mai mic.

Iar pentru:

$W > 222{,}2$ cai-vapori, alternativa a doua va fi mai bună.

Pentru $W = 222{,}2$ cai, alternativele sunt egale.

Observaţiuni:

1) Raţionamentul dat mai sus se poate extinde şi la o durată oarecare de T ore de funcţionare, în care caz costurile totale vor fi:

$$C_1 = \left[l \cdot n \cdot W + N \right] \cdot \frac{T}{n}$$

$$C_2 = \left[l \cdot n \cdot W \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{\beta}{100}\right) + N \right] \cdot \frac{T}{n\left(1 - \frac{\alpha}{100}\right)} \cdot$$

2) A rezolvat foarte bine problema 3990, D-l V. I. C. Vissarion.

I. L.

---

*PROBLEMA 3992. *Să se arate că numerele:*

$$11 \ldots 11088 \ldots 889 \text{ şi } 44 \ldots 44355 \ldots 56,$$

la cari repetările indicate se fac de acelaşi număr de ori, sunt pătrate perfecte.

I. V. Mătieş.

Soluţie dată de Doamna Lygia Mirescu.

Dacă împărţim prin 9 care este un pătrat perfect, pătratul perfect:

$$99 \ldots 99800 \ldots 001$$

menţionat de matematicianul IBN AL-BANNA (născut în Maroc la 1252 sau 1257) în cartea sa «Talkhys amali al Kissab» şi în «G. M.» VII. pag. 168, găsim tocmai primul număr din enunţ, care este deci pătrat perfect. Imulţind acest număr cu 4 obţinem pe cel deal doilea număr din enunţ şi în consecinţă şi acesta este tot un pătrat perfect.

Soluţie dată de D-nii: Sub.-Lt. A. I. STAN (Cluj); N. N. ALDEA (stud. Buc.); VLADIMIR CRIVĂŢ (Şc. Politechnică Buc.); I. A. EPURAN (cl. 7 lic. militar Tg.-Mureş); HARALAMB P. IONESCU-BISS (student); MIRCEA GH. IONESCU (elev cl. 7); NICOLAE N. MIHĂILEANU (Lic. Constanţa); I. PAREPEANU (elev. cl. 7 Lic. Braşov); TRAIAN PUTA (stud. Cluj); C. D. Rusu (elev Lic. Constanţa); VASILE VASU (stud. Cluj); MIHAIL VELEA (stud. mat. Cluj) şi N. VELICESCU (student).

Să însemnăm cu N primul număr din enunţ. Admiţând că cifrele identice 1 şi 8 se repetă de n ori fiecare, care face ca N să aibă $2n+2$ cifre, numărul considerat se poate descompune astfel:

$$N = \underbrace{11\ldots1}_{n}\ \underbrace{000\ldots00}_{n+2} + 8\,\underbrace{(11\ldots110)}_{n+1} + 9,$$

care se mai poate scrie:

$$N = (10^{2n+1} + 10^{2n} + \ldots + 10^{n+2}) + 8(10^{n} + 10^{n-1} + \ldots + 10) + 9$$

şi efectuând sumele din paranteze:

$$N = \frac{10^{2n+2} - 10^{n+2}}{9} + 8\,\frac{10^{n+1} - 10}{9} + \frac{81}{9}$$

$$\therefore \quad N = \frac{10^{2(n+1)} - 10 \cdot 10^{n+1} + 8 \cdot 10^{n+1} - 80 + 81}{9}$$

$$\therefore \quad N = \frac{10^{2(n+1)} - 2 \cdot 10^{n+1} + 1}{9} = \left(\frac{10^{n+1} - 1}{3}\right)^2$$

adică N este pătratul perfect al numărului $\underbrace{33\ldots33}_{n}$.

Dacă notăm acum cu N_1 al doilea număr din enunţ, observăm uşor că avem:

$$N_1 = 4N = \left[\frac{2(10^{n+1} - 1)}{3}\right]^2$$

adică şi N_1 este un pătrat perfect, al numărului $\underbrace{66\ldots66}_{n}$.

Observaţie: D-l HARALAMB P. IONESCU-BISS se referă la exerciţiul 18—XXXV—196, din care rezultă forma lui N când:

$$n = m + 2 \; ; \; p_2 = 2 \; ; \; \alpha = -\beta = \frac{1}{3} \; ; \; B = 10$$

şi forma lui N_1 când:

$$\alpha = -\beta = \frac{2}{3} \; .$$

acestea în cazul considerat de D-sa, că numerele date au $2n + 4$ cifre.

CPT. GH. N.

---

*PROBLEMA 3998. *Fie* ABC *un triunghiu dreptunghic în* A; *se duce bisectoarea* BD *a unghiului* B; *se ridică apoi în* C *o perpendiculară pe* AC *de mărime* CE = BC.

Să se arate că:

$$\sphericalangle CED = \sphericalangle \frac{B}{2} \; .$$

Să se deducă apoi o demonstraţie geometrică a formulei:

$$\operatorname{cotg} . \frac{B}{2} = \frac{a + c}{b} \; .$$

MARIN P. CHIŢU.

Soluţie dată de: D-na ŞTEFANIA CĂPITAN TRUŢESCU (Cluj); D-rele: ELEONORA ANTONIU (Cluj) şi MARIANA ABRAMESCU (studentă la mat. Cluj); D-nii Sublocotenenţi: AURELIAN STAN şi I. ZAMFIRESCU; D-nii: N. N. ALDEA (stud. Buc); A. EM. BĂDESCU; GAB. A. CĂLINESCU (Lic. „Văcărescu", Târgovişte); I. D. CÂRSTOIU (st. Şc. Politech. Buc.); C. CONSTANTINESCU (Lic. Militar, Chişinău); A. GANEA (elev cl. VI Lic. Militar «N. Filipescu»); G. V. GHIUŢĂ (Bacău); N. GLUŞCO (st. Cluj); EM. MEREUŢĂ (st. mat. Buc.); N. N. MIHĂILEANU (elev Lic. Constanţa); I. MOODY (st. Cluj); I. PAREPEANU (cl. VII Lic. Braşov); N. PATRAULEA; G. ST. ROŞCA; C. D. RUSSU; (cl. VII, Lic. Constanţa); V. VASU, N. D. ZANE (cl. VI Lic. Sf. Iosif) şi L. C. BURCHI, N. Z. POPA, P. SULLĂ, I. ŞERBAN (elevi cl. VI Lic. Militar Chişinău).

Bisectoarea BD ne permite să scrim:

$$\frac{DA}{DC} = \frac{AB}{CB} = \frac{AB}{CE}$$

căci prin construcţie avem: BC = CE.

Rezultă de aci că triunghiurile dreptunghice DAB şi DCE sunt asemenea şi deducem imediat egalitatea:

$$\sphericalangle \text{CED} = \sphericalangle \frac{\text{B}}{2}.$$

Aşezând acum convenabil primele două rapoarte de mai sus şi observând figura, obţinem:

$$\frac{\text{CB}}{\text{DC}} = \frac{\text{AB}}{\text{DA}} = \operatorname{cotg} \frac{\text{B}}{2} = \frac{\text{AB} + \text{CB}}{\text{DC} + \text{DA}} = \frac{a+c}{b}$$

adică s'a satisfăcut şi partea ultimă a problemei.

Observaţii.

1°. O mică parte din corespondenţi au dedus egalitatea unghiurilor, cerută de problemă, demonstrând că patrulaterul CDBE este inscriptibil şi recomand — ca exerciţiu — şi celorlalţi să refacă demonstraţia pe această cale. Ea este posibilă atunci când construcţia se face de natură a avea punctele E şi B de aceiaşi parte a catetei AC.

2°. O altă parte din rezolvitori, şi anume acei cari au făcut construcţia astfel că punctele B şi E se găseau de o parte şi de alta a catetei AC, au demonstrat egalitatea unghiurilor remarcând că triunghiul BCE este isoscel prin construcţie şi arătând fie că punctul E' (unde dreapta BD taie pe EC) se confundă cu E, fie că D' (unde dreapta BE taie pe AC) se confundă cu D. Doi din rezolvitori însă (şi nu din cei mai tineri) au tras dela început concluzia că unghiurile $\text{ABD} = \frac{\text{B}}{2}$ şi CED sunt egale ca alterne interne ale transversalei EB!

Cpt. Gh. N.

*EXERCIŢII

52. Fără a face împărţirea, să se arate că restul diviziunii numărului $\text{N} = 111\ldots11$ prin 37 este 1 sau 11, după cum numărul cifrelor lui N este de forma $3n + 1$ sau $3n + 2$.

Al. A. Roşu.

R. Folosindu-ne de exerciţiul 10 din *Culegerea de Probleme, Aritmetica, XIV*, despărţim pe N în grupe de câte trei cifre dela dreapta spre stânga, adunăm grupele şi împărţim suma cu împărţitorul. Restul sumei astfel obţinute este acelaş cu al numărului considerat.

In cazul de faţă, ţinând seama că $111 = \text{M}37$, enunţul exerciţiului apare evident.

53. Să se găsiască numărul *ababab* ($ab = p^2$), care împărţit cu numărul *ccc* dă câtul *aadb*.

N. N. Mihăileanu.

R. Ţinând seama de numărul cifrelor câtului, deducem că $c = 1$.

Se observă apoi că grupul $ab = 16, 25, 36, 49, 64, 81$.

Impărţind numerile obţinute cu 111, găsim respectiv câturile 1456, 2275, 3276, 4459, 5824, 7371, din care numai 2275 şi 4459 sunt soluţiuni coresponzătoare numerilor 252525 şi 494949, având $d = b \pm a$.

54. *Dacă* φ_i (N) *este indicatorul de ordinul* i *al lui* N, *avem inegalităţile*

$$\varphi_i (N) \leqslant N - i$$

$$\varphi_i (N) [\varphi_{i+1} (N) + 1] \leqslant \varphi_{i-1} (N) [\varphi_i (N) - 1] + 1.$$

N. O. Zaharia.

R. Avem

$$\varphi_1 (N) \leqslant N - 1$$
$$\varphi_2 (N) = \varphi_1 [\varphi_1 (N)] \leqslant \varphi_1 (N) - 1$$
$$\varphi_3 (N) = \varphi_1 [\varphi_2 (N)] \leqslant \varphi_2 (N) - 1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_i (N) \leqslant \varphi_{i-1} (N) - 1$$
$$\varphi_{i+1} (N) \leqslant \varphi_i (N) - 1.$$

Adunând primele i inegalităţi se obţine prima inegalitate din enunţ. Inmulţind membru cu membru ultimile două, se obţine cea de a doua inegalitate din enunţ.

PROBLEME PROPUSE

*4031. Să se determine cifrele a şi b aşa fel încât expresiunea: $E = 1931a1929^3 \pm 1929b1931^3$ să fie divizibilă cu *1930*.

Căpitan I. Linteş.

*4032. Să se găsiască un număr de trei cifre astfel că dacă ar fi considerat ca reprezintând un număr scris în baza 15, ar fi tocmai dublul lui.

N. C.

4033. Să se găsiască numerele A şi B întregi, ştiind că produsul lor este de k ori (k întreg) mai mare decât suma lor.

Caz particular: $k = 2$.

Miron Nicolescu.

*4034. O Bancă dă $6^0/_0$ la sumele ce i se depun spre fructificare, însă dobânzile nu curg decât dela 1 ale lunii care urmează lunii în care se face depunerea şi ia $15^0/_0$ dobândă la orice sumă împrumutată de Bancă, dobânzile fiind datorate din ziua în care se face împrumutul. Dobânzile cuvenite particularilor nu se adună la capital, nici cele datorite băncii nu se scad din capital, de cât la finele anului sau la lichidarea contului.

In aceste condiţiuni o persoană a depus anul acesta la acea bancă 175.000 lei la 3 Ianuarie, apoi 6.500 la 25 Ianuarie; a luat dela bancă 9.000 lei la 16 Februarie; a depus 6.000 lei la 26 Februarie; a luat 30.000 lei la 13 Martie; a depus 3.000 lei la 29 Martie şi alţi 12.000 la 16 Aprilie.

Care este situaţia contului pe ziua de 1 Iunie?

I. Ionescu.

*4035. Să se construiască un triunghiu cunoscând o latură, centrele cercurilor înscris şi circumscris şi razele lor.

D. Arg. Dumitrescu.

*4036. Fie triunghiul ABC înscris în cercul O. Fie A_1, B_1, C_1 picioarele înălţimilor sale şi B_2, C_2 proiecţiunile vârfurilor B_1C_1 pe tangenta la O în A. Să se demonstreze:

1°. Cercul $A_1B_2C_2$ e tangent la BC.

2°. Cercurile $A_1B_2C_2$ şi AB_1C_1 sunt concentrice.

S-lt. I. Gh. Zamfirescu.

4037. O prismă cu înălţimea de 6 dm e cufundată în apă. Să se găsească înălţimea părţii intrate în apă, precum şi densitatea materialului din care este făcută prisma, ştiind că dacă e cufundată în alcool (spirt), înălţimea părţii cufundate este egală cu înălţimea părţii rămase deasupra apei.

Se va lua pentru densitatea alcoolului $d = 0{,}838$.

M. Ghermănescu.

4038. Fie $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}\gamma$ rădăcinile ecuaţiei

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0.$$

Ce valori vor luà coeficienţii p, q şi r, în cazul când $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$, pentru ca rădăcinile să se rapoarte ca numerile 3, 7, 6? In aceste condiţii să se afle rădăcinile ecuaţiei date.

Iuliu Deac.

4039. Hiperbolele lui Apollonius a două puncte A şi B faţă de o conică (C) se taie într'un punct I de pe dreapta AB.

Ad. C. Gheorghiu.

4040. Se dau dreptele fixe Δ, Δ_1 şi se cere locul punctelor de intersecţie al perpendicularelor ridicate pe ele în punctele lor de intersecţie cu un cerc de rază variabilă şi cu centrul într'un punct fix din planul celor două drepte.

U. M. Florescu.

ERATĂ. La pag. 370, finele articolului «*Dimensionarea unui aerodrom*» se va adăugà numele autorului: *Căpitan Gh. Niculescu.*

BIBLIOTECA „ASOCIAŢIUNII" SIBIIU

BOLETIN MATEMATICO

FUNDAT ÎN ANUL 1928. — ABONAMENT ANUAL: 400 LEI

BOLETIN MATEMATICO ELEMENTAL

FUNDAT ÎN ANUL 1930. — ABONAMENT ANUAL: 125 LEI

Director: Dr. B. I. BAIDAFF

SUNT CELE MAI IMPORTANTE PUBLICAȚIUNI PERIODICE MATEMATICE DIN AMERICA DE SUD

SE PRIMESC ABONAMENTE PENTRU ANUL AL IV (IAN. — DEC. 1931)

ABONAMENTELE ȘI CORESPONDENȚA SE VOR TRIMITE LA ADRESA:

BOLETIN MATEMATICO, Belgrano 975, Buenos-Aires, Rep. Argentina.

Dela Ianuarie 1928 până în Octomvrie 1930 s'au publicat articole și note dela Domnii:

F. Anguita, B. I. Baidaff, F. Cernuschi, Cl. C. Dassen, A. Garrigos și **J. Tschlek,** Buenos-Aires (Rep. Argentina), **J. Hartmann,** La Plata (Rep. Argentina), **C. Dieulefait** și **E. Natale,** Rosario (Rep. Argentina), **O. Márquez,** Salta (Rep. Argentina), **M. A. Basoco** și **E. T. Bell,** Pasadena (California), **M. Krawtchouk** și **N. Kryloff,** Chiev (U. R. S. S.), **J. Gonzalez Perera, S. José** (Uruguay), **B. Jekhowsky,** Bordo (Francia), **W. Lewitzky,** Lemberg (Polonia), **O. J. Ramler,** Washington (Statele Unite) **J. Shohat,** Ann Arbor (Statele Unite), **D. M. J. Sommerville,** Wellington (N. Zelandia), **V. Thébault,** Le Mans (Francia), **O. Szász,** Frankfurt a. M. (Alemania), **G. Vivanti,** Milano (Italia), **J. R. Wilton,** Adelaida (Sud Australia).

Articolele, notele şi problemele însemnate cu * se referă la matematicile elementare (cursul de liceu).

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Aldea N. N. (4008); *Cojocaru V. I.* (4014); *Faţe Mărgărit* (3970); *Florescu B. I.* (P); *Ghişoiu I. P.* (3984, 92, 95, 98, 4003, 09); *Halperin A.* (3995, 98); *Hiparin I.* (4001); *Mihăileanu N.* (4019), 27, P); *Negrea Mircea-Leonte* (4008, 19); *Olteanu Ştefan* (3952); *Popescu V.* (N); *Popescu St. M.* (4015); *Puta Traian* (3980); *Stoica Al.* (4018); *Thébault V.* (A, P); *Vasu Vasile* (3980, 86); *Velea Mihail* (3986); *Zamfirescu I. Sublt.* (3986); *Zane D. Nicolae* (4014); *Ziff M.* (3998).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipì sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac deasemenea pe foaie aparte. *Foile vor aveà format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani compleţi broşaţi cu preţul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX şi XXI care se vând cu preţul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV şi XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).
2. **N. Abramescu,** *Lecţiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediţia IV revăzută şi adăogită,* 1924 (Epuizată).
3. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).
4. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* (Epuizată).
5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
   Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
   Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
   Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—
6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—
7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—
8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—
9. **G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamaţiunile şi cererile pentru cărţi din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Regiei Publice Comerciale «Monitorul Oficial şi Imprimeriile Statului», B-dul Elisabeta 29, Bucureşti I.

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii şi orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie şi expediţie, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, Bucureşti 4.

1930/1931 complet

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAȚIUNII BUCUREȘTI

C III. R 28

ANUL XXXVI.

NUMĂRUL 12. — AUGUST 1931.

SUMARUL

1. Cercles remarquables du triangle *V. Thébault.*
2. Problema 2637 şi o variantă a ei *Col. Gh. Buicliu.*
3. O problemă de geometrie infinitezimală . . . . . *Lt. Mihail I. Focşeneanu.*
4. Note matematice: 47 — 53.
5. Bibliografie.
6. Cereri: 208.
7. Probleme rezolvate: 1489, 1511, 1587, 2300, 3307, 3892, 3911, 3967, 3993, 3996, 4003, 4004.
8. Exerciţii: 55 — 56.
9. Probleme propuse: 4041 — 4050.
10. Tabla de materii.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI

IMPRIMERIA NAŢIONALĂ

1931

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXXVI se compune din D-nii: Colonel **Gh. I. Liteanu** dela Marele Stat Major al Armatei; **G. A. Nichifor**, Doctor în Matematici, Conferenţiar la Universitatea din Bucureşti; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Regiei Publice Comerciale «Monitorul Oficial şi Imprimeriile Statului», Cassier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui Inginer-Şef GH. ILIESCU, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 310, 33, 55, 64, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 82, 553, 650, 79, 711, 29, 53, 64, 807, 76, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 53, 82, 405, 22, 30, 39, 56, 66, 77, 502, 03, 45, 56, 77, 80, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 65, 84, 92, 95, 709, 13, 17, 35, 58, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 56, 3005, 45, 69, 81, 127, 50, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 08, 09, 10, 16, 18, 20, 50, 61, 79, 405, 12, 24, 25, 45, 72, 89, 91, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 20, 22, 25, 27, 32, 46, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 94, 99, 700, 03, 20, 33, 36, 80, 84, 93, 99, 804, 08, 10, 29, 35, 36, 44, 45, 48, 53, 64, 70, 80, 96, 98, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 33, 44, 49, 50, 72, 73, 76, 83, 87, 94, 99, 4000, 10, 13, 17, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procurà dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

CERCLES REMARQUABLES DU TRIANGLE

1. Sur les côtés $CB = a$, $BA = c$, $AC = b$ d'un triangle on marque des points *isotomiques* α_1 et α_2, β_1 et β_2, γ_1 et γ_2. Soient (O), (ω_a), (ω_b), (ω_c), les cercles circonscrits aux triangles ABC, $A\alpha_1\alpha_2$, $B\beta_1\beta_2$, $C\gamma_1\gamma_2$.

Remarquons tout d'abord que les cercles (ω_a), (ω_b), (ω_c) passent respectivement aux pieds des hauteurs A'_2, B'_2, C'_2 du triangle anticomplémentaire $A_2B_2C_2$ de ABC. Il s'ensuit que les droites de directions B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2 sont les axes radicaux du cercle (O) avec chacun des cercles (ω_a), (ω_b), (ω_c). Les points A_2, B_2, C_2, sont les centres radicaux des triples de cercles (O), (ω_b), (ω_c) ; (O), (ω_c), (ω_a) ; (O), (ω_a), (ω_b).

Les axes radicaux des cercles (ω_b) *et* (ω_c), (ω_c) *et* (ω_a), (ω_a) *et* (ω_b) *passent donc respectivement aux sommets* A_2, B_2, C_2 *du triangle anticomplémentaire de* ABC.

Les triangles ABC et $\omega_a\,\omega_b\,\omega_c$ sont orthologiques, l'un des centres étant O. *Le second centre d'orthologie* Σ *est le complémentaire du centre radical* S *des cercles* (ω_a), (ω_b), (ω_c).

2. Posons

$$\overline{C\alpha_1} = \overline{\alpha_2 B} = l \; ; \; \overline{B\gamma_1} = \overline{\gamma_2 A} = m \; ; \; \overline{A\beta_1} = \overline{\beta_2 C} = n,$$

et désignons par P_a, P_b, P_c et P'_a, P'_b, P'_c les intersections des axes radicaux SA_2, SB_2, SC_2 avec BC, CA, AB et B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2, M_a et N_a ; M_b et N_b, M_c et N_c celles des côtés BC, CA, AB avec les cercles (ω_b) et (ω_c), (ω_c) et (ω_a), (ω_a) et (ω_b).

On a, par exemple,

$$\overline{P_a B} \cdot \overline{P_a N_a} = \overline{P_a C} \cdot \overline{P_a M_a},$$

soit

$$\frac{\overline{P_a M_a}}{\overline{P_a N_a}} = \frac{\overline{P_a B}}{\overline{P_a C}} = \frac{\overline{P_a B} - \overline{P_a M_a}}{\overline{P_a C} - \overline{P_a N_a}} = \frac{\overline{BM_a}}{\overline{CN_a}}.$$

Or

$$\overline{BM_a} \cdot a = m(c - m) \; ; \; \overline{CN_a} \cdot a = n(b - n),$$

et

$$\overline{P_a B} : \overline{P_a C} = m(c - m) : n(b - n).$$

On obtient de même

$$\overline{P_b C} : \overline{P_b A} = l(a - l) : m(c - m);$$

$$\overline{P_c A} : \overline{P_c B} = n(b - n) : l(a - l).$$

Dans le triangle $A_2B_2C_2$, il vient, par suite,

$$\overline{B_2P'_a} : \overline{P'_aC_2} = n(b - n) : m(c - m);$$

$$\overline{C_2P'_b} : \overline{P'_bA_2} = m(c - m) : l(a - l);$$

$$\overline{A_2P'_c} : \overline{P'_cB_2} = l(a - l) : n(b - n).$$

Plaçons en A_2, B_2, C_2, des poids inversement proportionnels à

$$l(a - l) , n(b - n) , m(c - m).$$

Les coordonnées barycentriques de S dans $A_2B_2C_2$ sont proportionnelles à

$$1 : l(a - l) , 1 : n(b - n) , 1 : m(c - m).$$

En désignant par x, y, z les coordonnées normales de S, par rapport à $A_2B_2C_2$,

$$al(a - l)\, x = bn(b - n)\, y = cm(c - m)\, z.$$

Les coordonnées normales et barycentriques du centre Σ d'orthologie des triangles ABC, satisfont aux mêmes relations.

Les distances de S *aux côtés du triangle anticomplémentaire* $A_2B_2C_2$, (*ou celles de* Σ *aux côtés de* ABC), *sont inversement proportionnelles aux produits des côtés du triangle par puissances des sommets* B *ou* C, C *ou* A, A *ou* B, *par rapport aux cercles* (ω_a), (ω_b), (ω_c), *respectivement.*

Remarque. Les droites AP_a, BP_b, CP_c, se coupent au réciproque Γ de Σ, par rapport au triangle ABC.

Le centre radical S *est donc l'anticomplémentaire du réciproque* Σ *de* Γ.

3. Lorsque α_1 et α_2, β_1 et β_2, γ_1 et γ_2 sont des points remarquables du triangle ABC, on obtient des résultats assez curieux dont voici quelques exemples.

a) Si

$$l = p - c \ , \ m = p - b \ , \ n = p - a,$$

les coordonnées barycentriques de S, dans $A_2B_2C_2$, sont

$$p - a \ , \ p - b \ , \ p - c,$$

c'est-à-dire celles du point de NAGEL.

Si D *et* D_a, E *et* E_b, F *et* F_c, *désignent les contacts sur* BC, CA, AB *des cercles inscrit et exinscrits à un triangle, le centre radical des cercles* (ω_a), (ω_b), (ω_c), *circonscrits aux triangles* ADD_a, BEE_b, CFF_c, *est l'anticomplémentaire du point de* NAGEL. *Ce dernier point est le second centre d'orthologie des triangles* ABC *et* $\omega_a \omega_b \omega_c$ [1]).

b) Lorsque

$$l = \frac{a}{2} \ , \ m = \frac{c}{2} \ , \ n = \frac{b}{2},$$

les coordonnées barycentriques de S sont

$$1 : a^2 \ , \ 1 : b^2 \ , \ 1 : c^2,$$

c'est-à-dire celles du réciproque du point de LEMOINE.

Le centre radical des cercles (ω_a), (ω_b), (ω_c) *qui, passant respectivement en* A, B, C, *touchent les côtés* BC, CA, AB *en leurs milieux* A_1, B_1, C_1, *est l'anticomplémentaire du réciproque du point de* LEMOINE *du triangle* ABC. *Les droites* AP_a, BP_b, CP_c, *sont les symédianes de* ABC.

c) A', B', C' *étant les pieds des hauteurs du triangle* ABC, *si*

$$\alpha_1 \equiv A' \ , \ \beta_1 \equiv B' \ , \ \gamma_1 \equiv C',$$

le centre radical des cercles (ω_a), (ω_b), (ω_c) *passant par* A', B', C', *est l'orthocentre du triangle* ABC.

V. THÉBAULT
Le Mans—France.

1) V. THÉBAULT, *Mathesis* 1931. Pag. 162.

PROBLEMA 2637 ŞI O VARIANTĂ A EI

I. In *Gazeta Matematică* Vol. XXVIII pagina 460, d-l M. GRÜNBAUM a publicat soluţia următoarei probleme propusă de D-l C. H. NICOLAU cu Nr. 2637:

Se dă triunghiul ABC, *în care picioarele a două din înălţimi,* B' şi C' *sunt fixe, iar vârfurile* B *şi* C *mobile pe câte o perpendiculară la* B'C'. *Se cere:*

1°. *Locul celui de-al treilea vârf* A.

2°. *Locul ortocentrului triunghiului* ABC.

3°. *Infăşurătoarea laturei* BC.

Soluţia d-lui M. GRÜNBAUM este bazată pe consideraţiuni de omografie, care fiind greşit aplicate au condus la rezultate falşe, după cum se va vedeà. Astfel D-l M. GRÜNBAUM a găsit că locurile dela 1° şi 2° sunt parabole în vreme ce acele locuri sunt elipse sau hiperbole. Apoi a arătat că învelitoarea de la 3° este o conică fără să precizeze ce anume conică. In cele ce urmează se va vedeà că învelitoarea de la 3° nu este niciodată parabolă.

Pentru a rectificà rezultatele eronate publicate de D-l M. GRÜNBAUM, dau în cele ce urmează o soluţie analitică elementară a problemei 2637, lăsând în seama corespondenţilor să găsească şi soluţia geometrică.

Fie β şi γ dreptele perpendiculare pe B'C' pe care se mişcă B şi C. Dreptele β şi γ nu pot fi oricum faţă de B' şi C', aşà cum pare că reese din enunţul problemei 2637 şi mai ales aşà cum se precizează în soluţia dela pagina 460 din volumul XXVIII. Aceasta se poate demonstrà uşor şi geometric şi analitic.

Iată o demonstraţie geometrică.

Fie D şi E proecţiile lui B şi C pe B'C', iar N proecţia lui C pe BD. Perpendiculara din mijlocul M a lui BC trece prin mijlocul O a lui B'C' căci M este centrul cercului circumscris patrulaterului BB'C'C. Deci

$$OB' = OC'.$$

Dar MO trecând prin mijlocul lui BC şi fiind paralelă cu β şi γ va trece şi prin mijlocul lui DE, adică

$$OE = OD$$

ceeace arată că dreptele β şi γ sunt simetrice faţă de mijlocul O al lui B'C'.

Prin urmare dreptele β şi γ, pe care se mişcă vârfurile B şi C, nu sunt oricum faţă de B' şi C'.

Invers, dacă B descrie o dreaptă β, C descrie o dreaptă γ simetrica lui β faţă de O. In adevăr, dacă paralela din M la B'C' tae pe β în L şi pe paralela din C la β în K, atunci avem:

$$CK = NL$$

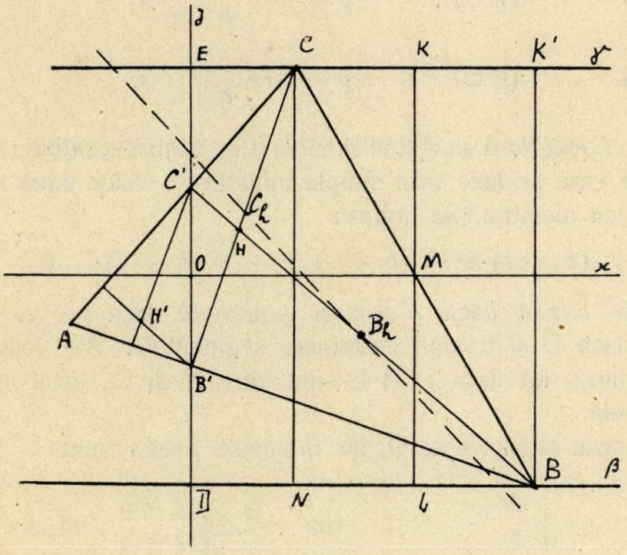


Fig. 1.

ca paralele cuprinse între paralele, dar

$$NL = LB$$

căci L este mijlocul lui NB. Deci triunghiurile MLB şi MKC sunt egale şi

$$ML = MK.$$

II. Trec acum la soluţia problemei 2637. Iau ca axe de coordonate dreptele OM şi OE. Fie $C'(0, c)$, $B'(0, -c)$, $E(0, b)$, $D(0, -b)$. Ecuaţiile dreptelor β şi γ sunt:

(1) $y + b = 0$ şi (2) $y - b = 0$.

Dacă λ este un parametru variabil şi B $(\lambda, -b)$ atunci ecuaţiile dreptelor BB' şi BC' sunt, respectiv

(3) (BB') $$y + c = \frac{b - c}{-\lambda} x$$

(4) (BC') $$y - c = \frac{b + c}{-\lambda} x .$$

Perpendicularele B'C şi C'C în B' şi C' pe BB' şi BC' au ecuaţiile

(5) (B'C) $$y + c = \frac{\lambda}{b - c} x$$

(6) (C'C) $$y - c = \frac{\lambda}{b + c} x.$$

1°. *Locul lui* A se obţine eliminând pe λ între ecuaţiile (3) şi (6), eliminare care se face prin simpla înmulţire a celor două ecuaţiuni membru cu membru. Se obţine:

$$(b - c)\, x^2 + (b + c)\, y^2 - c^2 (b + c) = 0$$

care este *elipsă* dacă $b > c$ şi *hiperbolă* dacă $b < c$. Cu alte cuvinte dacă D şi E sunt exterioare segmentului B'c' locul lui A este o elipsă, iar dacă D şi E sunt între B' şi C', locul lui A este o hiperbolă.

Centrul locului este O, iar mărimele axelor sunt

$$\left(c\sqrt{\frac{b + c}{b - c}},\ c\right) \quad \text{sau} \quad \left(c\sqrt{\frac{c + b}{c - b}},\ c\right).$$

Asimptotele hiperbolei, în cazul $b < c$, sunt

$$y = \pm \sqrt{\frac{c - b}{c + b}}\, x .$$

2°. *Locul ortocentului* H se obţine eliminând pe λ între ecuaţiile (4) şi (5). Se găseşte ca la 1°:

$$(b + c)\, x^2 + (b - c)\, y^2 - c^2 (b - c) = 0$$

care este elipsă sau hiperbolă după cum $b \gtrless c$. Axele sunt de data aceasta

$$\left(c\sqrt{\frac{b - c}{b + c}},\ c\right) \quad \text{sau} \quad \left(c\sqrt{\frac{c - b}{c + b}},\ c\right)$$

iar asimptotele, în cazul hiperbolei,

$$y = \pm \sqrt{\frac{b+c}{b-c}}\, x.$$

Se observă că poziția axelor locului lui A este comună cu acea a locului lui H.

3°. *Invelitoarea lui* BC. Coordonatele lui C se obțin rezolvând sistemul (2) și (5) sau (2) și (6). Se găsește:

$$c\left[\frac{b^2 - c^2}{\lambda}, b\right].$$

așă că ecuația dreptei BC este

$$f(\lambda) = (y + b)\,(b^2 - c^2 - \lambda^2) - 2b\lambda\,(x - \lambda) = 0$$

sau ordonând după puterile lui λ

$$f(\lambda) = (b - y)\,\lambda^2 - 2bx\lambda + (b^2 - c^2)\,(y + b) = 0.$$

Eliminând pe λ între această ecuație și

$$f'_\lambda(\lambda) = 0,$$

se găsește că învelitoarea lui BC este

$$b^2x^2 + (b^2 - c^2)\,y^2 - b^2\,(b^2 - c^2) = 0.$$

$$\therefore \qquad \frac{x^2}{b^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

care este elipsă sau hiperbolă după cum $b > c$ sau $b < c$.

Se pot găsi cu ușurință pe această cale și alte locuri ale figurei. Iată câteva care se deduc imediat.

4°. *Centrul cercului celor 9 puncte* al triunghiului ABC descrie perpendiculara în O pe B'C'.

5°. *Mijloacele* B_h, C_h ale înălțimilor BC', CB' descriu drepte paralele cu β și γ, echidistante de O. Rezultă că

6°. *Invelitoarea lui* B_hC_h este, ca și învelitoarea lui BC, o elipsă sau hiperbolă.

7°. *Ortocentrul* H' *al* triunghiului AB'C' descrie locul lui H.

Aceasta se poate găsi eliminând pe λ între paralele duse prin B' și C' la BC' și B'C. Sau, observând că figura B'HC'H' este un paralelogram cu centrul în O, deci H' este simetricul lui H față de O.

Cum locul lui H este o conică cu centrul în O, locul lui H' va fi tot conica loc a lui H.

III. La fel se rezolvă următoarea problemă, care se poate considerà ca o variantă a problemei 2637:

Triunghiul ABC *are picioarele* B', C' ale înălțimilor BB', CC' *fixe, iar vârful* A *mobil pe o perpendiculară* Δ *la* B'C'. *Se cere:*

Locul vârfurilor B *și* C.

Locul ortocentrului H, *al triunghiului* ABC.

Invelitoarea dreptei AH.

Iau ca axe pe Δ și pe B'C' care se taie în O. Fie A $(\lambda, 0)$, B' $(0, b)$, C' $(0, c)$. Ecuațiile dreptelor AB', AC' se deduc imediat:

$$(7) \qquad (AB') \qquad bx + \lambda y - b\lambda = 0$$

$$(8) \qquad (AC') \qquad cx + \lambda y - c\lambda = 0$$

De aici se scoate

$$(9) \qquad (BB') \qquad \lambda x - by + b^2 = 0$$

$$(10) \qquad (CC') \qquad \lambda x - cy + c^2 = 0.$$

Eliminând pe λ întâi între (7) și (10), apoi între (8) și (9) se găsește că C și B descriu curbele

$$C. \qquad bx^2 + cy^2 - c(b + c)y + bc^2 = 0.$$

$$B. \qquad cx^2 + by^2 - b(b + c)y + b^2c = 0.$$

Ambele aceste curbe sunt hiperbole sau elipse. Anume sunt hiperbole când O este între B' și C' și elipse când O este exterior punctelor B', C'.

Când O este dat în unul din punctele B', C', triunghiul ABC nu mai are sens, el reducându-se la două paralele.

Locul lui H se obține eliminând pe λ între (9) și (10). Se găsește dreaptă

$$(11) \qquad y = b + c.$$

Aceasta se poate deduce imediat observând că deoarece AH este diametru în cercul AB' HC', proectantele lui A și H pe coarda B'C' sunt simetrice față de mijlocul fix al lui B'C'. Deci H descrie o dreaptă perpendiculară pe B'C'.

Învelitoarea lui AH. Din ecuația (11), locul lui H, și una din ecuațiile (9) sau (10) se găsește

$$H\left[b+c\ ,\ \frac{bc}{\lambda}\right]$$

așă că ecuația dreptei AH este

$$f(\lambda)=(b+c-y)\lambda^2-(b+c)x\lambda+bcy=0\,.$$

Eliminând pe λ între această ecuație și

$$f'_\lambda(\lambda)=0$$

se găsește că învelitoarea lui AH este

$$(b+c^2)x^2+4bcy^2-4bc(b+c)y=0$$

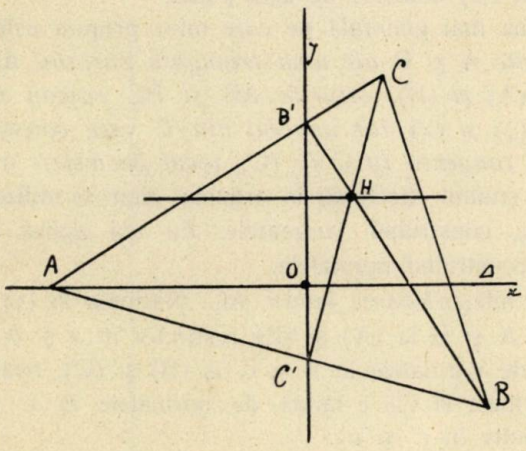


Fig. 2.

care este hiperbolă sau elipsă, după cum O este între B', C', sau exterior acestor puncte.

Ca și la problema 2637, și în acest caz sunt unele locuri care rezultă din chiar enunț. De exemplu:

Centrul cercului ABC descrie chiar dreapta Δ, căci se știe că linia care unește acel centru cu A este perpendiculară pe B'C'.

Centrul cercului B'AC' și al cercului celor 9 puncte ale triunghiului ABC descriu perpendiculara pe mijlocul lui B'C'.

Mijloacele înălțimilor BB', CC' descriu omoteticele locurilor lui B și C.

Col. Gh. Buicliu.

O PROBLEMĂ DE GEOMETRIE INFINITEZIMALĂ

In „Curierul Matematic“ vol. III, pag. 177, am reluat problema tratată de D-l prof. N. ABRAMESCU în G. M. vol. XXXI, pag. 44—45, spre a o rezolvì pe altă cale şi generalizà, ideia fiind sugerată chiar de D-sa la examenul de „Geometrie Superioară“ la Universitate.

In articolul meu nu tratam chestiunea complet şi de aceia îmi propun din nou acest lucru, aici.

Chestiunea studiată de D-sa erà:

Vârfurile A şi B ale unui triunghiu variabil ABC descriu două curbe (A) şi (B), latura AB rămâne tangentă la curba (γ), iar laturile AC şi BC au direcţiuni fixe. Să se determine tangenta în C la curba (C) descrisă de acel punct.

Problema mai generală pe care mi-o propun este:

Vârfurile A *şi* B *ale unui triunghiu variabil* ABC *descriu două curbe* (A) *şi* (B), *laturile* AB *şi* BC *rămân tangente la două curbe* (γ) *şi* (α), *iar unghiul din* C *este constant. Să se construiască tangenta în* C *la* (C), *locul geometric a lui* C.

Pentru studiul chestiunii în articolul citat se utilizează *metoda lui* NEWTON, construind tangentele. Eu voi aplicà *metoda lui* MANNHEIM, construind normalele.

Fie (β) înfăşurătoarea laturii AC. Normala la (γ) e tăiată de normalele în A şi B la (A) şi (B), respectiv în a şi b. Normala la (α) e tăiată de normalele în B şi C la (B) şi (C), respectiv în b' şi c', iar normala la (β) e tăiată de normalele în C şi A la (C) şi (A), respectiv în c'' şi a''.

Relaţia lui MANNHEIM (A se vedeà „Geom. infinitezimală“ de N. ABRAMESCU), aplicată curbelor (A), (B) şi (C), ne dă respectiv:

$$\frac{d(A)}{d(B)} = \frac{\overline{Aa}}{\overline{Bb}} \qquad \frac{d(B)}{d(C)} = \frac{\overline{Bb'}}{\overline{Cc'}} \qquad \frac{d(C)}{d(A)} = \frac{\overline{Cc''}}{\overline{Aa''}}.$$

Care, înmulţite între ele, dau relaţia cunoscută:

$$(1) \qquad \frac{\overline{Aa}}{\overline{Bb}} \cdot \frac{\overline{Bb'}}{\overline{Cc'}} \cdot \frac{\overline{Cc''}}{\overline{Aa''}} = 1.$$

Unghiul din C este însă constant. Deci, normalele la înfăşurătoarele laturilor se intersectează pe normala la vârf, adică punctele c' şi c'' coincid. Deci $\overline{Cc''} = \overline{Cc'}$.

Relaţia (1) devine deci:

$$\frac{\overline{Aa}}{\overline{Bb}} \cdot \frac{\overline{Bb'}}{\overline{Aa''}} = 1.$$

Din această relaţie scoatem:

$$(2) \qquad \overline{Aa''} = \frac{\overline{Aa}}{\overline{Bb}} \cdot \overline{Bb'}$$

în care cunoaştem $\overline{Bb'}$ şi raportul $\frac{\overline{Aa}}{\overline{Bb}}$, deci putem găsi punctul a''. Perpendiculara din a'' pe AC taie normala în α la (α) în punctul c'. Dreapta Cc' este normala în C la (C), iar *perpendiculara în* C *pe* Cc' *este tangenta.*

Să considerăm acum o serie de cazuri particulare.

1°. AB *are o lungime constantă.* In acest caz normalele în A la (A) şi B la (B) se intersectează pe normala în γ la (γ), în punctul C_1. Punctele a şi b se confundă şi deci din relaţia (2) reiese că $a''b'$ este paralelă cu AB.

Atunci punctul c' se află ducând din a'' şi b' perpendiculare respectiv pe CA şi BC.

Fie X diametral opusul lui C în cercul ABC. Se vede uşor că c' se află pe dreapta C_1X.

Construcţia devine în acest caz:

Dacă X *este diametralul opus lui* C *pe cercul* ABC, *iar* C_1 *intersecţia normalelor în* A *şi* B *respectiv la* (A) *şi* (B), *normala în* α *la* (α) *taie dreapta* XC_1 *în* c'. *Perpendiculara în* C *pe* Cc' *este tangenta la* (C).

2°. BC *are o lungime constantă.*

Normalele la (B) şi (C) se taie în punctul c', pe normala în α la (α). Deci punctul c' se află pe normala Bb.

Mai avem şi relaţia (2), care se scrie:

$$(3) \qquad \frac{\overline{Aa''}}{\overline{Bb'}} = \frac{\overline{Aa}}{\overline{Bb}} = C^t.$$

Locul punctelor c' când avem relaţia (3) este o dreaptă ce trece prin punctul X. Al 2-lea punct al acestei drepte îl găsim, luând o poziţie particulară pentru punctele a'' şi b'. Fie chiar a şi b.

Construcţia tangentei în acest caz se enunţă:

Fie C_2 *intersecţia perpendicularei din a la* AC *cu perpendiculara din b la* BC, *şi* X *diametral opusul lui* C *pe* ABC.

Dreapta XC_2 *taie normala în* B *la* (B), *în c'.*

Perpendiculara în C *pe* C*c'* *este tangenta la* (A).

3°. Analog se întâmplă atunci când AC e constantă.

4°. AB *e constantă şi tangentă la* (A). In acest caz curba (B) este *tractricea curbei* (A) şi punctul C_1 dela cazul 1° este centrul de curbură al curbei (A). Construcţia devine deci:

Pe tangenta în A *la* (A) *se ia o lungime constantă* AB. *Din* B *se duce o tangentă la o curbă* (α) *şi din* A *se duce o dreaptă* AC *care face în acelaş sens determinat un unghiu constant. Fie* d *centrul de curbură la* (A) *în* A *şi* X, *diametral opusul lui* C *pe cercul* ABC.

Tangenta în C *la curba* (C) *este perpendiculara din* C *la c'*C, *c' fiind intersecţia normalei în* α *la* (α), *cu* X*d.*

5°. AB *e constantă şi normală curbei* (A). Este un caz particular al cazului 1°. Punctul B descrie o curbă (B) paralelă la curba (A). Normalele la (A) şi (B) se taie în centrul de curbură *d* al curbei (A). Construcţia devine:

Tangenta în C *la curba* (C) *este perpendiculara din* C *pe dreapta ce uneşte centrul de curbură al lui* (A) *cu diametral opusul* X *al lui* C *pe cercul* ABC.

6'. BC *şi* CA *au direcţii fixe.* Este cazul problemei D-lui profesor N. ABRAMESCU, care e un caz particular al problemei generale propuse. In adevăr, unghiul C este constant.

Laturile BC şi CA ating înfăşurătoarele lor la infinit, deci punctele *a''* şi *b'* sunt şi ele la infinit pe A*a* şi B*b*, adică punctul *c'* este la infinit.

Relaţia (3) ne arată că:

$$\frac{\overline{Aa''}}{\overline{Bb'}} = \frac{\overline{Aa}}{\overline{Bb}} = C^t$$

şi că locul lui *c'*, considerând pe *a''* şi *b'* mobile, este o dreaptă ce trece prin X, diametral opusul lui C pe cercul ABC şi C_2 intersecţia perpendicularei din *a* la AC cu perpendiculara din *b* la BC. Punctul *c'* este la infinit pe XC_2, adică normala în C la (C) este paralelă cu XC_2.

Construcţia tangentei se face deci:

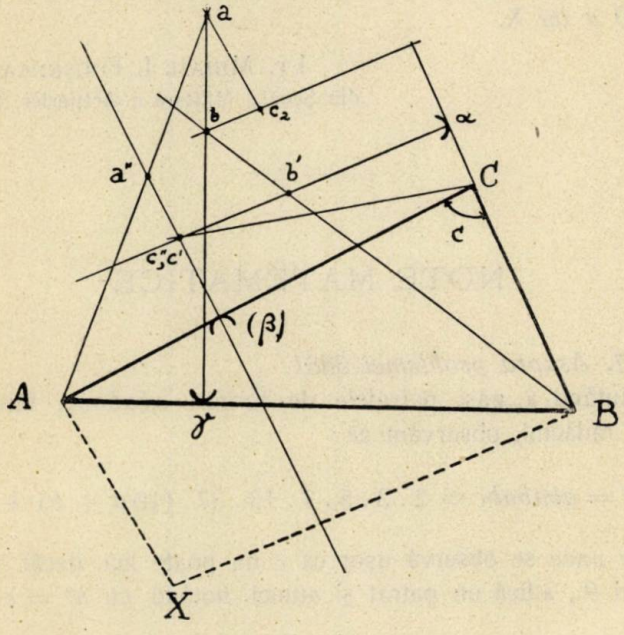
Fie X *diametral opusul lui* C *pe cercul* ABC *şi* C_2 *intersecţia* $\perp$ *din a la* AC *cu* $\perp$ *din b la* BC.

Tangenta în C *la* (C) *este* $\perp$ *în* C *pe* XC_2.

După cum se vede, construcţia aceasta nu necesită construcţii de segmente şi măsurători, ca cea obţinută prin metoda lui NEWTON.

7°. AB *constantă,* BC *şi* CA *au direcţii fixe.* Este o combinaţie a cazurilor 1° şi 6°. Construcţia este următoarea:

Fie X diametral opusul lui C pe cercul ABC şi C_1 intersecţia normalelor în A şi B.



Tangenta la (C) *este perpendiculara pe* XC_1 *dusă din* C

8°. AB *este constantă, iar* BC *şi* CA *au direcţii fixe.*

Este un caz particular al cazului 4°. Construcţia este:

Pe tangenta în A *la* (A) *se ia o lungime constantă* AB. *Din* B *se duce paralelă la o direcţie fixă* Δ_1 *şi din* A *paralelă la altă direcţie fixă* Δ_2, *care se intersectează în* C.

Fie d *centrul de curbură la* (A) *şi* X *diametral opusul lui* C *în cercul* ABC. *Tangenta în* C *la* (C) *este perpendiculara din* C *pe* X*d*.

9°. In fine, problema No. 256 din «Curierul Matematic» vol. III, pag. 189, este un caz particular al cazului studiat la punctul 8°.

Problema erà:

Intr'un cerc cu centrul O, se consideră o coardă mobilă constantă AB, din extremităţile căreia se duc paralele la două direcţii fixe Δ_1 şi Δ_2, care se taie în C.

Să se construiască tangenta în C la curba descrisă de C.

După cum se vede, suntem în cazul 8°. Centrul de curbură *d* este centrul O al cercului dat. Tangenta în C la (C) este perpendiculară pe X*d* adică pe XO şi deci *paralelă cu polara faţă de cercul* O *a lui* X.

Lt. Mihail I. Focşeneanu
din Şcoala Militară a Artileriei. Timişoara.

NOTE MATEMATICE

*47. *Asupra problemei 3881.*

Căutând a găsi patratele de forma: *abababc*, fără extragere de rădăcini, observăm că:

$$N^2 = abababc = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot (10a + b) + c.$$

De unde se observă uşor că c nu poate luà decât valorile: *1*, *4* sau *9*, adică un patrat şi atunci notând cu $n^2 = c$, putem scrie:

$$N^2 - n^2 = (N - n)(N + n) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot (10a + b).$$

Analizându-se acum toate posibilităţile de divizibilitate pentru $n = 1, 2$ şi *3*, se obţine soluţia problemei.

I. B. F.

48. *Asupra problemei 3821.*

Dintr'o examinare a unei table de patrate şi cuburi se vede

că tabloul dela pagina 346, vol. XXXVI trebue înlocuit cu următorul:

x	$\sqrt{x}$	$\sqrt[3]{x}$
$0{,}49 \leqslant x < 0{,}512$	0,7 . . .	0,7 . . .
$0{,}64 \leqslant x < 0{,}729$	0,8 . . .	0,8 . . .
$0{,}81 \leqslant x < 1$	0,9 . . .	0,9 . . .
$1 \leqslant x < 1{,}210$	1,0 . . .	1,0 . . .
$1{,}331 \leqslant x < 1{,}440$	1,1 . . .	1,1 . . .
$268{,}96 \leqslant x < 272{,}25$	16,4 . . .	6,4 . . .
$274{,}625 \leqslant x < 275{,}56$	16,5 . . .	6,5 . . .
$870{,}25 \leqslant x < 876{,}16$	29,5 . . .	9,5 . . .

I. B. F.

49. *Rectificarea câtorva exerciţii.*

a) In ecuaţia exerciţiului 32 «*G. M. Anul XXXIII*» s'a omis termenul x^{5x-3}.

b) In enunţul exerciţiului 44 «*G. M. Anul XXXV*» s'a omis condiţia ca numărul format din primele două cifre ale pătratului să fie răsturnatul numărului format de ultimele două cifre ale aceluiaş pătrat. Fără această condiţie rezolvarea dată exerciţiului nu e îndreptăţită.

c) La exerciţiul 61 «*G. M. Anul XXXV*», s'a omis să se considere $zu = 01$, 04 şi 09.

Se găsesc soluţiile:

$$2401 = (49)^2;\ 2704 = (52)^2;\ 2809 = (53)^2 \text{ şi } 9604 = (98)^2.$$

N. Aldea.

50. *Asupra exerciţiului 75 vol. XXXIV.*

Urmărind soluţia dată acestui exerciţiu, observăm că având:

$$xy = a,\ x^2 - y^2 = b$$

nu putem aveà:

$$(x+y)^2 + [-(x^2-y^2)] = a.$$

de aici urmează eroarea întregii soluţii.

Exerciţiul se poate soluţionà astfel:
Scoatem valoarea lui x din prima relaţie din enunţ şi introducând-o în a II-a relaţie dăm de următoarea ecuaţie bipatrată:

$$y^4 + by^2 - a^2 = 0.$$

Rezolvarea acestei ecuaţii şi introducerea valorii lui y în $x = \frac{a}{y}$ ne conduce la soluţiile problemei.

MIRCEA D. MOTOC
Lic. „Olteniţa".

*51. *Asupra problemei 3897.*
Pentru cazul particular: $x = 4$, fracţia devine:

$$\frac{(x+1)(x-7)}{(x+1)(x+3)} = \frac{x-7}{x+3}$$

iar nu:

$$\frac{(x-1)(x+7)}{(x+1)(x+3)}$$

cum din eroare s'a strecurat la soluţia problemei 3897, dată la pag. 272 din vol. XXXVI.

Şi în acest caz fracţia este pozitivă când:

$$x > 7 \quad \text{sau} \quad x < -3.$$

I. PAREPEANU.

Cu puţin ulterior redijărei problemei 3897, am primit o so-soluţie complectă şi generală dela D-l MIHAIL VELEA.

I. L.

52. *Soluţia unei ecuaţii trigonometrice.* Soluţia dată, la pagina 310, Vol. XXXVI, problemei 3886 este eronată. Iată soluţia adevărată. Se cerea rezolvarea ecuaţiunei

$$(1) \qquad \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 0$$

sau, în general

$$(2) \qquad \sum_{1}^{n} \sin(2i-1)x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x} = 0.$$

Observând că

$$\sin nx = C_n^1 \cos^{n-1} x \sin x - C_n^3 \cos^{n-3} x \sin^3 x + C_n^5 \cos^{n-5} x \sin^5 x - \ldots$$

$$\therefore \quad (3) \qquad \sin nx = \sin x \left[C_n^1 \cos^{n-1} x - C_n^3 \cos^{n-3} x \sin^2 x + C_n^5 \cos^{n-5} x \sin^4 x - \ldots\right]$$

rădăcinile ecuației (2) vor fi date de rădăcinile ecuației

$$(4) \quad \sin x \left[C_n^1 \cos^{n-1} x - C_n^3 \cos^{n-3} x \sin^2 x + C_n^5 \cos^{n-5} x \sin^4 x - \ldots\right]^2 = 0.$$

Ecuația (4) având numai puteri perechi ale lui $\sin x$ se poate pune cu ușurință în funcție de $\cos x$.

Pentru rezolvarea ecuației particulare (1) se înlocuește n în (3) prin 4 și se găsește:

$$4\sin x \left[\cos^3 x - \cos x \sin^2 x\right]^2 = 0$$

$$\therefore \quad (5) \qquad \sin x \cdot \cos^2 x \cdot \cos^2 2x = 0$$

ale cărei rădăcini sunt date de ecuațiunile

$$\sin x = 0 \qquad \therefore \qquad x_1 = k_1 \pi$$

$$\cos^2 x = 0 \qquad \therefore \qquad x_2 = \frac{(2k_2 + 1)\pi}{2}$$

$$\cos^2 2x = 0 \qquad \therefore \qquad x_3 = \frac{(2k_3 + 1)\pi}{4}.$$

La ecuația (5) se ajunge și fără a întrebuința formula (3), ci făcând numai unele transformări sumei din membrul I al ecuației (1).

Astfel

$$\sin x + \sin 7x = 2\sin 4x \cos 3x$$

$$\sin 3x + \sin 5x = 2\sin 4x \cos x$$

de unde, dacă se înseamnă cu S suma din (1):

$$S = 2\sin 4x (\cos 3x + \cos x) = 4\sin 2x \cos 2x (\cos 3x + \cos x).$$

Dar

$$\cos 3x + \cos x = 2\cos 2x \cos x$$

$$\therefore \quad S = 8\sin 2x \cdot \cos^2 2x \cdot \cos x = 16\sin x \cdot \cos^2 x \cdot \cos^2 2x$$

adică tocmai membrul I din (5).

Se vede că, din soluțiile găsite la pagina 310, numai $(2k_8+1)\pi/4$ ese bună.

Urmând aceiași cale, se pot rezolvà și alte ecuațiuni de forma

$$\sum_1^n Lin.\ ix = 0$$

în care *Lin.* înseamnă o linie trigonometrică oarecare.

COL. GH. BUICLIU.

53. *Asupra problemei 2809.* D-l COL. GH. BUICLIU observă la finele soluției problemei 2809, *Gazeta Matematică* Vol. XXXV pag. 28, că deoarece ecuația locului se poate pune sub forma

$$F(x, y, x^2 + y^2) = 0$$

rezultă că locul este podara unei conice.

Voi da, în cele ce urmează soluția geometrică a acestei chestiuni. *Fie unghiul* xOy, *un punct fix* D *în plan și punctul* M *mobil pe* Od. *Se proiectează* M *în* Q *pe* Ox. *Se cere locul proiecției* P *a lui* Q *pe* MD.

In loc de a căutà locul lui P voi căutà învelitoarea dreptei PQ. Pentru aceasta voi căutà două poziții particulare ale lui PQ și voi dovedì că o dreaptă PQ oarecare determină pe acele poziții puncte care se corespund omografic.

Perpendiculara din D pe Ox taie pe Ox în A și pe Od în M_1, iar paralela din D la Ox taie pe Od în M_2. Când M vine în M_1 dreapta PQ se suprapune pe Ox. Când M vine în M_2 dreapta PQ este chiar M_2S căci Q vine în S, S fiind proecția lui M_2 pe Ox.

Cele 2 poziții particulare ale lui PQ sunt Ox și M_2S, iar A și M_2 sunt puncte de ale locului.

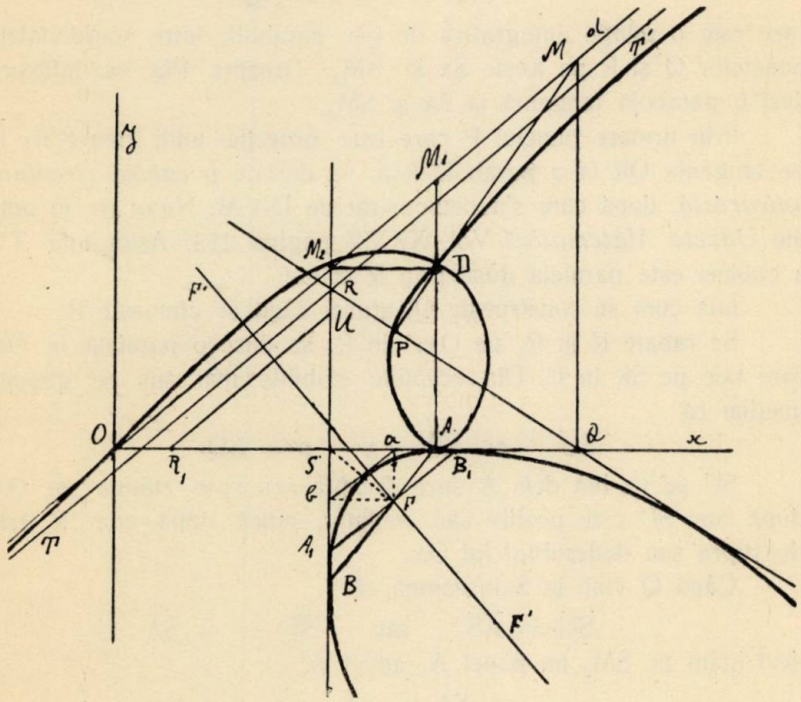
Fie acum o poziție PQ oarecare și R intersecția sa cu SM_2. Zic că R și Q descriu diviziuni omografice de gen parabolic, respectiv pe SM_2 și Ox.

Fiind dat Q pe Ox se determină un singur M pe Od şi deci o perpendiculară unică QP care taie pe SM_2 în un singur punct R.

La fel dându-se R pe SM_2, se determină un singur punct corespunzător Q pe Ox. In adevăr, dacă iau ca axă Oy perpendiculara în O pe Ox avem

$$D(a, b) \; ; \; M(\alpha, \beta) \; ; \; Q(\alpha, 0) \; ; \; y = mx$$

coordonatele punctelor D, M, Q şi ecuaţia dreptei Od.



De aici se deduce $M_2\left(\frac{b}{m}, b\right)$ şi ecuaţiile

$$x = \frac{b}{m} \quad ; \quad y = -\frac{\alpha - a}{\beta - b}(x - \alpha)$$

ale dreptelor SM_2 şi PQ. Inlocuind în ultima ecuaţie pe x prin $\frac{b}{m}$ se găseşte valoarea lui $\overline{SR}$ şi adică

$$\overline{SR} = -\frac{\alpha - a}{\beta - b}\left(\frac{b}{m} - \alpha\right) = \frac{(\alpha - a)(m\alpha - b)}{\beta - b}$$

$$\therefore \quad m(\beta - b)\,\overline{SR} = (\alpha - a)(m\alpha - b).$$

Cum M este pe Od, se poate înlocui β prin $m\alpha$ şi deci

(1) $\quad m(m\alpha - b)\,\overline{SR} = (\alpha - a)(m\alpha - b).$

Dacă $m\alpha - b$ este nul, atunci M vine în M_2, PQ vine în SM_2, iar R este nedeterminat. Exceptând acest caz, şi simplificând în (1), avem

$$m \cdot \overline{SR} = \alpha - a = \overline{AQ}$$

care este o relaţie omografică de gen parabolic între coordonatele punctelor Q şi R pe axele Sx şi SM_2. Dreapta PQ va înfăşură deci o parabolă tangentă la Sx şi SM_2.

Prin urmare punctul P care este proecţia unui punct fix D pe tangenta QR la o parabolă fixă, va descrie *o cubică circulară unicursală,* după cum s'a demonstrat de D-l M. Nicolau, în nota din *Gazeta Matematică* Vol. XXXIV pagina 213. Asimptota TT a cubicei este paralela dusă prin R la Od.

Iată cum se construeşte Q, atunci când se cunoaşte R.

Se rabate R în R_1 pe Ox, din R_1 se duce o paralelă la Od, care taie pe SR în U. Din ecuaţiile stabilite mai sus se găseşte imediat că

$$\overline{SU} = m \cdot \overline{SR} = x - a = \overline{AQ}.$$

SU se va luă dela A spre dreapta sau spre stânga pe Ox, după cum SU este pozitiv sau negativ, adică după cum R este deasupra sau dedesubtul lui Ox.

Când Q vine în S înseamnă că

$$\overline{SU} = \overline{AS} \quad \text{sau} \quad \overline{SU} = -\overline{SA}$$

deci luăm pe SM_2 un punct A_1 astfel ca

$$SA = SA_1.$$

Din A_1 ducem paralela A_1B_1 la Od, apoi pe SM_2 se ia punctul B astfel ca

$$SB_1 = SB.$$

B va fi corespunzătorul lui Q când Q vine în S. Punctul S se află deci pe directoarea parabolei al cărei focar F va fi proecţia lui S pe AB. Dreapta care uneşte proecţiile a, b ale lui F pe Sx şi SM_2 este tangenta la vârful parabolei iar perpendiculara din F pe ab este axa FF' a parabolei.

Adrian C. Gheorghiu.

BIBLIOGRAFIE

Bulletin of the American Mathematical Society. Volumul XXXVII Nr. 5 Mai 1931. New-York. Adunarea din Februarie din New-York, de T. Fort. Adunarea din Aprilie din New-York. de T. Fort. Adunarea din Aprilie din Chicago, de M. H. Ingraham. Adunarea din Aprilie din Berkeley, de T. M. Putnam. Evans asupra matematicei economiei politice, de C. F. Roos. O nouă ediţie a Teorii funcţiilor de Osgood, de T. H. Hilldebrandt. Extrase din memorii.

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Tomul CXI. Fascicola 5. Mai 1931. Buenos Aires. Fondaţiunea observatorului naţional argentinez şi obiectul lui, de C. D. Perrine. Asupra produsului de serii şi de integrale dublu convergente, de J. C. Vignaux. Câteva teoreme asupra produsului de serii sumabile, de J. C. Vignaux.

Boletin Matematico. Anul IV Nr. 2 Aprilie 1931. Buenos Aires. A. continuă sau nu?, de B. I. Baidaff.

Journal de mathematiques élémentaires publié par H. Vuibert. Anul 55. Nr. 19. Paris 1931.

Idem. Nr. 20. Iulie 1931. Asupra coardelor de contact a două tangente dreptunghiulare la o elipsă, de Ch. Bioche.

Bulletin de mathematiques et de physique pures et appliquées de l'École Polytechnique de Bucarest. II-ème Année Nr. 2. Bucarest 1931. Sur une propriété des fonctions holomorphes et sur un problème de Géométrie élémentaire, par D. Pompeiu. Sur une propriété intégrale caracteristique des fonctions linéaires, par St. Petralia (Pisa). Sur le théorème de la moyenne, par E. Abasohn. Sur l'équation aréolaire, par M. Ghermanesco. Similitude en hydrodynamique, par D. Germani. Sur la variation de couleur de cobalt par Er. Toporescu. Sur les raiees ultimes des spectres d'étincelle condensée, par T. Negresco. Quelquess observations sur le calcul algébriques des ponts suspendus par G. Borneanu. Sur le calcul des piéces en béton fretté, par M. Hangan. Etude des oscilations des machines synchrones sur un modéle mécanique par I. S. Gheorghiu. L'Aniversaire de l'École Polytechnique «Roi CAROL II».

Revista Ştiinţifică «V. Adamachi». Vol. XVII. Nr. 2. Iunie 1931. Iaşi.

E. Cahen & Ch. Michel. *Leçons élémentaires sur le calcul numériques.* Paris Gauthier-Villars. 1931. Preţul 30 franci.

Desvoltarea şi răspândirea maşinilor de calcul a făcut ca aritmeticile moderne să nu mai conţină de cât rare ori chestiuni referitoare la calculul numeric aproximativ, ca teoria erorilor, operaţiunile prescurtate, calculele logaritmice, etc. In schimb însă, mijloacele de conducere şi realizare ale calculelor aproximative au inceput să fie adunate in tratate speciale de calcul numeric, din categoria cărora face parte şi volumul cu titlul de mai sus.

Capitolul I conţine generalităţi asupra calculelor apropiate, în care se vorbeşte de erori relative şi absolute, de calculul lor, şi de operaţiunile prescurtate. Capitolul II se ocupă cu folosinţa logaritmilor şi riglei de calcul. Capitolul III tratează despre calculul numeric al seriilor. Capitolul IV arată cum se poate aveà uşor rezultatul substituirii unui număr în locul variabilei x din un polinom întreg în x. Capitolul V se ocupă cu determinarea polinoamelor prin cunoaşterea de valori obţinute pentru anumite valori ale varabilelor. Capitolul VI se ocupă cu rezolvarea numerică a ecuaţiilor, chestiune ce se continuă şi în capitolul VII Capitolul VIII este rezervat interpolaţiunii, iar Capitolul IX calculului numeric al integralelor definite.

Capitolele sunt tratate elementar şi urmate de aplicaţiuni şi exerciţii propuse. La fine este o colecţiune de exerciţii luate dintre cele date pe la diferite concursuri sau examene.

Cartea este utilă fizicianilor, inginerilor, etc. cari au de făcut calcule numerice, la care se cere cunoaşterea aproximaţiunilor obţinute sau care au de stabilit tabele de calcul, formule empirice etc.

I. I.

CERERI

208. S'a făcut vre'o comparaţiune între programul cursului de matematici din liceele noastre cu ale liceelor din alte ţări ?

I. I.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1489. *La ce oră răsare soarele la Bucureşti în ziua când umbra cea mai scurtă aruncată de construcţii este egală cu jumătate din înălţimea lor? Care e durata corespunzătoare a zorilor? Latitudinea Bucureştilor e 44°25'39".*

S. MIREA.

Soluţie dată de D-nii: S. MARCELINO şi E. GRIGORESCU.

$l = h \operatorname{cotg}(\delta + H)$; l, h, δH respectiv lungimea şi înălţimea umbrei, declinaţia soarelui şi latitudinea Bucureştilor, în cazul nostru:

$$\tfrac{1}{2} = \operatorname{cotg}(\delta + H)$$

$$\delta + H = 63^0\ 26'\ 06''$$

$$\delta = 63^0\ 26'\ 06'' - 44^0\ 25'\ 39'' = 19^0\ 00'\ 27''.$$

Arcul diurn $2x$ e dat de formula:

$$\cos x = -\operatorname{tg}H \operatorname{tg}\delta$$

$$\operatorname{tg}44^0\ 25'\ 39'' = 0{,}34449$$

$$\operatorname{tg}19^0\ 00'\ 27'' = 0{,}98022$$

$$\cos x = -0{,}33768$$

şi voiu aveà pentru arcul diurn $x = 14^{ore},\ 37^{min},\ 26^{sec}$.

Pentru a găsì durata zorilor, voiu face uz de formula:

$$\cos y = -\operatorname{tg}H\ \operatorname{tg}\delta - \frac{\sin 18^0}{\cos\delta\ \cos H}$$

$$\cos 19^0\ 00'\ 27'' = 0{,}94147$$

$$\cos 44^0\ 25'\ 39'' = 0{,}71462 \qquad \sin 18^0 = 0{,}30902.$$

Deci durata zorilor este:

$$\cos y = -0{,}79506 \qquad y = 2^{ore}12'\ 28''$$

soarele răsare deci la $4^{ore},\ 41'\ 37''$.

PROBLEMA 1511. *In ziua de 11|24 Mai 1910 Cometa Halley va trece la perihelie. Cunoscând semiaxa mare* a = 17,9 — *distanţe medii dela pământ la soare şi excentricitatea orbitei* e = 0,962, *se cere să se găsească, neglijând massa cometei, viteza de care e ea animată în acest moment pe orbita sa.*

S. Mirea.

Soluţie dată de D-l Sylvio Marcelino.

Viteza unei planete e dată:

$$v^2 = u\left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right]$$

şi ştim că:

$$r = a\ (1 - e)$$

deci:

$$v^2 = \frac{u}{a}\left[\frac{2}{1-e} - 1\right] = \frac{u}{a} \cdot \frac{1+e}{1-e}$$

apoi:

$$u = 0{,}000295 \qquad a = 17{,}9 \qquad e = 0{,}962$$

$$v^2 = \frac{0{,}000295}{17{,}9} \times \frac{1{,}962}{0{,}038} = \frac{0{,}00057879}{0{,}6802 \text{ distanțe medii}}$$

17,9 sunt distanțe medii dela pământ la soare și cum această distanță e 149.501.000 km., vom aveà:

$$v = \frac{0{,}00057879}{0{,}6802 \times 149.501000} = \frac{0{,}57879}{101290{,}5802} = 0{,}02479 \text{ distanțe medii}$$

sau

146.000 km/oră.

PROBLEMA 1587. *Să se găsească vibrația de latitudine a lunei* b *cunoscând longitudinea sa* λ, *înclinarea orbitei sale pe ecliptică* I, *înclinarea ecuatorului său pe ecliptică* I' *și longitudinea mijlocie a nodului său ascendent* Ω.

S. MIREA.

Soluție dată de D-l S. MARCELINO.

$$b = B - \beta \quad \text{unde} \quad \operatorname{tg} B = \operatorname{tg} I' \cdot \sin(\Omega - \lambda) \qquad (1)$$

și β e dat de:

$$\operatorname{tg}\beta = \sin\lambda \operatorname{tg}(M - \omega).$$

M e cunoscut și ω e dat:

$$\sin\omega = \sin I \cos\Omega$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\lambda \ (\operatorname{tg} M - \operatorname{tg}\omega)}{1 + \operatorname{tg} M \operatorname{tg}\omega} .$$

$$(2) \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\lambda \left[\operatorname{tg} M \sqrt{1 - \sin^2 I \cos^2\Omega} - \sin I \cos\Omega\right]}{\sqrt{1 - \sin^2 I \cos^2\Omega} + \operatorname{tg} M \sin I \cos\Omega}$$

(1) și (2) îmi dă pe B și β în funcție de elementele cunoscute, atunci:

$b = B - \beta$ e determinat.

PROBLEMA 2300. *Să se calculeze termenii ce corespund termenilor şirului lui* BODE, *astfel în cât ei să reprezinte în Km/ora vitezele planetelor în mişcarea lor de revoluţie împrejurul soarelui (orbite circulare).*

ST. N. MIREA.

Soluţie dată de D-nii: E. GRIGORESCU şi M. N. GHERMĂNESCU.

Dacă a şi a' sunt distanţele a 2 planete la soare, iar t şi t_t' timpurile revoluţiilor siderale, vitezele acelor planete pe orbite, mişcarea fiind considerată uniformă, sunt

$$v = \frac{2\pi a}{t} \text{ şi } v' = \frac{2\pi a'}{t'}; \text{ deci } \frac{v^2}{v'^2} = \frac{a^2 t'^2}{a'^2 t^2};$$

însă conform legii a treia a lui KEPLER avem:

$$\frac{a'^3}{a^3} = \frac{t'^2}{t^2}$$

şi prin urmare

$$\frac{v^2}{v'^2} = \frac{a'}{a} \text{ sau } v = v' \sqrt{\frac{a'}{a}}.$$

Dacă luăm pe a', distanţa pământului la soare, ca unitate atunci a va reprezentă termenii lui BODE, adică: 0,4; 0,7; 1; 1,6; 2,8; 5,2; 10; 19,6 şi 38,8.

Cum viteza pământului v' este aproximativ 29,5 km/sec, deci 106200 km/oră, rezultă că termenii corespunzători vor fi: 167910, 126890, 106200, 83920, 63466, 46570, 33580, 23990 şi 17050. Cum 38,8 e prea mare pentru Neptun, cel adevărat fiind 30, rezultă, că viteza lui este aproximativ 19390, iar nu 17050.

PROBLEMA 3307. *Care sunt eptagoanele, care au două axe de simetrie?*

I. IONESCU.

La un eptagon o axă de simetrie trece neapărat printr'un vârf, căci altfel am aveà de o parte patru vârfuri care ar trebui să fie simetrice numai la trei, ceeace este imposibil.

Fie A_1 vârful prin care trece una din axe; fie A_2, A_3, A_4 vârfurile de o parte a axei şi fie A_7, A_6, A_5 vârfurile respectiv simetrice acestora, de cealaltă parte a axei. Notarea am făcut-o astfel încât A_1 şi întretăerile dreptelor A_2A_7, A_3A_6, A_4A_5 cu axa să se succeadă în ordine pe axă.

Să presupunem că cealaltă axă trece prin A_2, conform simetriei faţă de axa din A_1, prin A_7 va trece o axă de simetrie. Faţă de axa din A_2 punctele A_1 şi A_7 sunt respectiv simetrice cu A_3 şi A_4, deci şi prin acestea trec alte două axe de simetrie. Faţă de A_7 punctele A_1 şi A_2 sunt respectiv simetrice cu A_6 şi A_5; deci alte două axe de simetrie ale eptagonului trec şi prin aceste puncte.

Procedând astfel ajungem la concluzia că *ori care ar fi cele două vârfuri prin care trec axele de simetrie date, prin toate vârfurile eptagonului trece câte o axă de simetrie.*

Fie O punctul de întretăere al axelor. Conform simetriei avem:

$$OA_1 = OA_2 = OA_3 = \ldots = OA_7;$$

deci eptagonul este înscris într'un cerc.

Fie α unghiul ce fac între ele axele ce trec prin A_1 şi A_2. Conform simetriei şi axele ce trec prin A_2 şi A_3, A_3 şi A_4, ..., A_7 şi A_1 fac între ele tot unghiul α; prin urmare vârfurile A_i sunt egal depărtate între ele pe cerc. *Eptagonul este regulat.*

O primă generalizare a acestei concluziuni este următoarea: *Dacă un poligon cu* p *laturi (*p *prim) are două axe de simetrie, el este neapărat regulat.*

O altă generalizare mult mai largă, dar mai puţin expresivă şi mai puţin elegantă este următoarea:

Dacă un poligon cu n *laturi, are două axe de simetrie, ce fac între ele un unghiu* α, *astfel încât unghiul* $q\alpha$ *(unde* q *este un divizor diferit de* n *al lui* n) *să fie diferit de un multiplu întreg de* π, *el este regulat.*

I. B. F.

PROBLEMA 3892. *Să se demonstreze că numărul*

$$\underbrace{11\ldots1}_{n-1}\ \underbrace{22\ldots25}_{n}$$

este patrat perfect.

Col. Gh. Buicliu.

Soluţia I, dată de D-nii: N. ALDEA (Student, Bucureşti); I. C. BOIAN, V. I. CRIVĂŢ (Bacalaureaţi); P. I. GHIŞOIU (Şc. Politecnică, Bucureşti); E. F. GRABOVSKI, C. HEYTMANEK (Şc. militară de artilerie, Timişoara); M. IONESCU (Lic. militar, Tg.-Mureş); IONESCU-BISS P. H. (Oltenita); MEREUŢĂ E. (Şc. Politecnică, Bucureşti); M. D. MIRCEA (Lic. Oltenita); I. C. PAREPEANU (Lic. „Meşotă", Braşov); I. GH. POPA (Oltenita); D. ŞERBAN-ULMENI, A. I. STAN (Sub-Locotenent de artilerie); V. VASU, M. VELEA (Studenţi, Cluj); N. N. VELICESCU (Student).

Numărul dat, pe care-l însemnăm cu N, se poate scrie succesiv:

$$N = \underbrace{11\ldots1}_{n-1}\,\underbrace{00\ldots0}_{n+1} + \underbrace{22\ldots2}_{n}\,0+5 = \frac{10^{n-1}-1}{9}\,10^{n-1}+2\,\frac{10^{n}-1}{9}\,10+5$$

$$\therefore\ N = \frac{10^{2n} - 10^{n+1} + 2\cdot 10^{n+1} - 20 + 45}{9} = \frac{10^{2n} + 10^{n+1} + 25}{9}$$

$$\therefore\ N = \frac{10^{2n} + 2\cdot 5\cdot 10^{n} + 5^2}{9} = \left(\frac{10^{n}+5}{3}\right)^2.$$

Soluţia II, dată de D-l P. I. GHIŞOIU (Şc. Politecnică, Bucureşti).

Pentru n egal 1, 2, 3, se verifică uşor că N are valorile:

$$25 = 5^2\ ;\quad 1225 = 35^2\ ;\quad 112225 = 335^2.$$

Presupun deci problema adevărată până la n şi caut să dovedesc că este adevărată şi pentru $n+1$.

Avem:

$$(1)\qquad N_n^2 = \underbrace{11\ldots1}_{n-1}\,\underbrace{22\ldots2}_{n}\,5 = \underbrace{33\ldots3}_{n-1}\,5^2$$

$$N_{n+1} = N_n + 3\cdot 10^{n} = \underbrace{33\ldots3}_{n}\,5$$

$$\therefore\quad N_{n+1}^2 = N_n^2 + 6\cdot 10^{n}\cdot N_n + 9\cdot 10^{2n} = \underbrace{33\ldots3}_{n}\,5^2$$

şi ţinând seamă de (1):

$$6N_n = 2\,\underbrace{000\ldots0}_{n-2}\,10$$

deci:

$$N^2_{n+1} = N^2_n + 2\,\underbrace{000\ldots0}_{n-2}\,10 \times 10^n + 9 \cdot 10^{2n} = \underbrace{33\ldots3}_{n}\,5^2 .$$

Făcând adunările aritmetice în membrul întâiu, în care se înlocueşte N^2_n prin (1) se găseşte:

$$N^2_{n+1} = \underbrace{11\ldots1}_{n}\,\underbrace{22\ldots2}_{n+1}\,5 = \underbrace{33\ldots3}_{n}\,5^2 .$$

Observaţiuni.

1° D-nii E. F. Grabovschi şi I. Gh. Popa efectuând împărţirea lui $10^n + 5$ prin 3 au găsit şi rădăcina patrată a lui N, care este pusă direct în evidenţă prin soluţia II.

2° Celelalte soluţiuni anunţate pe copertă şi menţionate aici aveau vicii de demonstraţii sau rezultate greşite, ca:

$$N = \left(\frac{10^n - 5}{3}\right)^2$$

şi altele.

---

*PROBLEMA 3911. *Pentru ce valori întregi ale lui* n *expresiunea:*

$$E = 8n^2 - 7n - 1$$

este un cub perfect?

Căpitan Gh. Niculescu.

Soluţie dată de D-l Mircea Gh. Ionescu (Giurgiu).

Orice cub perfect se poate pune sub una din formele:

$$7k\ ;\ 7k - 1\ ;\ 7k + 1.$$

Vom analiză din expresiunea dată scriind în primul rând:

$$E = 8n^2 - 7n - 1 = 7k = 7 \times 7^2k' = 343k'$$

căci $7k$ fiind un cub perfect, iar 7 un număr prim, avem în mod logic:

$$k = 7^3 k'$$

unde k' va fi la rându-i un cub perfect de forma.:

$$k' = \alpha^{3a} . \beta^{3b} . \gamma^{3c} \ldots$$

α, β, γ, ... fiind factorii primi ai lui k'.

Scoatem valoarea lui n din egalitatea de mai sus şi obţinem:

$$n = \frac{7 \pm \sqrt{81 + 343 \times 32 \times k'}}{16} .$$

O primă condiţiune pentru ca n să fie întreg este ca suma:

$$S = 81 + 10976k'$$

să fie un pătrat perfect. Orice pătrat perfect poate luă una din formele:

$$5p \; ; \; 5p - 1 \; ; \; 5p + 1$$

şi vom analizà pe rând aceste forme, începând cu $5p$. O a doua condiţie, pentru a aveà n întreg este ca:

$$7 \pm \sqrt{S} = \mathcal{M}16$$

ceeace cere ca $\sqrt{S}$ să fie impar, dar cum $\sqrt{S} = \mathcal{M}5$, urmează că $5p$ nu poate să se termine cu 0 ci numai cu 5.

Pătratele perfecte terminate cu 5 se termină şi cu 25, adică S trebuie să aibă drept ultime două cifre pe numărul 25.

Aceasta atrage după sine ca:

$$10976k'$$

să se termine neapărat cu 44. Rezultă că unităţile cubului k' nu pot fi decât 4 sau 9 şi să căutăm acum şi cifra zecilor cuburilor k' astfel ca cifra zecilor numărului $10976k'$ să fie şi ea tot 4, cum cere condiţiunea.

Avem:

$$\begin{array}{r} 10976 \times \\ \ldots u4 \\ \hline \ldots 04 \\ \ldots (6u) \\ \hline \ldots (6u)4 \end{array} \qquad \text{şi} \qquad \begin{array}{r} 10976 \times \\ \ldots z9 \\ \hline \ldots 84 \\ \ldots (6z) \\ \hline \ldots (6z + 8)4 \end{array}$$

de unde găsim:

$$u = 4 \text{ sau } u = 9 \quad \text{şi} \quad z = 1 \text{ sau } z = 6$$

adică cuburile perfecte k', trebuie să se termine cu grupele de două cifre: 44 ; 94 ; 19 şi 69. Eliminăm grupa 94 cu care nu se poate termină un cub perfect şi rămân în vedere numai grupele 44, 19 şi 69. Se ştie însă că cifra a treia a pătratului perfect S nu poate fi decât: 0;2 sau 6 căci pătratele perfecte terminate în 5 se termină cu una din grupele:

$$025 \ ; \ 225 \ ; \ 625.$$

Cum numărul $10976k'$ se termină totdeauna cu 44 vom avea de adăogat la sute ceeace rezultă din adunarea $81 + \ldots 44$ adică totdeauna pe 1. Rezultă atunci că cifra sutelor numărului $10976k'$ nu poate fi decât: 9;1 sau 5. In aceste condiţiuni vom scrie:

$10976 +$	$10976 \times$	$10976 \times$
$\ldots x44$	$\ldots y19$	$\ldots w69$
$\ldots 904$	$\ldots 784$	$\ldots 784$
$\ldots 04$	$\ldots 76$	$\ldots 56$
$\ldots (6x)$	$\ldots (6y)$	$\ldots (6w)$
$\ldots (6x + 9)\,44$	$\ldots (6y + 5)\,44$	$\ldots (6w + 3)\,44$

şi identificând:

$$6x + 9 = \ldots 9 \qquad 6y + 5 = \ldots 9 \qquad 6w + 3 = \ldots 9$$
$$6x + 9 = \ldots 1 \qquad 6y + 5 = \ldots 1 \qquad 6w + 3 = \ldots 1$$
$$6x + 9 = \ldots 5 \qquad 6y + 5 = \ldots 5 \qquad 6w + 3 = \ldots 5$$

obţinem valorile:

$$x = 0 \ ; \ 5 \ ; \ 2 \ ; \ 7 \ ; \ 1 \ ; \ 6.$$
$$y = 4 \ ; \ 9 \ ; \ 1 \ ; \ 6 \ ; \ 0 \ ; \ 5.$$
$$w = 1 \ ; \ 6 \ ; \ 8 \ ; \ 3 \ ; \ 2 \ ; \ 7.$$

adică vom avea în vedere numai cuburile k', cari au ultimile trei cifre una din grupele:

$$044 \ ; \ 544 \ ; \ 244 \ ; \ 744 \ ; \ 144 \ ; \ 644.$$
$$419 \ ; \ 919 \ ; \ 119 \ ; \ 619 \ ; \ 019 \ ; \ 519.$$
$$169 \ ; \ 669 \ ; \ 869 \ ; \ 369 \ ; \ 269 \ ; \ 769.$$

şi căutând într'o tabelă de cuburi ale numerelor pânăla 1000, găsim că răspund condiţiunilor de mai sus numai cuburile:

$14^3; 64^3; 114^3; 264^3; 314^3; 364^3; 514^3; 564^3; 614^3; 764^3; 814^3; 864^3;$

$189^3; 389^3; 489^3; 689^3; 889^3; 989^3;$

$139^3: 239^3; 439^3; 639^3; 739^3; 939^3.$

Incercând acum pe rând aceste cuburi, nici-unul nu dă pentru S un pătrat perfect.

Rămânând pentru E la forma $7k$ să analizăm pentru S cazul $5p + 1$. In această formă S se va termină cu 1 sau cu 6 şi eliminăm terminaţia cu 6 căci S n'ar fi impar.

Aceasta antrenează ca:

$$10976k'$$

să se termine neapărat cu 0, adică cubul k' trebuie să se termine cu 0 sau cu 5, cu alte cuvinte:

$$k' = 1000m^3 \quad \text{sau} \quad k' = 125n^3$$

de unde rezultă respectiv:

$$S = 10.976.000m^3 + 81$$

$$S = 1.372.000n^3 + 81.$$

Dând lui m şi n valorile întregi dela 1 la 10 inclusiv (limităm aci problema), nici-unul din numerile ce rezultă nu fac pe S pătrat perfect.

In sfârşit, rămânând tot la forma $E = 7k$, verificăm pe S şi pentru cazul $5p - 1$. De data aceasta S se va termină cu 4 sau cu 9. Excludem pentru motive deja arătate, terminaţia pară. Rezultă că: $10976k'$ trebuie să se termine cu cifra 8, adică k' să se termine cu 3 sau 8. Rădăcina cubică a lui k' se va termină cu 2 sau 7. Limitând şi aci problema la $\sqrt[3]{k'} = r < 100$, vom aveà de introdus în expresia lui S, în locul lui k', pe rând numerile:

$$2^3; 12^3; \ldots 92^3$$

$$7^3; 17^3; \ldots 97^3.$$

Făcând verificările, nici-unul din aceste numere nu fac pe S, un pătrat perfect. Inainte de a trece la celelalte două forme ale lui

E, observăm că pentru $k' = 0$, adică $k = 0$ obţinem $S = 81 = 9^2$ de unde rezultă pentru n întreg:

$$n = \frac{7+9}{16} = 1.$$

Introducând această valoare în E, obţinem:

$$E = 8 \times 1 - 7 \times 1 - 1 = 0$$

adică $n = 1$, este prima soluţie a problemei.

(Va urma).

Observare: D-nii corespondenţi pot trimite soluţiuni — pentru restul problemei, urmând o cale analoagă celei aci expuse.

CĂP. GH. N.

PROBLEMA 3967. *Două trenuri pleacă odată, unul spre altul, din două oraşe* A *şi* B, *depărtate 1000 km. unul de altul.*

După şase ore de mers, distanţa între trenuri este $\frac{2}{3}$ *din distanţa parcursă până în acel moment.*

Să se afle iuţelile celor două trenuri, ştiind că dacă primul tren ar fi avut iuţeala celuilalt şi vice-versa, punctul lor de întâlnire ar fi fost cu 100 km. mai aproape de oraşul A, *decât în primul caz.*

M. GHERMĂNESCU.

Soluţie aritmetică, dată de D-l MIHĂESCU AUREL (Lic. Militar Chişinău).

Dacă distanţa între trenuri, după şase ore de mers, este $\frac{2}{3}$ din distanţa deja parcursă, urmează că întreaga distanţă AB este $\frac{5}{3}$ din distanţa parcursă sau, invers, aceasta este $\frac{3}{5}$ din AB, adică 600 km. Deci suma vitezelor celor două trenuri este $600 : 6 = 100$ km.

Cum însă drumul făcut de primul tren, dându-i iuţeala celuilalt şi vice-versa, se măreşte cu 100 km., urmează că 1000 km. cuprinde de două ori drumul făcut de primul tren, plus 100 km., de unde rezultă că primul tren parcurge 450 km. până la întâlnirea cu celalt, adică merge cu $450 : 10 = 45$ km. pe oră. Celalt tren va merge deci cu $100 - 45 = 55$ km. pe oră.

Soluție algebrică, dată de D-nii: N. ALDEA, M. CHIȚU, A. CRISTEANU, I. DICU, N. DOBROGEANU, FAȚE MĂRGĂRIT, I. PAREPEANU, N. PATRAULEA, G. ROȘCA, C. RUSU, I. SACHELARIDE, IOV ȘERBAN, C. ȘERBU, I. ZARDA, A. MIHĂESCU și P. VARLAM.

Ca mai sus, găsim că trenurile au parcurs în 6 ore 600 km. Insemnând cu x și y iuțelile celor două trenuri, vom aveà

$$x + y = 100.$$

Dacă se schimbă iuțelile, trenul plecat din B parcurge în 10 ore 100 km. mai mult ca prima dată, adică 10 km. mai mult pe oră, decât celalt tren, ceeace conduce la a doua ecuație

$$y - x = 10$$

care, rezolvate, ne dau $x = 45$, $y = 55$.

PROBLEMA 3993. *Să se arate că între volumele* V_a , V_b , V_c , *născute de un triunghiu* ABC, *prin rotirea în jurul laturilor* a, b, c, *există relația*

$$a V_a = b V_b = c V_c .$$

M. GHERMĂNESCU.

Soluție geometrică, date de D-rele: M. ABRAMESCU și EL. ANTONIU (Studente, Cluj) și de D-nii: N. ALDEA, A. BĂDESCU, A. BUȚAN, I. CÂRSTOIU, I. COJOCARU, A. CRISTEANU, V. CRIVĂȚ, ȘT. DOBRESCU, I. EPURAN, P. GHIȘOIU, A. HALPERIN, H. IONESCU-BISS, E. MEREUȚĂ, N. MIHĂILEANU, NEGREA MIRCEA LEONTE, N. PATRAULEA, TR. PUTA, G. ROȘCA, S.-LT. A. STAN, P. VARLAM, V. VASU, N. VELICESCU, V. VISARION și S.-LT. I. ZAMFIRESCU.

Dacă h_a , h_b , h_c sunt înălțimile triunghiului, găsim ușor

$$V_a = \frac{\pi a h_a^2}{3} \quad , \quad V_b = \frac{\pi b h_b^2}{3} \quad , \quad V_c = \frac{\pi c h_c^2}{3}$$

și apoi, ținând seama de relațiile

$$a h_a = b h_b = c h_c = 25$$

S fiind suprafața triunghiului, obținem

$$a V_a = b V_b = c V_c = \frac{4\pi S^2}{3} .$$

Notă. 1. Soluţii geometrice, mai puţin simple, au trimis D-nii: G. V. Ghiuţă, I. Macoschi, M. Popescu-Stăneşti şi I. Şova.

2. Soluţii trigonometrice au trimis D-nii: C. Avram, Mircea Ionescu, C. Lupescu, C. Naforniţă, I. Parepeanu, R. Patraulea şi M. Velea.

3. S'a mai primit o soluţie geometrică, scrisă cu cerneală verde, dar fără semnătură.

M. G.

---

*PROBLEMA 3996. *Un triunghiu* ABC *are laturile formate din bare de metal:* AB *din oţel,* BC *din aramă şi* CA *din aluminium.*

Incălzind triunghiul la 335,4 grade, devine echilateral.

Ştiind că $AB = 1$ *m., iar coeficienţii de dilataţie sunt respectiv:*

$$\frac{11}{10^6}, \frac{17}{10^6} \text{ şi } \frac{23}{10^6}$$

să se determine lungimea celorlalte două laturi.

La ce temperatură laturile triunghiului ar satisface relaţia

$$AB = BC + CA.$$

Căpitan I. Linteş.

Soluţie dată de D-nii: A. M. Buţan, I. V. Cojocaru, R. N. Dumitraşcu, N. N. Mihăileanu, C. D. Rusu, G. Şt. Roşca şi V. I. C. Vissarion.

Fie $a_0 = 1$ m. , b_0 şi c_0 laturile triunghiului de oţel, aramă şi aluminium, atunci la t grade vom aveà:

$$a = a_0 . (1 + \alpha . t)$$

$$b = b_0 . (1 + \beta . t)$$

$$c = c_0 . (1 + \gamma . t)$$

iar triunghiul fiind echilateral, avem:

$$a = b = c.$$

Prin urmare a_0 fiind cunoscut, avem:

$$b_0 = a_0 \cdot \frac{1 + \alpha . t}{1 + \beta . t} = \frac{1 + \frac{11}{10^6} . 335{,}4}{1 + \frac{17}{10^6} . 335{,}4} = 0{,}998 \text{ m.}$$

$$c_0 = a_0 \cdot \frac{1 + \alpha . t}{1 + \gamma . t} = \frac{1 + \frac{11}{10^6} . 335{,}4}{1 + \frac{23}{10^6} . 335{,}4} = 0{,}996 \text{ m.}$$

Propunându-ne acum să vedem când vom avea:

$$AB = BC + CA$$

putem scrie ecuația:

$$a_0 (1 + \alpha . t) = b_0 . (1 + \beta . t) + c_0 (1 + \gamma . t)$$

de unde scoțând valoarea lui t, găsim:

$$t = \frac{a_0 - b_0 - c_0}{b_0 . \beta + c_0 . \gamma - a_0 . \alpha} .$$

Apoi înlocuind cu valorile numerice cunoscute, găsim:

$$t = \frac{1 - 0{,}998 - 0{,}996}{0{,}998 . \frac{17}{10^6} + 0{,}996 . \frac{23}{10^6} - \frac{11}{10^6}} = -34425^0{,}4.$$

Ceeace ne arată că triunghiul astfel format nu va satisface niciodată relația dată.

Notă. Au determinat numai lungimile BC și CA, D-nii: M. P. Chițu, D. Florescu. Celelalte soluțiuni primite aveau erori de calcul.

---

*PROBLEMA 4003. *Numerele:*

$$9 \ldots 980 \ldots 01 \quad \text{și} \quad 9 \ldots 970 \ldots 29 \ldots 99$$

sunt pătratele și cuburile aceloraşi numere, dacă se înlocuiesc punctele cu de n *ori cifrele alăturate.*

I. V. Măties.

Soluţie dată de Doamna LYGIA MIRESCU. Matematicianul IBN AL-BANNA (născut în Maroc la 1252 sau 1257) în cartea sa: „Talkhys amali al Kissab" menţionează numerile din enunţ ca bucurându-se de propietăţile amintite.

De altfel problema este aceiaş cu cea publicată sub No. 655 în G. M. VII, pag. 168 şi la rezolvarea ei, loc. cit., D-nii: GH. BUICLIU şi D. PETROVANU menţionează şi cubul din enunţ.

Avem:

$$9\ldots980\ldots01 = (10^{n+1} - 1)^2$$

$$9\ldots970\ldots029\ldots99 = (10^{n+1} - 1)^3 .$$

Soluţie dată de D-nii: N. N. ALDEA (stud. Buc.); I. A. EPURAN (cl. 7 lic. milit. Tg.-Mureş); HARALAMB P. IONESCU-BISS; NICOLAE M. MIHĂILEANU (lic. Constanţa) şi I. PAREPEANU (lic. Braşov).

Să însemnăm cu M primul număr din enunţ. El se va descompune astfel:

$$M = \underbrace{9\ldots9}_{n}\ \underbrace{00\ldots00}_{n+2} + 8 \times \underbrace{10\ldots0}_{n+2} + 1$$

care se mai poate scrie:

$$M = 9(10^{2n+1} + 10^{2n} + \ldots + 10^{n+2}) + 8 \times 10^{n+1} + 1$$

şi efectuând suma din paranteză obţinem:

$$M = 9\,\frac{10^{2n+2} - 10^{n+2}}{9} + 8 \cdot 10^{n+1} + 1$$

$$\therefore\ M = 10^{2n+2} - 10 \cdot 10^{n+1} + 8 \cdot 10^{n+1} + 1$$

$$\therefore\ M = 10^{2(n+1)} - 2 \cdot 10^{n+1} + 1 = (10^{n+1} - 1)^2$$

adică M este pătratul perfect al numărului $\underbrace{99\ldots99}_{n}$.

Dacă notăm acum cu N al doilea număr din enunţ, îl vom scrie descompus astfel:

$$N = \underbrace{9\ldots9}_{n}\ \underbrace{00\ldots00}_{2n+3} + 7 \times \underbrace{10\ldots00}_{2n+3} + 2 \times \underbrace{10\ldots00}_{n+2} + 9\,\underbrace{(11\ldots11)}_{n+1}$$

care se va mai puteà pune sub forma:

$$N = 9(10^{3n+2} + 10^{3n+1} + \ldots + 10^{2n+3}) +$$
$$7 \cdot 10^{2n+2} + 2 \cdot 10^{n+1} + 9(10^n + 10^{n-1} + \ldots + 1)$$

şi efectuând sumele din paranteze:

$$N = 9\frac{10^{3n+3} - 10^{2n+3}}{9} + 7 \cdot 10^{2n+2} + 2 \cdot 10^{n+1} + 9\frac{10^{n+1} - 1}{9}$$

$$\therefore \quad N = 10^{3(n+1)} - 10 \cdot 10^{2(n+1)} + 7 \cdot 10^{2(n+1)} + 2 \cdot 10^{n+1} + 10^{n+1} - 1$$

şi restrângând termenii asemenea:

$$N = 10^{3(n+1)} - 3 \cdot 10^{2(n+1)} + 3 \cdot 10^{n+1} - 1 = (10^{n+1} - 1)^3$$

adică este cubul numărului $\underbrace{99 \ldots 99}_{n}$.

In definitiv avem:

$$\sqrt{M} = \sqrt[3]{N} = 10^{n+1} - 1$$

c. c. t. d. d.
Cpt. Gh. N.

PROBLEMA 4004. *Să se găsească relaţiunea dintre laturile unui triunghiu* ABC, *astfel încât, dacă* V_a, V_b, V_c *sunt volumele născute de triunghiu, prin rotirea succesivă în jurul laturilor* a, b, c, *să avem relaţia*

$$2V_a = V_b + V_c.$$

M. Ghermănescu.

Soluţie dată de D-na Ştefania Căpitan Truţescu, şi D-nii: N. Aldea, G. Călinescu, I. Cârstoiu, I. Cojocaru, A. Cristeanu, I. Deac, R. Dumitraşcu, I. Epuran, P. Ghişoiu, G. Ghiuţă, A. Halperin, H. P. Ionescu-Biss, N. Mihăileanu, C. Naforniţă, Negrea M. Leonte, I. Parepeanu, N. Patraulea, R. Patraulea, M. Popescu-Stăneşti, G. Roşca, I. Sandu, i. Şova, P. Varlam, V. Vissarion şi S.-Lt. I. Zamfirescu.

S'a arătat în soluţia problemei 3993 că avem:

$$aV_a = bV_b = cV_c = \frac{4\pi S^2}{3}.$$

Scoatem valorile lui V_a, V_b, V_c din aceste relaţiuni, pe care le introducem în relaţia din enunţ; simplificând obţinem:

$$\frac{2}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

care arată că laturile formează o proporţie armonică.

Notă. 1. D-nii A. HALPERIN, P. VARLAM şi S.-LT. I. ZAMFIRESCU studiază cazul mai general când relaţia dată ar fi:

$$mV_a = nV_b + pV_c$$

obţinând condiţia:

$$\frac{m}{a} = \frac{n}{b} + \frac{p}{c}.$$

2. D-l H. IONESCU-BISS arată, în cazul enunţului, că între înălţimile triunghiului există relaţia:

$$2h_a = h_b + h_c.$$

3. D-l N. POPESCU ajunge la concluzia că triunghiul trebuie să fie echilateral.

M. G.

*EXERCIŢII

55. Se cere relaţia de condiţie între coeficienţii unei ecuaţii complecte de gradul al patrulea, în cazul când acesta se poate pune sub forma unei ecuaţii lineare de acelaş grad.

AL. A. ROŞU.

R. Fie:

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$f(x+h) = x^4 + x^3(a+4h) + x^2(b+3ah+6h^2) + x(c+2bh+3ah^2+4h^3) + (d+ch+bh^2+ah^3+h^4:$$

Conform enunţului trebueşte să evem:

$$a + 4h = 0.$$

$$b + 3ah + 6h^2 = 0.$$

$$c + 2bh + 3ah^2 + 4h^3 = 0.$$

Din relaţiile precedente, eliminând pe h şi b, obţinem relaţia de condiţie).

$$16c - a^3 = 0.$$

Dacă eliminăm pe h şi a, rezultatul este:

$$27c^2 - 2b^3 = 0.$$

56. Să se arate că în orice triunghiu există relaţia:

$$p = \frac{rh_a}{(h_a - 2r)\operatorname{tg}\frac{A}{2}}.$$

I. PAREPEANU.

R. Se cunosc relaţiile:

$$2pr = ah_a \qquad (1)$$

$$p = \frac{a\operatorname{tg}\frac{A}{2} + r}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}} \qquad (2)$$

Eliminând p între (1) şi (2), obţinem:

$$a = \frac{2r^2}{(h_a - 2r)\operatorname{tg}\frac{A}{2}} = \frac{2pr}{h_a} \qquad (3)$$

Făcând simplificările în (3) se ajunge la relaţia din enunţ.

PROBLEME PROPUSE

*4041. La care patrate de patru cifre, intervertind ordinea ultimelor două cifre, dăm peste un cub?

E. MEREUȚĂ.

*4042. Să se afle numerile mai mici decât 1000 cari se scriu în baza 13 cu aceleași cifre ca și în baza 10.

N. C.

*4043. Soient Ω_a, Ω_b, Ω_c les cercles qui passent par les sommets A, B, C d'un triangle et sont tangents respectivement aux côtés BC, CA, AB en leur milieux; M_a et N_a, M_b et N_b, M_c et N_c les intersections de BC, CA, AB avec Ω_b et Ω_c, Ω_c et Ω_a, Ω_b et Ω_c. Montrer que:

1) Les médianes du triangle sont moyennes proportionelles entre les hauteurs et les diamètres des cercles Ω_a, Ω_b, Ω_c.

2) On a la relation:

$$a \cdot \overline{M_a N_a} + b \cdot \overline{M_b N_b} + c \cdot \overline{M_c N_c} = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

V. THÉBAULT.

*4044. Să se așeze un dreptunghiu de mărime dată cu vârfurile pe două cercuri date. Discuțiune.

O. N. ȚINO.

4045. Se consideră o foaie dreptunghiulară ABCD de hârtie (vârfurile A și C sunt opuse). Vârfurile B și C rămânând fixe, se îndoaie foaia de hârtie astfel încât vârful A să vină într'un punct oarecare A' de pe latura CD. Vârful D va ocupa poziția D'; intersecțiile respective ale liniei de îndoire cu laturile AB și CD se vor nota cu M și N. Să se arate:

1°. Că dreptele AD, MN, CD' sunt concurente.

2°. Punctul A' fiind presupus variabil pe dreapta CD (prelungită indefinit), să se afle înfășurătorile dreptelor CM, MN, ND'.

3°. Se scoboară perpendiculara A'B' pe latura AB. Pentru care poziție a punctului A', pentagonul A'B'MND' are cel mai mare număr de laturi egale? Să se calculeze unghiurile pentagonului astfel obținut.

Se vor da soluții geometrice.

MIRON NICOLESCU.

4046. Se cer toate valorile întregi şi pozitive ale lui x, pentru care suma

$$S = 51x^3 - 72x^2 + 342x + 39$$

se divide prin 360.

COL. GH. BUICLIU.

*4047. Să se rezolve în numere întregi ecuaţiunea:

$$x^2+y^2+z^2+(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2+8xy=216.$$

I. MURĂROIU.

*4048. Dacă avem

$$f'(x) = 12(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

atunci avem şi relaţia

$$2\begin{vmatrix} \alpha & f(\alpha) & 1 \\ \beta & f(\beta) & 1 \\ \gamma & f(\gamma) & 1 \end{vmatrix} = (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\,[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2].$$

GH. TH. GHEORGHIU.

*4049. Să se rezolve trigonometriceşte ecuaţia:

$$\operatorname{tg} 2x = 2 \cdot \cos x.$$

I. IONESCU.

*4050. O corabie în mers, se găseşte la un moment dat pe aceiaş linie cu două faruri, cel mai apropiat fiind la distanţa a de corabie. După o oră de mers pe o direcţie ce făceà unghiul α cu linia farurilor, razele vizuale dela corabie la cele două faruri fac cu direcţia de mers respectiv unghiurile β şi γ. Să se afle iuţeala corăbiei şi depărtarea dintre faruri. Discuţie.

M. GHERMĂNESCU.

FRATA. 1°. La pag. 1 anul XXXVI se va înlocui la membrii delegaţi pentru probleme propuse de matematici superioare, P. GEORGESCU cu A. ANGELESCU.

2°. La pag. 304, vol. XXXVI, la observaţia 2-a rândul al 2-lea se va înlocui $(a^n - b^n)\ (a - b)$ cu $(a^n - b^n)/(a - b)$; iar în rândul al 3-lea $(2n + 1)$ se va înlocui cu $(2nk + 1)$.

I. B. F.

3°. La rezolvarea problemei No. 3885 s'a strecurat o eroare de tipar; în loc de:

$$-\frac{yz(y-z)+zx(z-x)+xy(x-y)}{xyz-(x-y)(y-z)(z-x)}$$

trebuie:

$$-\frac{yz(y-z)+zx(z-x)+xy(x-y)}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}$$

V. C. POPESCU.

BIBLIOTECA CENTRALĂ a „ASOCIAŢIUNII" SIBIIU

TABLA DE MATERII

A. ARTICOLE

Aritmetica

Pag.

Tiberiu Popoviciu. Asupra numărului indicatorilor unui număr dat 86
Ioan B. Florescu. Câteva inegalităţi în legătură cu indicatorii numerici 163
Gh. Constantinescu. Generalizarea problemei 3372 281

Geometria

V. Thébault. Sur un cercle associé au triangle 17
R. Goormaghtigh. Sur une affinité complexe et sur quelques propriétés du triangle 81
V. Thébault. Théorèmes de Ptolémée 83
V. Thébault. Généralisation d'une proposition du livre des lemmes 121
D. V. Ionescu. Asupra unei teoreme a D-lui Pompeiu 124
N. Teodorescu. Asupra dreptelor lui Simson 207
V. Thébault. Sur trois triangles homothétiques 241
Şerban A. Gheorghiu. Asupra unor relaţiuni metrice 245
Lt. Mihail I. Focşeneanu. Hipocicloida cu trei rebrusmente şi ortopolul 254
V. Thébault. Quelques propriétés du triangle 321
V. Thébault. Généralisation des théorèmes de Neuberg et de Gob 361
N. Abramescu. Relaţiuni între triunghiurile sferice şi unghiurile triedre 402
V. Thébault. Cercles remarquables du triangle 441
Col. Gh. Buicliu. Problema 2637 şi o variantă a ei 444

Geometrie analitică

Ernest Abason. Asupra unor formule pentru calculul cu aproximaţie al ariilor 41
Lt. Mihail. I. Focşeneanu. O problemă de geometrie infinitezimală . . . 450

Geometrie diferenţială

R. Goormaghtigh. Généralisation du théorème de D'Ocagne sur la courbure du contour apparent d'une surface 401

Algebra

		Pag.
Ioan B. Florescu.	Asupra rezolvării ecuațiunii $Ax^2 + By^2 = Cz^2$ în numere intregi	248

Trigonometria

Col. Gh. Buicliu.	O problemă de trigonometrie	125
† V. Cristescu.	Un răspuns și o generalizare	201

Mecanica

Căpitan I. Linteș.	Determinarea eforturilor suferite de un avion în picaj vertical	46
Căpitan Gh. Niculescu.	O variabilă importantă în combustiunea motoarelor de aviație	285
Căpitan Gh. Niculescu.	Dimensionarea unui aerodrom	364

Analiza

Alex. Niculescu.	Câteva clase de polinoame cu toate rădăcinile reale: Polinoamele lui Hermite	161
Tiberiu Popoviciu.	Asupra unui determinant	405

Diverse

* * *	Lista membrilor Societății „Gazeta Matematică"	5
* * *	Membrii decedați	14
Ioan Bușilă, G. Ioachimescu.	Premiile și alte dispoziții ale fondurilor „Gazetei Matematice"	14
Delegația Societății	Premiul „Inginer H. Capriel"	17
Al. Bunescu, Col. Gh. I. Liteanu și G. A. Nichifor.	Concursul „Gazetei Matematice"	91
G. Țițeica.	„ „ „	256
Lt. Mihail I. Focșeneanu, Col. Gh. I. Liteanu.	Raportul Comisiunii pentru acordarea premiului „General Sc. Panaitescu" pe anul 1929—1930	288
Th. Angheluță, P. Sergescu, Al. Bunescu.	Premiul „Inginer H. Capriel"	324

B. NOTE MATEMATICE

1.	*I. Ionescu.*	Programul matematicilor în Colegiul Sf. Sava din București pe anul școlar 1835—1836 . .	20
2.	*Ioan B. Florescu.*	Asupra problemei 3614	21
3.	„ „ „	Asupra notei 25, Anul XXXV	22
4.	*M. Ghermănescu.*	Asupra ecuației de gradul al treilea	22
5.	„ „	Asupra unor integrale	23
6.	*Adrian C. Gheorghiu.*	Asupra exercițiului Nr. 7 „G. M." XXXIII . .	48
7.	*Ioan B. Florescu.*	Generalizarea problemei 3885	49

			Pag.
8.	*Lt. Mihail I. Focşeneanu.*	O generalizare	52
9.	*Gh. Th. Gheorghiu-Gladiş.*	Asupra distanţei unui punct la o dreapă în spaţiu	53
10.	*P. I. Ghişoiu.*	Asupra articolului „Géométrie et Mécanique“	54
11.	*R. Goormaghtigh.*	Sur une quartique remarquable	93
12.	„ „	Centre de courbure de la développée d'une conique	93
13.	*Ioan B. Florescu.*	Asupra problemei 3742	94
14.	*Ion Măţieş.*	Asupra problemei 3628	131
15.	*Haralamb P. Ionescu-Biss*	Asupra exerciţiului 48 „G. M.“ XXXV 318	132
16.	„ „	Generalizarea problemei 3380	133
17.	*C. Popovici.*	O generalizare	134
18.	*Căpitan I. Linteş.*	Asupra problemei 3537	167
19.	*V. C. Popescu.*	Asupra podarei vârfurilor elipsei	168
20.	*I. Ionescu.*	Societăţile Matematice	211
21.	*Ioan I. Antoniu.*	Asupra problemei 3918	211
22.	*Virgiliu C. Popescu.*	Asupra notei Nr. 5, Vol. XXXV	213
23.	† *Tr. A. Dordea.*	Asupra problemei 138 din „Boletin Matematico“	215
24.	*Lt. Mihail I. Focşeneanu.*	Asupra construcţiei centrelor de curbură ale podarelor curbelor plane	216
25.	„ „	Asupra unei derivate	256
26.	*Tiberiu Popoviciu.*	Asupra indicatorilor	259
27.	*I. Ionescu.*	Primul profesor român de geometrie analitică	289
28.	*V. Thébault.*	Sur trois triangles directement semblables	292
29.	*Ioan B. Florescu.*	Asupra notei Nr. 14 din volumul XXXV	292
30.	*M. Ghermănescu.*	Asupra spiralei logaritmice	293
31.	*V. Thébault.*	Généralisation des propositions IV et XIV du livre des lemmes	325
32.	*V. V.*	Asupra problemei 1162	327
33.	*Lt.-Col. Gh. Potopeanu*	Asupra problemei 3957	329
34.	*Ioan B. Florescu.*	Asupra a două probleme	329
35.	*Al. A. Roşu.*	Asupra problemei 3355	330
36.	„ „ „	Asupra notei Nr. 2 din „Gazeta Matematică“, Anul XXX, pag. 19	330
37.	*E. Mereuţă.*	Asupra unui exerciţiu	330
38.	*Col. Gh. Buicliu.*	Calculul unor sume	330
39.	*Căpitan I. Linteş.*	Numărul indicatorilor unui număr dat	370
40.	*Virgiliu C. Popescu.*	Asupra patratelor perfecte de 7 şi 8 cifre	376
41.	*R. Goormaghtigh.*	Sur le problème 3954	408
42.	*M. Ghermănescu.*	Sur un théorème de Neuberg et de Gob	409
43.	*Col. Gh. Buicliu.*	Variante ale problemei 3941	410
44.	„ „ „	Generalizarea problemei 3955	411

Pag.

45. † *Tr. A. Dordea.* Asupra problemei 134 din „Boletin Matematico" 412
46. *Ioan V. Mătieș.* Asupra problemei 3862 413
47. *Ioan B. Florescu.* Asupra problemei 3881 454
48. „ „ „ Asupra problemei 3821 454
49. *N. Aldea.* Rectificarea câtorva exerciții 455
50. *Mircea Mota.* Asupra exercițiului 75, vol. XXXIV 455
51. *I. Parepeanu.* Asupra problemei 3897 456
52. *Col. Gh. Buicliu.* Soluția unei ecuații trigonometrice 456
53. *Adrian C. Gheorghiu.* Asupra problemei 2809 458

C. CHESTIUNI DE EXAMEN

Facultatea de Științe din București. Sesiunea Iunie 1930 96
Școlile Militare pregătitoare și speciale ale Aeronauticei **„Regele Aviator Carol II".** Examenul de admitere din August 1930 . . . 97
Școala Politechnică din București. Examenul de admitere în anul preparator (Octomvrie 1930) 135
Fizico-Chimice și Științe Naturale. Concurs de admitere în anul I (Septemvrie 1930) 138
Facultatea de Științe din Cluj. Sesiunea din Iunie 1930 169
Seminarul de Matematici Cluj. Sesiunea Octomvrie 1930 377

D. BIBLIOGRAFII

Bulletin de mathématiques et de physique pures et appliquées de l'École Polytechnique de Bucarest 25, 259, 461
Revista Matematică din Timișoara 25, 55, 99, 139, 177, 218, 260, 295, 334 385, 415
N. Ciorănescu. Curs elementar de algebră superioară 25
Mathesis 25, 99, 177, 217, 295, 333, 384
Réné Garnier. Cours de mathématiques générales (Analyse. Géomètrie) 25
J. Hadamard. Cours d'Analyse profesée à l'École Polytechnique 25
Bulletin of the American Mathematical Society 55, 100, 138, 176, 217, 259, 333, 384, 461
Anales de la Sociedad cientifica Argentina 55, 100, 138, 218, 260, 295, 333, 384, 461
Boletin Matematico 55, 139, 218, 260, 295, 334, 385, 461
Boletin Matematico Elemental 55

Pag.

Revista universitară matematică 55
* * * In memoria lui Traian Lalescu (Cuvântările ţinute la inaugurarea bustului său, ridicat la Şcoala Politechnică din Timişoara) 55
Paul Painlevé et *Ch. Platvier.* Cours de mécanique de l'École Polytechnique 55
Cl. Servais. Sur la géométrie du tétraèdre 99
Nicolas Lusin. Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications 99
Universidad Nacional de la Plata. Anuario 100, 218
Journal des Mathématiques Elémentaires, publié par H. Vuibert 100, 139, 177, 218, 260, 295, 333, 384, 414, 461
Boletin del Seminario Matematico Argentino 100, 384
A. Rosebblatt. Sur certains mouvements stationnaires plans des liquides visqueux incompressibles 100
J. Babini. Sobre les ceros de los funciones ciclicos . . . 100
J. Babini. Representacion de los funciones ciclicas de terce ordin 100
Paul Appel et Edouard Goursat. Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales 100
Maurice D'Ocagne. Hommes et choses de science. Propos. familiers 101
Victor Vâlcovici. Şcoala Politechnică din Timişoara (10 ani de existenţă) 101
Rodolphe Racliş. Solution principale de l'équation lineaire aux differences finiès 102
American Mathematical Society 102
Federigo Enrigues. Leçons de Géométrie projective 139
N. Abramescu. Lecţiuni de geometrie pură infinitezimală . . 139
N. Abramescu. Lecţiuni de Trigonometrie plană 140
Al. Manicatide. Curs complimentar de algebră 140
N. Abramescu. Lecţiuni elementare de astronomie 140
Bulletin de la section scientifique de l'Académie Roumaine 176, 295
Revista ştiinţifică „V. Adamachi" 177, 295, 461
Réné Garnier. Cours de mathématiques générales 177
Vito Voltera. Leçons sur la théorie mathématiques de la lutte pour la vie 218
R. de Montessus de Ballore. Probabilités et Statistiques 219
Valeriu Alaci. Géometrie analitique des polygones et des poliedres convexes 220
D. V. Ionescu. Memorii de titluri şi lucrări 220
Mathematica 260
E. Abason. Sur le théorème des accroissements finis . . . 260
E. Abason. Sur la moyenne des fonctionspara boliques . . 260
Căpitan I. Linteş. Construcţii de avioane 260

		Pag.
M. Beghin et *G. Julia.*	Exercices de Mécanique	261
M. Marinesco.	Sur un nouveau microphone à charbon . . .	295
N. Abramescu.	Nouvelle méthode pour l'étude des régions de convergence des séries de polynomes orthogonaux	295
N. Abramescu.	Les séries de polynomes à deux variables complexes	295
P. Sergescu.	E. Picard. Cu prilejul sărbătoririi jubileului său la 5 Maiu 1928 (Extras din Revista ştiinţifică „V. Adamachi", anul XIV, Nr. 3—4)	296
P. Sergescu.	Le prémier Congrès des mathématiciens roumains	296
P. Sergescu.	Sur les zéros des polynomes	296
P. Sergescu.	L'Évolution des principes de la mécanique de Newton	296
P. Sergescu.	Evoluţia concepţiei despre Univers	296
P. Sergescu.	O excursie în Algeria şi Maroc cu prilejul centenarului Algeriei	296
Radu Badesco.	Singularités des solutions d'une classe d'équations integrales	296
Radu Badesco.	Sur une équation fonctionelle	296
P. Cazanacli, Ioan Popp.	Primul profesor de geometrie analitică la Universitatea din Iaşi	334
Gaston Iulia.	Leçons sur la représentation conforme des aires simplement connexes	334
J. Babini.	Sobre el comportamento de las funciones theta de Jacobi de argumento nulo en el contorno del circolo de convergencia	384
Şcoala Politechnică din Bucureşti	Aniversarea a 75 ani de învăţământ technic in România, de 50 ani dela reorganizarea Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele şi 10 ani dela infiinţarea Şcoalei Politechnice	384
Şcoala politechnică „Regele Carol II"	Lucrările personalului didactic expuse cu ocazia serbării dela 7 Maiu 1931	384
Bulletin Mathématique de la Société Roumaine de Sciences		385
N. Abramescu.	Le mouvement d'une figure plane variable avec conservation de similitude	414
E. Cahen et Ch. Michel.	Leçons élémentaires sur le calcul numériques	461

E. CERERI

Nr. Cererii	*Pagina la care a fost:* Propusă	Dat răspuns	*Nr. cererii*	*Pagina la care a fost:* Propusă	Dat răspuns
194 . . .	26 (XXXVI)		201 . . .	221 (XXXVI)	
195 . . .	26 „		202 . . .	261 „	
196 . . .	57 „		204 . . .	296 „	196
197 . . .	102 „		205 . . .	334 „	
198 . . .	102 „		206 . . .	385 „	
199 . . .	141 „	196	207 . . .	414 „	
200 . . .	178 „		208 . . .	462 „	

F. DIVERSE

Informaţiuni privitoare la:
Activitatea Societăţii Române de Matematici;
Numiri în corpul profesoral universitar, facultatea de ştiinţă;
Incetarea din viaţă a câtorva matematiciani străini;
Activitatea Societăţii studenţilor în Matematici din Bucureşti;
Activitatea Societăţii Române de ştiinţe;
Recepţii de matematiciani străini, etc, apărute la pag.: 141, 178, 221, 261, 297, 335, 385, 414.

G. PROBLEME PROPUSE

a) Repartizarea problemelor propuse după materii

Aritmetica.	3931, 3932, 3933, 3941, 3942, 3943, 3951, 3952, 3961, 3962, 3963, 3971, 3972, 3973, 3981, 3982, 3983, 3991, 3992, 4001, 4002, 4003, 4011, 4012, 4013, 4021, 4022, 4031, 4032, 4033, 4034, 4041, 4042,
Geometria.	3934, 3935, 3936, 3944, 3945, 3946, 3953, 3954, 3964, 3965, 3974, 3975, 3976, 3977, 3984, 3985, 3993, 3994, 3998, 4004, 4014, 4015, 4016, 4023, 4024, 4025, 4035, 4036, 4039, 4043, 4044, 4045.
Geom. Analitică.	3940, 3958, 3959, 3969, 3980, 3989, 4009, 4020, 4040.
Algebra.	3937, 3947, 3948. 3955, 3960, 3966, 3967, 3970, 3978, 3986, 3987, 3997, 4000, 4005, 4006, 4007, 4017, 4026, 4027, 4028, 4038, 4046, 4047, 4048.
Trigonometria.	3938, 3939, 3949, 3956, 3957, 3968, 3979, 3988, 3995, 3996, 3999, 4008, 4018, 4019, 4029, 4030, 4049.
Mecanica.	3990, 4037, 4050.
Analiza.	3950, 4010.
Diverse.	

H. PROBLEME REZOLVATE.

b) Indicarea paginei la care a fost propusă sau rezolvată.

Nr. problemei	*Pagina la care a fost:* Propusă [1]	Rezolvată [2]
171	76 (II), 198 (XVI)	
485	104 (V), 198 (XVI)	NR
585	172 (VI), 238 (XVI)	
676	148 (VII)	
691	196 (VII), 278 (XVI)	NR
766	124 (VIII), 319 (XVI), 372 (XXXI)	NR
825	288 (VIII), 358 (XV.)	
887	172 (IX), 358 (XVI)	NR
914	267 (IX)	
944	52 (X)	

1) Numărul latin din paranteză indică volumul colecţiei, s. ex. 172 (IX), înseamnă că problema 886 a fost propusă la pag. 172 din volumul IX; problemele mai vechi nerezolvate încă, sau rectificate, li s'a publicat din nou enunţul, de ex.: problema 581 s'a mai publicat la pag. 51 vol. XI şi la pag. 238 vol. XVI.

2) NR însemnează că problema nu a fost încă rezolvată. Pentru acelea în dreptul cărora nu e trecut niciun număr, redacţia posedă soluţiuni bune care nu au fost încă publicate.

Nr. problemei	*Pagina la care a fost:* Propusă [1]	Rezolvată [2]
1000	220 (X) / 438 (XVI)	NR
1008	224 (X) / 462 (XVI)	NR
1056	100 (XI)	NR
1058	100 „	NR
1092	196 „	
1146	76 (XII)	NR
1156	100 „	
1162	124 „ / 372 (XXXI)	297
1178	172 (XII)	NR
1180	172 „	
1188	228 „	
1214	296 „	NR
1236	64 (XIII)	NR
1270	192 „	NR
1271	192 „	NR
1287	256 „	NR
1297	288 „	NR
1299	319 „	NR
1307	320 „	
1310	352 „ / 372 (XXXI)	NR
1333	32 (XIV) / 198 (XVIII)	NR
1342	64 (XIV)	
1355	96 „	NR
1364	128 „	102 / 221 / 302 NR
1367	128 „	NR
1377	160 „	385
1379	160 „	
1384	191 „	NR
1386	192 „	NR
1398	224 „	
1399	224 „ / 200 (XVI)	NR
1412	256 (XIV)	NR
1424	228 „	
1450	352 „	NR
1482	64 (XV)	NR
1489	96 „	462
1497	128 „	
1500	128 „	
1511	160 „	463
1533	224 „	
1534	224 „	
1553	228 „	NR
1563	320 „	
1564	320 „	414
1576	352 „	
1577	352 „	

Nr. problemei	*Pagina la care a fost:* Propusă [1]	Rezolvată [2]
1587	372 (XV)	464
1591	39 (XVI)	
1632	159 „	
1637	160 „	
1650	200 „	NR
1656	239 „	
1676	279 „	
1679	280 „	NR
1690	320 „	
1702	360 „	
1711	399 „ / 372 (XXXI)	NR
1729	440 (XVI)	NR
1733	463 „	141
1735	464 „	
1753	80 (XVII)	NR
1764	120 „	NR
1773	160 „	
1778	199 (XVII)	
1782	200 „	
1790	240 „	
1799	280 „	
1807	320 „ / 422 (XXXI)	NR
1823	400 (XVII)	
1831	439 „	
1835	440 „	
1840	446 „	
1858	78 (XVIII)	
1876	119 „	NR
1882	120 „	
1892	160 „	
1898	199 „	
1906	200 „	NR
1911	239 „	
1914	239 „ / 280 „	NR
1922	278 „	
1929	279 „	NR
1933	280 „	335
1934	280 „ / 320 „	
1937	318 „	
1944	319 „	
1945	320 „	
1948	358 „	
1949	358 „	178
1958	359 „	
1959	360 „	NR
1968	399 „	
1969	399 „	
1973	400 „ / 461 „	
1976	431 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
1983	432 (XVIII)	
1987	462 „	NR
1991	38 (XIX)	
2003	40 „	NR
2004	40 „	NR
2016	79 „	
2017	80 „	NR
2018	80 „	
2024	118 „	
2025	119 „	
2031	120 „	415
2032	120 „	
2035	159 „	
2038	159 „	
2048	198 „	
2055	200 „	
2056	200 „	
2058	200 (XIX)	
2063	238 „ 280 „	
2065	239 „	
2070	240 „	NR
2074	278 „	NR
2079	279 „	
2081	279 „	
2083	280 „	
2091	319 „	
2106	358 „	
2108	359 „	
2110	359 „	
2111	360 „	NR
2112	360 „	
2116	398 „	
2117	398 „	
2118	399 „	
2129	438 „	
2130	460 „	
2133	439 „	
2144	461 „	
2145	462 „	
2147	462 „	
2170	119 (XX)	NR
2176	120 „	
2187	160 „	
2194	197 „	
2197	198 „	
2217	239 „	
2222	240 „	
2223	240 „	303
2227	279 „	
2233	280 „ 422 (XXXI)	
2234	280 (XX)	417
2235	280 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
2240	318 (XX)	
2247	320 „	
2248	320 „	
2249	320 „	
2250	320 „	
2263	359 „	
2264	360 „	
2265	360 „	
2266	360 „	
2274	398 „	
2281	400 „	
2284	439 „	
2289	439 „	
2290	439 „	
2295	461 „	
2298	462 „	
2300	462 „	465
2301	462 „	
2302	462 (XX)	
2311	40 (XXI)	
2318	79 „ 160 „	
2329	118 „	
2330	118 „	
2332	119 „	
2337	120 „	
2338	122 „ 422 (XXXI)	NR
2343	157 (XXI)	
2344	158 „	
2346	158 „	
2353	159 „	NR
2354	198 „	
2356	199 „	
2357	199 „	
2359	199 „	
2360	199 „	
2365	200 „	
2370	239 „	
2375	240 „	
2381	278 „	
2382	278 „ 422 (XXXI)	NR
2383	278 (XXI)	
2386	279 „	
2390	280 „	
2392	280 „	
2394	318 „	
2397	319 „	
2398	319 „	
2402	320 „	
2405	320 „ 423 (XXXI)	NR
2408	359 (XXI)	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
2414	360 (XXI)	
2421	399 „	
2422	399 „	NR
2423	399 „	
2430	439 „	NR
2435	440 „	
2436	440 „	
2439	440 „	NR
2440	459 „	
2443	459 „	
2448	460 „	417
2456	31 (XXII)	NR
2458	32 „	
2461	32 „	
2462	62 „	
2466	63 „	NR
2469	63 „	
2477	95 „	NR
2481	96 „	
2489	120 „	
2497	144 „	
2500	144 „	
2502	167 „	NR
2503	167 „ 333 (XXXII)	NR
2510	191 (XXII)	
2529	262 „	
2537	287 „	
2539	288 „	
2545	312 „	NR
2552	47 (XXIII)	
2553	47 „	
2556	48 „	NR
2560	72 „	
2566	120 „	
2569	120 „	
2573	144 „	
2575	168 „	
2577	168 „	NR
2578	168 „	
2580	192 „	NR
2585	215 „	
2586	216 „	
2587	216 „	NR
2591	240 „	
2593	264 „	
2598	288 „	
2599	288 „	
2602	318 (XXXI)	
2607	31 (XXIV)	NR
2609	32 „ 454 (XXXI)	NR
2623	80 (XXIV)	NR
2631	112 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
2638	127 (XXIV)	NR
2640	128 „	
2643	128 „	
2645	143 „	
2647	143 „	
2655	191 „	NR
2656	191 „	
2658	191 „	
2660	191 „	
2661	192 „	
2664	24 (XXV)	
2665	24 „	NR
2671	48 „	
2675	63 „	
2682	64 (XXV)	
2683	79 „	
2684	80 „	NR
2688	80 „	
2689	80 „	
2692	108 „	NR
2694	108 „	
2695	109 „	NR
2701	141 „	
2706	142 „	
2709	142 „	NR
2713	143 „	NR
2717	143 „	NR
2727	168 „	
2731	191 „	
2735	192 „	NR
2752	264 „	
2758	56 (XXVI)	NR
2769	79 „	NR
2773	80 „	262
2778	104 „	
2780	104 „	NR
2789	135 „	
2795	159 „	
2803	160 „	
2814	192 „	NR
2818	216 „	
2820	216 „	
2822	216 „	
2827	247 „	
2828	248 „	
2837	279 „	
2850	335 „	
2851	335 „	
2860	39 (XXVII)	
2861	40 „	
2865	70 „	NR
2886	104 „	NR
2888	104 „	
2889	104 „	NR

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
2895	143 (XXVII)	
2906	184 „	
2909	221 „	NR
2912	222 „	NR
2913	222 „	
2920	262 „	
2922	262 „	
2926	264 „	NR
2936	343 „	NR
2947	376 (XXVII)	NR
2953	416 „	
2955	416 „	
2956	416 „	NR
2959	448 „	
2960	448 „	27
2969	39 (XXVIII)	
2971	39 „	
2972	40 „	
2980	79 „	
2983	79 „	
2985	80 „	
2986	80 „	
2991	119 „	
2993	119 „	
2996	120 „	
2999	120 „	
3000	120 „	
3003	159 „	
3005	159 „	NR
3013	199 „	
3019	200 „	
3031	278 „	
3041	319 „	
3045	319 „	NR
3052	359 „	
3054	360 „	
3059	360 „	
3069	400 „	NR
3070	400 „	
3071	439 „	
3073	439 „	
3075	439 „	
3081	479 „ 454 (XXXI)	NR
3085	480 (XXVIII)	
3086	480 „	
3090	480 „	
3091	39 (XXIX)	
3095	40 „	
3096	40 „	
3108	80 „	
3109	80 „	
3114	119 „	
3118	120 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
3127	159 (XXIX)	NR
3134	198 „	
3150	240 „	NR
3160	280 „	
3161	318 „	NR
3167	320 „	
3169	320 „	NR
3173	358 „	
3177	359 „	
3178	360 „	
3180	360 „	
3189	400 „	
3198	440 „	
3208	480 „	NR
3209	480 „	
3210	480 „	
3220	40 (XXX)	
3223	79 „	
3226	80 „	264
3227	80 „	
3228	80 „	
3230	80 „	NR
3232	119 „	
3236	119 „	
3239	120 „	
3244	160 „	
3245	160 „	
3248	160 „	
3249	160 „	
3250	160 „	
3253	199 „	
3255	199 „	NR
3260	200 „	NR
3267	239 „	
3270	240 „	
3275	279 „	57
3277	280 „	
3279	280 „	
3282	318 „	
3287	320 „	
3288	320 „	
3290	320 „	
3291	358 „	
3296	359 „	
3298	359 „	NR
3299	360 „	
3300	360 „	NR
3302	398 „	222
3304	399 „	NR
3307	400 „	465
3308	400 „	NR
3309	400 „	NR
3310	400 „	NR
3311	438 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
3312	439 (XXX)	
3313	439 „	
3316	439 „	NR
3318	440 „	NR
3319	440 „	
3320	440 „	NR
3330	480 „	
3332	119 (XXXI)	
3335	40 „	
3340	40 „	
3341	79 „	
3343	79 „	
3350	80 „	NR
3354	120 „	
3356	120 „	
3360	120 „	
3361	159 „	NR
3365	159 „	
3368	160 „	
3379	200 „	NR
3389	240 „	
3390	240 „	
3396	280 „	
3398	280 „	
3404	318 „	
3405	319 „	NR
3412	358 „	NR
3419	360 „	
3424	399 „	NR
3425	399 „	NR
3429	400 „	
3430	400 „	
3438	440 „	
3439	440 „	
3444	479 „	266
3445	479 „	NR
3448	479 „	
3450	480 „	
3456	39 (XXXII) / 119 (XXXIII)	
3457	39 (XXXII)	
3459	40 „	
3461	40 „	
3467	79 „	
3468	80 „	
3472	80 „	NR
3474	119 „	
3477	119 „	
3488	159 „	
3489	159 „	NR
3491	160 „	NR
3493	160 „	NR
3495	199 „	
3497	199 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
3499	199 (XXXII)	
3503	200 „	
3504	200 „	
3506	239 „	
3509	239 „	
3512	240 „	
3513	240 „	
3514	240 „	
3517	279 „	
3518	279 „	223
3521	279 „	
3522	280 „	NR
3523	280 „	NR
3524	280 „	NR
3532	320 „	
3533	320 „	NR
3534	320 „	
3535	359 „	
3536	438 „	
3537	359 „	26
3542	360 „	NR
3545	398 „	NR
3546	399 „	NR
3547	399 „	
3548	39 (XXXIII)	
3551	39 „	
3554	400 (XXXII)	
3557	438 „	
3562	440 „	NR
3563	440 „	
3565	479 „	
3571	480 „	
3572	480 „	NR
3573	480 „	NR
3574	480 „	
3579	40 (XXXIII)	
3584	79 „	
3588	80 „	NR
3589	80 „	
3556	119 „	
3593	119 „	
3597	120 „	
3598	120 „	28
3600	120 „	
3602	158 „	
3604	159 „	31
3607	159 „	
3608	159 „	NR
3610	160 „	
3613	278 „	
3619	199 „	338
3620	199 „	NR
3622	239 „	NR
3625	239 „	NR

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
3627	278 (XXXIII)	NR
3630	240 „	
3632	279 „	NR
3635	279 „	
3636	279 „	
3639	280 „	
3640	280 „	
3644	319 „	
3646	320 „	NR
3647	320 „	NR
3649	320 „	
3650	320 „	
3653	359 „	
3655	359 „	
3657	359 „	NR
3658	360 „	
3659	360 „	
3660	360 „	
3664	399 „	
3665	399 „	NR
3666	400 „	388
3668	400 „	
3669	400 „	64
3670	400 „	143
3675	439 „	
3676	439 „	267
3677	440 „	
3679	440 „	339
3681	478 „	NR
3682	479 „	NR
3684	479 „	NR
3685	479 „	103
3689	480 „	
3692	39 (XXXIV)	
3693	39 „	
3694	39 „	NR
3696	40 „	304
3697	40 „	
3698	40 „	181
3699	40 „	NR
3700	40 „	NR
3702	79 „	
3703	79 „	NR
3704	79 „	
3705	79 „	
3706	79 „	
3710	80 „	
3713	119 „	
3714	119 „	
3717	120 „	
3718	120 „	105
3720	120 „	NR
3722	159 „	144
3725	160 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
3727	160 (XXXIV)	
3728	160 „	
3730	160 „	
3732	199 „	
3733	199 (XXXV)	NR
3734	199 (XXXIV)	
3736	200 „	NR
3739	200 „	
3740	200 „	224
3747	240 „	
3749	240 „	
3750	240 „	67
3751	279 „	
3753	279 „	226
3755	279 „	
3758	280 „	
3759	280 „	229
3760	280 „	
3761	319 „	108
3762	319 „	
3763	319 „	
3764	319 „	
3765	320 „	
3766	320 „	
3768	320 „	
3770	320 „	
3772	359 „	
3774	78 (XXXV)	
3775	360 (XXXIV)	
3776	360 „	
3779	360 „	341
3780	360 „	NR
3782	399 „	
3783	399 „	307
3784	399 „	NR
3785	399 „	
3786	400 „	112
3787	400 „	
3790	400 „	
3792	439 „	
3793	439 „	NR
3797	78 (XXXV)	342
3798	440 (XXXIV)	
3799	440 „	NR
3802	479 „	
3804	479 „	NR
3805	479 „	309
3807	480 „	
3808	480 „	NR
3809	480 „	
3810	480 „	NR
3813	39 (XXXV)	183
3814	40 „	
3815	40 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
3817	40 (XXXV)	
3818	40 „	
3819	40 „	
3820	40 „	
3821	79 „	346
3823	79 „	
3824	79 „	
3826	79 „	
3827	80 „	
3828	80 „	
3829	80 „	NR
3832	119 „	
3833	119 „	
3835	120 „	NR
3836	120 „	NR
3837	120 „	
3838	120 „	68
3839	120 „	
3840	120 „	
3841	159 „	70
3842	159 „	185
3844	159 „	NR
3845	159 „	NR
3848	160 „	NR
3849	160 „	
3850	160 „	187
3853	199 „	NR
3854	199 „	
3855	199 „	
3856	200 „	
3857	200 „	
3858	200 „	149
3860	200 „	71
3862	239 „	188
3863	239 „	
3864	239 „	NR
3865	239 „	151
3867	240 „	
3868	240 „	230
3869	240 „	152
3870	240 „	NR
3872	279 „	
3873	279 „	
3874	279 „	
3875	279 „	
3876	279 „	
3877	280 „	351
3878	280 „	
3879	280 „	
3880	280 „	NR
3881	319 „	191
3882	319 „	
3883	319 „	
3884	319 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
3886	319 (XXXV)	310
3887	320 „	311
3888	320 „	
3889	320 „	
3890	320 „	193
3891	359 „	33
3892	359 „	466
3893	359 „	
3894	359 „	
3895	359 „	
3896	360 „	NR
3897	360 „	270
3898	360 (XXXV)	NR
3899	360 „	231
3900	360 „	
3901	398 „	232
3902	398 „	
3903	399 „	153
3904	399 „	75
3905	399 „	
3906	399 „	
3907	399 „	
3908	400 „	
3909	400 „	NR
3910	400 „	
3911	439 „	468
3912	439 „	391
3913	439 „	NR
3914	439 „	
3915	439 „	NR
3916	439 „	NR
3917	440 „	34
3918	440 „	35
3919	440 „	
3920	440 „	NR
3921	479 „	NR
3922	479 „	
3923	479 „	115
3924	479 „	NR
3925	480 „	
3926	480 „	
3927	480 „	273
3928	480 „	
3929	480 „	
3930	480 „	
3931	39 (XXXVI)	155
3932	39 „	
3933	39 „	NR
3934	39 „	
3935	39 „	
3936	39 „	
3937	40 „	
3938	40 „	
3939	40 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
3940	40 (XXXVI)	
3941	79 „	157
3942	79 „	420
3943	79 „	
3944	79 „	NR
3945	79 „	
3946	79 „	275
3947	80 „	197
3948	80 „	
3949	80 „	NR
3950	80 „	NR
3951	118 „	393
3952	118 „	
3953	119 „	395
3954	119 „	313
3955	119 „	353
3956	119 „	276
3957	119 „	234
3958	119 „	
3959	120 „	
3960	120 „	
3961	159 „	
3962	159 „	236
3963	159 „	315
3964	159 „	424
3965	159 „	
3966	159 „	425
3967	160 „	472
3968	160 „	
3969	160 „	
3970	160 „	430
3971	199 „	
3972	199 „	NR
3973	199 „	NR
3974	199 „	
3975	200 „	
3976	200 „	NR
3977	200 „	
3978	200 „	
3979	200 „	
3980	200 „	
3981	238 „	354
3982	238 „	431
3983	238 „	NR
3984	239 „	
3985	239 „	
3986	239 „	
3987	239 „	NR
3988	240 „	
3989	240 „	
3990	240 „	433
3991	279 „	396
3992	279 „	435
3993	279 „	473
3994	279 „	NR
3995	279 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost. Propusă [1])	Rezolvată [2])
3996	279 (XXXVI)	474
3997	280 „	
3998	280 „	437
3999	280 „	NR
4000	280 „	NR
4001	318 „	
4002	319 „	
4003	319 „	475
4004	319 „	477
4005	319 „	
4006	320 „	
4007	320 „	
4008	320 „	
4009	320 „	
4010	320 „	NR
4011	359 „	
4012	359 „	
4013	359 „	NR
4014	359 „	
4015	359 „	
4016	359 „	
4017	360 „	NR
4018	360 „	
4019	360 „	
4020	360 „	NR
4021	398 „	NR
4022	398 „	NR
4023	399 „	NR
4024	399 „	NR
4025	399 „	NR
4026	399 „	NR
4027	400 „	
4028	400 „	NR
4029	400 „	NR
4030	400 „	NR
4031	439 „	NR
4032	439 „	NR
4033	439 „	NR
4034	439 „	NR
4035	440 „	NR
4036	440 „	NR
4037	440 „	NR
4038	440 „	NR
4039	440 „	NR
4040	440 „	NR
4041	479 „	NR
4042	479 „	NR
4043	479 „	NR
4044	479 „	NR
4045	479 „	NR
4046	480 „	NR
4047	480 „	NR
4048	480 „	NR
4049	480 „	NR
4050	480 „	NR

I. EXERCIȚII [1])

Aritmetica. 1(36), 2(36), 3(37), 4(37), 5(37), 6(37), 7(37), 11(77), 12(77), 13(77), 17(117), 18(117), 19(118), 20(157), 21(157), 22(158), 23(158), 26(198), 27(198), 28(237), 35(316), 41(356), 42(356), 52(438), 53(438), 54(439),

Algebra. 24(158), 25(198), 29(238), 30(277), 32(278), 43(357), 44(357), 55(478).

Geometria. 14(77), 48(397).

Trigonometria. 8(37), 9(38), 10(38), 15(78), 16(78), 31(277), 33(278) 34(278) 36(317), 37(317), 38(317), 39(318), 40(318), 45(358), 46(358), 47(358), 49(397), 50(398), 51(398), 56(478).

J. TABLOUL NUMELOR

Abason E. 5, 6, 25, 42, 44, 45, 221, 259, 260, 295, 400, 417, 461.
Abramescu Mariana 275, 437, 473.
Abramescu N. 6, 139, 140, 149, 200, 216, 239, 280 295, 339, 351, 357, 405, 414, 450, 452.
Adamachi V. 177, 289, 295, 296, 334.
Agnew F. R. 100.
Alaci V. 6, 220, 385.
Al-Banna Jbn. 436, 476.
Albert A. A. 100, 176, 384,
Aldea N. 71, 73, 75, 152, 154, 157, 185, 198, 230, 231, 232, 235, 267, 275, 276, 277, 308, 312, 314, 315, 338, 341, 356, 391. 395, 397, 433, 436, 437, 455, 467, 473, 476, 477.
Alecsandri V. 290.
Alexandrescu I. 33, 112.
Alexiu I. 38, 152, 153, 221, 230, 231, 235, 279.
Aliman N. I. 71, 112, 120
Aliman I. V. 71.
Alliaume M. 219, 295, 333.
Altschiller-Court N. 333.
Ancona D'Dr. 218.
Andreescu C. 237.
Angelescu A. 5, 6, 17, 51, 80, 221, 338.
Angelescu Ilie 102.
Anghelescu V. A. 391.
Angheluță Th. 5, 6, 23, 24, 260, 324, 360.
Antonescu N. 152, 230.
Antoniu Eleonora 198, 230, 235, 275, 311, 314, 437, 473.
Antoniu S. I. 5, 6, 35, 76, 80, 119, 212, 235, 276, 277, 280.
Apostolescu G. A. 71, 158, 198.
Appel Paul 100, 141, 260.
Arbelon 112, 325, 327.
Archimede 121, 123, 325, 326.
Arghiriadi E 93, 94.
Aronszajn N. 384.
Atanasescu M. Maior 288.
Aubert 230, 265, 269.
Augustin St. R. 417.
Aurian E. 185.
Aurian I. 302.
Avram N. C. 71, 76, 153, 230, 274, 329, 356, 433, 474.
Avramescu C. 6, 416.
Ayres L. W. 176.

Babini J. 100, 384.
Bachman P. 303.
Bădescu B. A. 76, 230, 473.
Bădescu E. A. 34, 152, 154, 185, 232, 234, 315, 329, 356, 437.
Bădescu A. L. 6.
Bădescu R. 261, 296.
Bădulescu V. 221.
Baidaff Ig. B. 5, 55, 211, 260, 295, 461.
Balaban I. Gh. 104, 223, 338.
Ballan E. 221.
Banciu I. 6, 339.
Bandel R. 230.
Barbilian D. 5, 6, 79, 119, 159, 221, 240, 335, 385, 395, 396, 424, 425.
Barisien N. E. 126.
Basoco A. M. 333.
Baten E. 259.
Baten D. W. 333.
Beghin M. 261.
Bejan P. 417.
Beleș A. A. 25.
Beleș I. 6.
Bell C. 259.
Bell T. E. 55, 138, 217, 259, 333, 384.
Benton C. T. 259.
Bercu M. 152.
Berdan C. 262.
Berol A. H. 432.
Bertrand J. 416.
Bézout 139, 218.
Bidoianu I. A. 186.
Bioche Ch. 295, 461.
Bisshopp E. K. 333.
Blumberg H. 176, 217.
Bode 465.
Boerescu P. G. 71, 112, 186.
Boian C. I. 71, 112, 150, 152, 185, 230, 231, 234, 273, 308, 311, 341, 467.

1) Numerele din paranteză indică pagina, iar cel din afară numărul ce-l poartă exercițiul.

Bonnevie 140.
Borda 101.
Borel E. 99.
Borneanu G. 6, 221, 461.
Borş I. I. 152, 230.
Botea N. 359.
Bourlet C. 234, 330.
Bratu Gh. 5, 6.
Brelot M. 218.
Brener A. 5, 6.
Brezuică-Istinie I. C. 33, 339.
Brissot A. 366.
Browne T. E. 177.
Bruckner V. 6.
Bruvier L. 333.
Bucur P. I. 71, 308.
Bucurescu I. 338.
Budărescu Tr. 7.
Budeanu I. C. 7.
Buhl A. 260.
Buicliu Gh. Col 5, 7, 31, 32, 63, 64, 67, 70, 93, 120, 130, 178, 201, 203, 206, 229, 240, 281, 307, 310, 332, 337, 346, 351, 360, 388, 399, 411, 412, 449, 458, 466, 476, 480.
Bujoreanu N. 7.
Bulancea G. I. 71, 150, 152. 190, 193, 230.
Bulgăreanu C. 417.
Bumbulici P. 341.
Bunescu D. Al. 5, 7, 92, 324.
Bungescu I. 7.
Burchi C. L. 437.
Burichovici A. 182, 338.
Burlacu N. E. 33, 64, 67, 112, 338.
Buşilă Ad. 7.
Buşilă D. C. 7.
Buşilă I. 7, 16.
Buţan M. A. 198, 355, 394, 397, 423, 428, 432, 473, 474.

Cahen E. 461.
Cajori Fl. 141, 260.
Călin Gh. 223, 224.
Călinescu A. G. 396, 437, 477.
Călinescu S. 237.
Călugăreanu E. 55.
Cambureanu V. D. 7.
Cambureanu V. 7.
Capriel D. 7.
Capriel I. 7.
Capriel H. 15, 17.
Caquot 101.
Carafoli Elie 25, 260.
Caraman E. 7.
Carathéodory. 334.
Caravelli V. 291.
Cardan 22.
Carlitz L. 333.
Carmichael D. R. 55, 217.
Carnot 101.
Carpenter F. A. 100.
Cârstoiu D. I. 437, 473, 477.
Cartan E. 260, 335.
Cassian Gh. Maior 5, 7.
Caţichi M. E. 31, 338.
Cauchy 101.
Cazacu N. C. 7.
Cazanicli P. 289, 295, 334.
Chasles 101.
Chiricuţă A. 7.
Chiţu P. M. 34, 120, 150, 237, 274, 280, 316, 437, 473, 475.
Chiţulescu I. I. 7, 297, 303.
Choisy 101.
Cinsky C. 198, 237, 428, 431.
Cioc M. M. 7, 75, 231.
Ciocoiu A. Gh. 198, 237, 316, 433.
Ciorănescu C. 275.
Ciorănescu N. 7, 25, 79, 120, 160, 176, 200, 260, 275, 276, 279, 297, 320, 399, 430, 431, 439, 479.
Ciorăscu C. 221.
Claudian V. 177, 295, 334, 414.
Clenon Mac B. R. 333.
Cocea G. T. 39, 103, 119, 313.
Cohen W. L. 100.
Cojocaru V. I. 473, 474, 477.
Colfescu E. G. 71.
Comberousse Ch. de, 64, 207, 402, 404.
Constantinescu C. A. 198, 230, 231, 237, 276, 315, 393.
Constantinescu C. 437.
Constantinescu E. 291, 414.
Constantinescu G. 284.
Constantinescu N. I. 191, 260.
Constantinescu N. M. 71.
Constantinescu T. 7.
Conta V. 15.
Coşniţă C. 25, 40, 73, 74, 104, 105, 112, 152, 181, 200, 218, 224, 230, 232, 239, 262, 307, 310, 338, 341, 342, 345, 391, 400.
Coşniţă V. 267.
Costache N. N. 71.
Costăchescu V. C. 33, 338, 341.
Costinescu A. 290.
Costinescu D. 7.
Coy Mac H. N. 217.
Crăciunescu E. 229.
Craig H. V. 100.
Craiu N I. 33, 338.
Creţu D. M. 71, 186.
Cristeanu A. 472, 473, 477.
† Cristescu V. 52, 57, 125, 126, 130, 201, 206.
Crivăţ I. V. 34, 71, 75, 112, 120, 152, 153, 157, 159, 178, 186, 198, 230, 232, 234, 235, 237, 273, 275, 276, 277, 307, 308, 311, 313, 315, 320, 338, 341, 352, 353, 355, 436, 467, 473.
Cuciureanu Şt. 198, 235, 329, 353.
Cupşa-Cucerianul I. 76, 152.
Curchi I. 37, 119, 198, 234, 353.

Damian I. I. 31.
Dan C. 73, 152, 226, 230, 241, 338.
Dângă V. 80.
Dăscălescu S. H. 71, 72, 186, 231, 341.
Dassen C. C. 55, 100, 138, 333, 384.
Daus H. P. 333.
David E. 385.
Davidsohn M. 338.
Deac I. 76, 152, 160, 198, 230, 232, 235, 240, 277, 316, 400, 440, 477.
Deac T. 34.
Deaux R. 99, 177, 295, 333.
Dedekind 138.
Delgleize A. de W. 384.
Desargues 264, 323.
Dessart J. D-ra 177.
Diamond H. A. 384.
Dickson 55.

Dicu I. 473.
Dieudonné J. 99.
Dieulefait E. C. 260.
Dines L. L. 259.
Dinoci Fl. 112, 341.
Dinulescu I. N. 338, 391
Dirichlet 260, 333.
Dobrescu Şt. 279, 329, 353, 473.
Dobrogeanu A. N. 153, 198, 230, 232, 277, 356, 432, 473.
Dobromirescu P. 338.
Donciu N. 34, 68, 230, 232, 338, 359.
† Dordea A. Tr. 40, 57, 139, 216, 226, 304, 413.
Dorroh L. J. 177.
Drăgan I. C. 107, 306.
Drăguţ G. V. 152, 230, 341.
Dresden A. 55, 333.
Drincianu I. B. 341.
Droz-Farny 25, 82.
Dumitraşcu N. R. 35, 36, 153, 230, 231, 329, 353, 394, 474, 477.
Dumitrescu Arg. D. 8, 440
Dumitrescu I. E. 67, 182. 305.
Dumitrescu I. G. 5, 8.
Dumitru Sc. 341.

Eecke Ver Paul 123, 217, 333.
Einstein 25, 56, 260.
Emanoil S. I. 329.
Emch A. 100.
Engstrom T. H. 176.
Enriques Federigo 139.
Epuran A. I. 230, 355, 428, 432, 436, 473, 476, 477.
Errera A. 25.
Euclide 334
Eugeniu A. I. S.-Lt. 198
Euler 73, 79, 83, 100, 207, 246, 254, 255, 275, 314
Evans C. G. 259, 333, 461.

Fătu P. 100
Favard J. 260
Feenberg E. 176.
Felix C. 8.
Feodorof 288.
Fermat 32, 100, 101
Filipescu Em. Gh. 8, 25.
Florescu D. 475
Florescu B. I. 22, 39, 52, 95, 103, 142, 166, 167, 238, 253, 293, 301, 302, 304, 327, 329, 454, 455, 466, 480.
Florescu M. U. 223, 262, 385, 387, 400, 419.
Floricel N. 275.
Foca I 157, 238.
Foch 101.
Focşeneanu I M. Lt. 8, 53, 64, 217, 255, 258, 289, 400, 455.
Fonténe G. 292.
Fort T. 461.
Foster M. 100.
Fourier 177.
Francoeur 20.
Fredholm 42, 261, 324.
Froda A. 221, 385.
Fundăţeanu C. I. 8, 414.

Gabrielescu R. 8.
Gâlcă I. T. 8.
Galois 101.
Ganea A. 437.
Garnier R. 25, 177.
Gauss 217.
Gaustein 333.
Georgescu C. 39.
Georgescu G. D. 152, 230.
Georgescu-Piteşti D. 229.
Georgescu I. N. 8.
Georgescu N. 178.
Georgescu N. N. 8.
Georgescu-Roegen N. 8.
Gergonne 57, 58, 210, 242, 243, 244.
Germani D. 25, 221, 414, 461.
Germay H. J. R. 384
Gheorghe P. I. 71.
Gheorghe I N. 431.
Gheorghiu C. A. 49, 73, 107, 112, 182, 183, 224, 225, 226, 239, 307, 309, 338, 342, 395, 431, 440, 460.
Gheorghiu T. Gh. 40, 105, 144, 182, 183, 224, 304, 320, 338, 391, 480.
Gheorghiu-Gladiş T. Gh. 54, 107, 112, 185, 200, 223, 224, 229, 268, 308, 341.
Gheorghiu S. I. 8, 461.
Gheoghiu A. M. 8.
Gheorghiu A. S. 5, 8, 200, 248, 280.
Ghermănescu N. M. 5, 8, 23, 24, 160, 222, 223, 224, 230, 231, 261, 266, 267, 279, 294, 297, 319, 335, 359, 399, 410, 416, 440, 461, 465, 472, 473, 474, 477, 478, 480.
Ghica I. 290, 291.
Ghimuş A. D. Cpt. 8.
Ghiolu D. St. 416, 417.
Ghişoiu I. P. 31, 33, 34, 54, 68, 70, 71, 73, 76, 104, 112, 151, 152, 154, 157, 182, 184, 190, 193, 196, 198, 224, 226, 229, 230, 232, 235, 267, 273, 275, 277, 308, 311, 315, 338, 341, 353, 391, 393, 413, 428, 467, 473, 477.
Ghiţescu D. A. 71, 112, 152.
Ghiulea R. 30, 32, 338.
Ghiuţă V. G. 354, 437, 474 477.
Girard A. 86.
Gluşco N. 198, 356, 437.
Gob 361, 405.
Godeaux L. 295.
Godeaux R. 295.
Goormaghtigh R. 25, 58, 64, 82, 83, 93, 94, 120, 177, 217, 295, 361, 384, 402, 409.
Gospodin T. 353, 355, 430, 433.
Goursat E. 100, 324
Grabovski F. E 467, 468.
Graustein C. V. 100.
Graves M L. 217.
Grecu M. C. 71, 73, 312, 352.
Greenstreet J. W. 141.
Grigorescu C. 8.
Grigorescu E 414, 417, 462, 465.
Grossu I. M. 73, 230, 341
Grove G. V. 100.
Grubenmann Gr. 338.
Grünbaum M. 262, 444
Gualano V. E. 138.
Guran A. I. 198.
Gurău Almé 338.
Gutzu V. 8.

Hadamard J. 25, 55, 260.
Haim A. B 354.

Haim F. L. 118.
Halperin H. A. 71, 152, 157, 193, 230, 473, 477, 478.
Hammond P. H. 333.
Hanganu D. M. 9, 261, 461.
Haralamb P. E. 152, 185
Haret C. Spiru 14.
Hermite 161, 257, 258.
Heytmanek C. 152, 185, 230, 467.
Heywood B. 324.
Hildebrandt H. T. 55, 384, 461.
Hilton H. 259.
Hogaş Gh. 414.
Hollcroft R. T. 259, 333.
Hulubei T. 158.
Hutchinson I. J. 333.

Iacob S E. 312, 338.
Iancu H. D. 182.
Ianculescu R. 9.
Iliescu Gh. 5, 9.
Iliescu Tr. 9.
Ingraham H. M. 55, 176, 333, 461.
Ioachimescu G. A. 9, 32, 261, 332.
Ioachimescu A. G. 5, 9, 16.
Ioanovici A. 9.
Ionescu Bogdan 330.
Ionescu V. D. 9, 125, 160, 220, 292.
Ionescu A. E Slt. 198.
Ionescu-Biss P. H. 38, 70, 71, 73, 104, 112, 133, 151, 153, 154, 155, 157, 186, 193, 197, 229, 230, 231, 232, 235, 237, 274, 275, 276, 308, 310, 311, 312, 313, 316, 338, 341, 351, 355, 391, 436, 437, 467, 473, 476, 477, 478
Ionescu I. 5, 9, 17, 21, 25, 26, 33, 34, 39, 44, 51, 57, 79, 91, 101, 102, 103, 115, 117, 118, 139, 140, 141, 142, 153, 155, 156, 157, 159, 199, 212, 221, 222, 236, 238, 261, 275, 279, 291, 296, 302, 303, 319, 334, 360, 384, 388, 391, 393, 396, 398, 400, 410, 414, 440, 462, 465, 480.
Ionescu G. M. 429, 436, 467, 468, 474
Ionescu-Ţiu D. C. 71, 73, 112, 152, 184, 186, 226, 308, 338, 341.
Ionescu V. 185, 231.
Ionescu I. V. 154, 157, 231, 234, 235, 237, 277, 311, 315.

Jackson D. 217, 333.
Jacobi 384.
Jeba I. 31.
Jijie A. 9
Jones W. B. 177.
Jordan 260.
Jovmir T. 152, 230, 231.
Julia Gaston 55, 261, 334.

Karamata J. 260.
Kaufmann N. 9, 416, 417.
Kellog 333.
Kepler 465.
Kivovicz I. 417.
Kivovicz S. 417.
Kraitchik. 303.

Labérenne P. 139.
Lagrange 101, 173.
Lalanne 291.
Lalescu Tr. 385.
Lambert G. 25, 99.
Landau 89.
Langer E. R 384.
La Paz Lincoln 176.
Laplace 101, 259.
Lasley W. J. 333.
Laurent H. 163.
Lebesgue H. 55, 99, 163.
Legendre 20, 21, 257.
Lehmer H. D. 217.
Lemoine P. M. 19, 20, 209, 210, 211, 242, 243, 345, 443.
Lencó I. 198.
Lewicky W. 139.
Libois P. 177, 217
Lichiardopol-Bura A. M. 315, 428.
Lindelöf 334.
Linteş I. Cpt. 5, 9, 26, 48, 68, 79, 119, 139, 143, 144, 149, 168, 190, 193, 196, 240, 259, 260, 270, 273, 275, 280, 320, 330, 351, 352, 353, 354, 376, 399, 420, 423, 433, 435, 439, 456, 474.
Liteanu G. Col. 5, 9, 54, 75, 80, 92, 133, 153, 197, 289, 339, 342.
Longhini P. 218.
Lucas E. 69.
Lucescu Gh. 414.
Lupescu Gh. C. 71, 151, 153, 230, 231, 232, 329, 341, 353, 391, 394, 428, 432, 474.
Lusin N. 99, 260.

Macdonnell J. 100.
Mac-Laurin 43, 45, 93, 266.
Macoschi I. 474.
Maevschi I. 356.
Malcoci C. 9.
Maleyx 43, 45.
Malthus 218.
Manicatide Al. 140, 149, 351, 357.
Mannheim A. 216, 217, 339, 450.
Manoilescu M. 9.
Marcelino S. 417, 462, 463, 464.
Marchand A. 260.
Marchetti A. A. 218.
Marcovici H. 266.
Marcu T. 119.
Mareş E. 230.
Mareş Gr. 338.
Mareş N. 237.
Mareş T. 5, 10.
Mărgărit A. Faţe 152, 154, 156, 157, 199, 231, 473.
Mărgineanu I 99.
Marin I. I. 432.
Mărinaş B. M. 339.
Marinescu M. 295.
Marinescu St. T. 71.
Mariniuk R. I. 152.
Mateescu Cr. 5, 10, 221, 260.
Măţieş V. I. 37, 132, 180, 188, 198, 224, 225, 279, 319, 339, 341, 413, 435, 475.
Matot J. 330.
Mayer O 416.
Mazurkiewicz 384.
Melas P. 417.
Menasse M. 417.
Mendel B. 151, 230, 231, 234.
Menelaus 344, 424.

Mereuţă E. 34, 68, 71, 73, 76, 151, 152, 157, 193, 198, 230, 231, 234, 235, 277, 313, 315, 330, 353, 355, 394, 398, 433, 437, 467, 473, 477.
Mereuţă V. 10.
Meytelon 52.
Michal D. A. 100, 333.
Michel Ch. 461.
Mihăescu A. 472, 473.
Mihai G. 338.
Mihăileanu N. N. 156, 157, 198, 235, 237, 273, 315, 318, 319, 329, 353, 356, 394, 397, 423, 428, 429, 433, 436, 437, 438, 473, 474, 476, 477.
Mihăilescu V. Lt.-Col. 280.
Mihăilescu P. T. 10.
Mihalcea I. E. 307, 341
Mihalopol C. 10.
Mihoc G. 221, 261.
Militaru G. D. 152, 230.
Miller A. G. 384.
Milloux H. 260.
Mineur Ad. 17, 83.
Minkovski. 57.
Mircea M. E. 10.
Mircea D. M. 467.
Mirea N. Şt. 10, 414. 415, 417, 462, 463, 464, 465
Mirescu Lygia. 435, 476.
Mischimen Şt. D. 71, 186.
Mitescu C. 10, 385.
Mititelu C. Cl. 5. 10.
Mititelu C. I. 10.
Mladin I. G. 71, 186.
Moise D. 355.
Moisil C. Gr. 25, 141.
Molina C. E. 259.
Monge. 101.
Montel P. 55.
Montero Bustamante F. 385.
Moody I. 437.
Moore N. C. 384.
Moore L. R. 384.
Motoc D. M. 71, 152, 157, 186, 198, 234, 353, 357, 456.
Murăroiu I. 55, 71, 150, 185, 307, 339, 352, 480.
Murray H. F. 384.

Naforniţă C. 230, 432, 474, 477.
Naforniţă I. G. 157, 355.
Nagel. 57, 58, 62.
Napoleon. 101.
Negrea A. M. L. 34, 73, 76, 112, 153, 224, 230, 231, 235, 276, 339, 341, 428, 430, 473, 477.
Negrescu T. 461.
Negretzu I. 10.
Negulescu A. C-dor. 178.
Negură St. 10.
Nestorescu V. Cpt. 288, 289.
Neuberg J. 82, 241, 254, 292, 361, 409.
Newton 56, 216, 450, 453.
Nichifor A. G. 5, 10, 92.
Nicolau H. C. 5, 10, 223, 316, 444.
Nicolau H. D. 71.
Nicolau-Dobidor C. I. 309
Nicolau M. 159, 460.
Nicolau T. M. 10
Niculescu A. 159, 163, 320. 425, 429, 433.
Niculescu Cr. 10, 398.
Niculescu Gh. Cpt 10, 28, 31. 287, 311, 313, 314, 319, 350, 370, 437, 438, 440, 468. 472, 477.
Niculescu M. 10, 238, 414, 431, 432, 439, 479.
Niels H. A. 177.
Nisoli M. 99
Novacu N. 269

Ocagne D' M. 93, 101, 139, 401, 402.
Olteanu Şt. 353, 354, 431
Onicescu O. 10, 261, 385.
Onizabă P. N. 339, 391.
Oprescu Gh. Col. 11, 71, 72, 150, 152, 157, 198.
Orănescu O. 5, 11.
Orăscu A. 291.
Orăşanu D. C 5, 11.
Orăşanu Gr. 11.
Osgood F. W. 259, 461.
Ottulescu E. 11.

Painlevé P. 55, 56.
Paliţa C. 198, 277, 353
Pall G. 384.
Paloşanu N. Lt. 288.
Pană-Deleanu Al. 152, 230.
Panaitescu Sc. G-l. 11, 289.
Pantazi Al. 5, 11, 178, 185, 385, 414, 416, 417
Papa Grigorie III. 179.
Papelier 230, 265, 269.
Parepeanu C. I 71, 75, 76, 77, 151, 152, 198, 230, 231, 234, 235, 237, 276, 277, 310, 312, 315, 329, 341, 353, 355, 394, 429. 433, 436, 437, 456, 467, 473, 474, 476, 477, 478,
Pârvu A. 391.
Pascal. 63, 64, 101, 418, 419, 420.
Pascu R. 339.
Păşcanu S 11.
Patraulea N. 477.
Patraulea N. R. 157, 198, 437, 473, 474, 477.
Patriciu G. T. 11.
Paulid D. D. 21
Păun M. G. 34, 71, 74, 112, 230, 232.
Păun A. N. 308.
Pavel N. 30.
Perrine D. C. 461.
Petralia St. 461.
Petrescu-Tiberiu N. 385.
Petrică I. I. 71, 231.
Petrovanu D. 476.
Petrowich M. 260.
Philipide M. 11.
Picard E. 101. 260, 296.
Pierce A. T. 384.
Pillado J. S. 385.
Pitiş G. 414.
Platvier Gh. 55, 56, 57.
Poincaré H. 220.
Poisson. 335.
Pompeanu I. 237.
Pompeiu D. 25, 125, 141, 221, 259, 260, 292, 461.
Pancelet 101, 335.
Pop G. D. 20.
Popa I. 264, 266.
Popa G. I. 34, 71, 78, 112, 119, 141, 156, 190, 193, 230, 232, 276, 329, 338, 339, 341, 351, 391, 431, 467, 468.
Popa Z. N. 237, 437.
Popescu C. 230.
Popescu M. D. 71
Popescu N. C. 34, 37, 39, 73, 112, 150, 152, 339.
Popescu P. E. 338.
Popescu Gh. 11, 264.
Popescu I. 11.

Popescu-Stăneşti I. M. 428, 474, 477.
Popescu D. N. 341, 478.
Popescu R. Lt. 288.
Popescu C. V. 26, 40, 69, 71, 120, 168, 196, 214, 377, 480
Popovici C. C. 64, 135.
Popovici I. 338, 339.
Popoviciu T. 11, 90, 259, 260, 408, 416.
Popp I. 289, 290, 295.
Popp Tr. 11.
Portocală M. 11.
Potopeanu Gh. Lt.-Col. 11, 199, 235, 329.
Protopopescu Gr. Col. 12.
Proca A. 25, 260, 416.
Ptolomeu. 76, 83, 85, 153.
Purdilă I. A. 152, 230.
Puta Tr. 198, 235, 275, 276, 314, 395, 436, 473.
Putnam G. R. 176.
Putnam M. T. 55, 333, 461.

Quevedo Torres. 101.

Racliş Rod. 5, 12, 102, 141, 221.
Radev A. 58.
Radoveneanu N. N. 71, 112, 151, 186.
Radu E. M. 12.
Radu Fl. S. Lt. 157, 198.
Raicu C. A. 71, 112.
Ramanujan 55.
Râmniceanu I. Cr. 33, 71, 112, 153, 230, 307, 309, 339, 341.
Răşcanu I. R. 71, 152, 153, 230.
Raţiu V. M. 339.
Raynor E. G. 217.
Rentea G. N. 71.
Revici T. 12.
Rey Pastor J. 100, 384.
Riccati 173, 257, 258.
Richardson D. G. R. 138.
Roberts H. J. 217.
Roco M. 12.
Rolle 169.
Roos F. C. 461.
Rosebblatt A. 100.
Roşca St. G. 355, 432, 437, 473, 474, 477.
Roşianu D. G. 416.
Roşu A. A. 330, 334, 335, 337, 358, 359, 391, 438, 478.
Roşu V. 12.
Rouché E. 64, 207, 402, 404.
Rovacu V. 185.
Rowe H. C. 177.
Rozopol Zoe. 230.
Russe N. C. 71.
Rusu D. C. 237, 315, 394, 433, 436, 437, 473, 474.
Russu E. 29, 31.

Sachelaride I. 473.
Sălăgeanu A. 5, 12.
Saligny A. 16, 92.
Saligny M. 12.
Salinon. 326, 327.
Sallovitz A. 218.
Sâmbotin G. 71, 72, 152, 230.
Sandu I. 477.
Săpunaru S. G. 12.
Sarian M. 5, 12.
Saulea N. E. 31, 339.
Săvescu P. V. 72.
Savin Ar. 339.
Savin C. I. 72, 78, 108, 117, 144, 154, 186, 275, 308, 310, 339, 341.
Schwartz. 297.
Séjourné. 101.
Sergescu B. 12.
Sergescu P. 12, 187, 221, 296, 324, 385, 416.
Servais Cl. 99, 177, 217, 295, 333.
Serret P. 401.
Sfinţescu C. 12.
Sierpinski W. 99, 260.
Simionescu I. 297.
Simson. 39, 41, 81, 82, 83, 119, 139, 177, 207, 208, 209, 254, 255, 278, 313, 314, 408.
Smântânescu A. 12.
Smiley G. W. Jr. 259.
Smith A. P. 100.
Snyder V. 333.
Sonnenreich Dora. 339.
Sparn E. 211, 212, 218.
Sprinceană C. G. 104, 339.
Stamatescu I. 12.
Stan I. A. Slt. 230, 232, 235, 275, 276, 277, 278, 311, 312, 314, 337, 339, 353, 391, 428, 431, 437 467, 473.
Stan C. 31.
Stan D. 12.
Stan N. Argeşeanul. 152, 230.
Stănescu M. C. 71.
Starcker W. G. 100.
Stavrat G. M. 73, 317, 398.
Stieltjies 163.
Stierling. 30.
Stoica D. A. 393, 394, 396, 432, 436.
Struik J. D. 217, 333.
Sturm. 169.
Sudan G. 221.
Sullă P. 278, 437.
Swingle M. P. 384.
Şerban I. C. 157.
Şerban-Ulmeni D. 34, 39, 71, 77, 112, 152, 153, 186, 338, 467.
Şerban I. 437.
Şerban C. Iov. 428, 473.

Şerbănescu V. N. Fl. 198, 235, 275, 395.
Şerbănescu G. V. 12.
Şerbu C. 473.
Şova C. I. 71, 152, 230, 234, 474, 477.
Ştefănescu-Goangă A. 152, 230.
Ştefănescu I. C. 71.
Ştefănescu E. 411.
Ştirbei Barbu. 414.
Şuţu Niculachi, 290.
Şuţu Alecu Vodă. 290.

Tănăsescu A. Col. 13.
Tănăsescu G. Lt.-Col. 15. 92.
Tănăsescu A. T. 13.
Tănăsescu T. 260.
Tannery J. 330.
Taylor. 25, 207, 208, 209, 211, 260.
Tchebycheff. 44, 45.
Teodor N. P. 71, 104, 117, 151, 338, 339, 341.
Teodoreanu V. 13.
Teodorescu C. 260.
† Teodorescu S. I. 385.
Teodorescu N. 211, 267.
Teodorescu N. N. 13.
Teodoriu L. 25, 141, 297.

Teodoru D. R. 13.
Thébault V. 20, 39, 53, 82, 86, 99, 118, 123, 139, 177, 213, 244, 292, 295, 323, 327, 364, 409, 443, 479.
Thierrin H. G. 13.
Timotin A. 416.
Toporescu Er. 25, 461.
Trofimov P. 183.
Truţescu Stefania 437, 477.
Tschlek J. 139, 218.
Tucker 211, 345.
Tulea C. G. 416.
Tummers 295.
Ţilenschi M. S. 224, 307.
Ţiucra M. 71, 153, 230, 431.
Ţino N. O. 5, 13, 79, 105, 107, 114, 148, 200, 221, 479.
Ţiţeica G. 5, 13, 16, 114, 141, 159, 218, 221, 256, 335, 429.
Ţiţeica Gabriela 13.

Ulescu A 13
Un anonim 152.
Un alt anonim 153.
Ungheanu G. M. 26, 36, 71, 77, 112, 120, 186, 230, 351.
Urechia A. V. 291.
Uschersohn H. 33.
Uspenscky V. J. 177.

Vaidynathaswamy R. 177.
Vâlceanu N. J. 104, 105, 107, 112, 182, 183, 306, 308, 339, 391.
Vâlcovici V. 25, 101, 221, 261, 297.
Valiron G. 260.
Vandermonde. 51, 406.
Vardala I. 13.
Varlam M. P. 428, 473, 477, 478.
Vârlan C. 237.
Vasilache I. 13.
Vasilescu Fl. 13, 221.
Vasilescu Gr. 13.
Vasilescu C. I. 13.
Vasilescu N. P. 79, 158.
Vasilescu-Karpen N. 384.
Vasiliu C. I. 63, 64, 222, 278, 317.
Vasiliu M. 13.
Vasu V. 152, 198, 230, 235, 275, 276, 311, 314, 315, 355, 395, 428, 436, 437, 467, 473
Veisberg R. 417.
Velea M. 34, 68, 71, 73, 117, 150, 152, 154, 185, 187, 190, 198, 200, 230, 232, 234, 235, 237, 275, 276, 310, 315, 318, 352, 353, 423, 428, 429, 430, 433, 436, 456, 467, 474.
Velicescu N. N. 152, 157, 182, 185, 198, 230, 231, 273, 306, 308, 310, 311, 313, 317, 339, 341, 353, 355, 358, 436, 467, 473.
Velicescu-Muscel N. 397.
Velicescu G. T. 157, 198, 230, 231, 234, 235, 275, 276, 277, 339, 341, 353.
Venant St. 56.
Verne Jules. 101.
Viete. 101.
Vignaux C. I. 295 461.
Visarion C. I. V. 435, 473, 474, 477.
Vlădescu A. Maior. 288.
Vogel. 333.
Voicu C. I. 71, 77, 112, 186.
Voicu G. N. 71, 112.
Voltera V. 218.
Vrânceanu Gh. 178.
Vuibert H. 100, 139, 177, 218, 260, 295, 333, 338, 384, 414, 461.

Wassermann I. 33.
Watanabe Y. 405.
Wauters Ch. 55.
Wedderburn 384.
Whyburn T. G. 100.
Whyburn M. W. 217.
Widder V. D. 117.
Wilder R. L. 384.
Wilson A. W. 384.
Wilton R. J. 55.
Williams R. A. 177.
Wong C. B. 100, 176, 177.

Ypsilante Alexandru. 291.

Zaharia O. I. 182, 339.
Zaharia O. L. 338.
Zaharia O. N. 73, 107, 152, 182, 183, 230, 231, 260, 307, 308, 346, 439.
Zaharia O. R. 334.
Zamfirescu C. Gr. 13, 416.
Zamfirescu O. Gh. 71, 74, 112.
Zamfirescu Gh. I. Slt. 154, 157, 275, 313, 316, 339, 359, 423, 424, 428, 437, 440, 473, 477, 478.
Zane D. N. 437.
Zapan Gh. 13.
Zapan Gr. 13.
Zarda I. 353, 355, 395, 428. 430, 473.
Zariski O. 55.
Ziffin L. 384.
Zitti A. C. 153, 230.
Zlatcu St. C. 13.

K. UVRAJE CITATE.

Pag.

Gazeta Matematică. 14, 15, 16, 17, 23, 32, 39, 44, 51, 52, 54, 56, 63, 64 70, 71, 82, 91, 92, 93, 94, 114, 126, 130, 133, 150, 155 161, 189, 198, 201, 208, 211, 229, 231, 238, 254, 256 259, 281, 292, 293, 297, 303, 304, 317, 319, 327, 330 331, 332, 334, 338, 339, 352, 358, 370, 385, 409, 411 431, 432, 444, 450, 455, 458, 460, 476
Mathesis. 17, 25, 82, 83, 99, 121, 177, 217, 241, 292, 295, 333 361, 384, 408, 443
Nouvelles Annales de Mathématiques 20, 93, 241, 242
Bulletin de mathématiques et de phisique pures et appliquées de l'Ecole Polytechnique de Bucarest 25, 259, 461

Pag.

Revista matematică din Timişoara 25, 32, 55, 99, 139, 177, 218, 260, 295 334, 385, 414

N. Ciorănescu. Curs elementar de algebră superioară 25

Réné Garnier. Cours de mathématiques générales. (Analyse Géométrie) 25, 177

J. Hadamard. Cours d'Analyse, professé à l'École Polytechnique. 25

E. Abason. L'étude d'une classe de polynomes et de la correspondance entre les problemes bilocaux pour les équations différentielles et les équations intégrales Fredholm 42

E. Abason. Sur le théorème des accroissements finis. . 42, 260

Mathematica 43, 260

E. Abason. Sur la quadrature des fonctions paraboliques . . 44

Bulletin of the American Mathematical Society 55, 100, 138, 176, 217, 259 333, 384, 461

Anales dela Sociedad cientifica Argentina 55, 100, 138, 218, 260, 295, 333, 384, 461

Boletin Matematico . . . 55, 139, 211, 215, 218, 260, 295, 334, 385, 412, 461

Boletin Matematico Elemental 55

Revista universitară matematică 55, 96

Paul Painlevé et Ch. Platvier. Cours de mécanique de l'École Polytechnique . . 55

E. Rouché et Ch. de Comberousse. Géométrie 64

Edouard Lucas. Théorie des nombres 69

F. J. C. Elèments de Trigonométrie 73

Aubert et *Papelier.* Exercices d'Algèbre, d'Analyse et de Trigonométrie 73 230, 265, 269

V. Thébault. Sur un théorème de Droz-Farny 82

Cl. Servais. Sur la géomètrie du tétraèdre 99

Nicolas Lusin. Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications. 99

Universidad National de la Plata 100, 218

Journal des Mathématiques Elementaires. 100, 139, 177, 218, 260, 295, 333 384, 414, 461

A. Rosebblatt. Sur certains mouvements stationnaires plans des liquides visqueux incompressibles 100

J. Babini Sobre los ceros de las funciones ciclicas . . . 100

„ „ Representacion de las funciones ciclicas de terce orden 100

Paul Appel et *Edouard Goursat* Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales 100

Maurice D'Ocagne. Hommes et choses de science. Propos familiers. 101

Victor Vâlcovici. Şcoala Politechnică din Timişoara. Zece ani de existenţă 101

Rodolphe Racliş. Solution principale de l'équation linéaire aux differences finies. 102

Acta Mathematica 102

American Mathematical Society 102

Education mathématique. 121

Paul Ver Eecke. Oeuvres complètes d'Archimède. 123

Federigo Enriques. Leçons de Géométrie projective 139

N. Abramescu. Lecţiuni de geometrie pură infinitezimală 139, 339, 450

„ „ Lecţiuni de trigonometrie plană pt. cl. VI. . . . 140

„ „ Lecţiuni elementare de astronomie 140

Al. Manicatide. Curs complimentar de algebră 140

Al. Manicatide şi N. Abramescu Algebră pentru cl. V reală 149, 351

		Pag.
Journal des Mathématiques spéciales		163
Annales de Toulouse		163
Bulletin de la sectinon scientifique de l'Académie Roumanie		176, 295
Revista ştiinţifică „V. Adamachi".		177, 289, 295, 461
Culegere de probleme.		201, 203, 204, 205
E. Rouchè et *Ch. de Comberousse.*	Géométrie du triangle	207
V. Thébault.	Curiosités arithmetiques	213
Vito Volterra.	Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie	218
Montessus de Ballore.	Probabilités et statistiques	219
Valeriu Alaci.	Géométrie analitique des polygones et des polièdres convexes	220
D. V. Ionescu.	Memorii de titluri şi lucrări	220
Intermédiaire des Mathématiciens		259
E. Abason.	Sur la moyenne des fonctions paraboliques	260
Căpitan Ion Linteş.	Construcţii de avioane	260
Beghin et G. Julia.	Exercices de Mécanique	261
M. Marinescu.	Sur un nouveau microphone à charbon	295
N. Abramescu.	Nouvelle méthode pour l'étude des regions de convergence des séries de polynomes orthogonaux	295
N. Abramescu.	Les séries de polynomes a deux variables complexes	295
P. Sergescu.	E. Picard. Cu prilejul sărbătoririi jubileului său la 5 Maiu 1928	296
P. Sergescu.	Le premier Congres des Mathématiciens roumains	296
„ „	Sur les zéros des polynomes	296
„ „	L'Evolution des principes de la mécanique de Newton à Laplace	296
P. Sergescu.	Evoluţia concepţiei despre Univers	296
„ „	O excursie în Algeria şi Maroc cu prilejul centenarului Algeriei	296
Radu Badesco.	Singularités des solutions d'une classe d'équations integrales	296
Radu Badesco.	Sur une équation fonctionelle	296
Comptes rendus de l'Académie de science de Paris		324
E. Goursat.	Cours d'Analyse	324
Carlo Bourlet.	Leçons d'Algèbre élémentaire	330
Jules Tannery.	Leçons d'Arithmétique	330
P. Cazanacli.	Ioan Popp. Primul profesor de Geometrie analitică la Universitatea din Iaşi	334
Gaston Julia.	Leçons sur la représentation conforme des aires simplement connexes	334
J Babini.	Sobre el comportamento de las funciones theta de Jacobi de argumento nulo en el contorno del circolo de convergencia	384
Şcoala Politehnică din Bucureşti.	Aniversarea a 75 ani de învăţământ tehnic în România, de 50 ani dela reorganizarea Şcoalei naţionale de poduri şi şosele, 10 ani dela înfiinţarea Şcoalei Politehnice	384
Şcoala Politehnică „Regele Carol II".	Lucrările personalului didactic expuse cu ocaziunea serbării dela 7 Maiu 1931	384
Bulletin Mathématique de la Société Roumaine de Sciences		385
Paul Serret.	Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure	401
N. Abramescu.	Le mouvement d'une figure plane variable avec conservation de similitude	414
Curierul Matematic		450, 454
E. Cahen et Ch. Michel.	Leçons élémentaires sur le calcul numériques	461
Ibn al-Banna.	Talkhys amali al Kissab	476

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAŢIA SIBIU

BOLETIN MATEMATICO

FUNDAT ÎN ANUL 1928. — ABONAMENT ANUAL: 400 LEI

BOLETIN MATEMATICO ELEMENTAL

FUNDAT ÎN ANUL 1930. — ABONAMENT ANUAL: 125 LEI

Director: Dr. B. I. BAIDAFF

SUNT CELE MAI IMPORTANTE PUBLICAȚIUNI PERIODICE MATEMATICE DIN AMERICA DE SUD

SE PRIMESC ABONAMENTE PENTRU ANUL AL IV (IAN. — DEC. 1931)

ABONAMENTELE ȘI CORESPONDENȚA SE VOR TRIMITE LA ADRESA:

BOLETIN MATEMATICO, Belgrano 975, Buenos-Aires, Rep. Argentina.

Dela Ianuarie 1928 până în Octomvrie 1930 s'au publicat articole și note dela Domnii:

F. Anguita, B. I. Baidaff, F. Cernuschi, Ci. C. Dassen, A. Garrigos și **J. Tschlek,** Buenos-Aires (Rep. Argentina), **J. Hartmann,** La Plata (Rep. Argentina), **C. Dieulefait** și **E. Natale,** Rosario (Rep. Argentina), **O. Márquez,** Salta (Rep. Argentina), **M. A. Basoco** și **E. T. Bell,** Pasadena (California), **M. Krawtchouk** și **N. Kryloff,** Chiev (U. R. S. S.), **J. Gonzalez Perera, S. José** (Uruguay), **B. Jekhowsky,** Bordo (Francia), **W. Lewitzky,** Lemberg (Polonia), **O. J. Ramler,** Washington (Statele Unite) **J. Shohat,** Ann Arbor (Statele Unite), **D. M. J. Sommerville,** Wellington (N. Zelandia), **V. Thébault,** Le Mans (Francia), **O. Szász,** Frankfurt a. M. (Alemania), **G. Vivanti,** Milano (Italia), **J. R. Wilton,** Adelaida (Sud Australia).

Articolele, notele şi problemele însemnate cu * se referă la matematicile elementare (cursul de liceu).

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Aldea N. N. (3697); *Avram N. C.* (4029); *Bădescu Em. A.* (4018, 29); *Curchi I.* (P); *Ionescu-Biss P. H.* (3697, 710, 58); *Ionescu D. C.-Ţiu Sublt.* (3988, 95, 4001, 29); *Ionescu P. H.* (4001, N); *Mihăileanu N. N.* (4026, 38, A. P): *Motoc D. M.* (3818, 39, 928, 68, 95); *Naforniţă I. C.* (4008); *Negrea A. Mircea Leonte* (3968, 4038); *Panaite N. T. Sublt.* (3968, 95); *Şova C. I.* (3995, P); *Stavrat Gh. M.* (P); *Varlam M. P.* (4001, 18); *Zamfirescu G. I. Sublt.* (4026).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipì sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac deasemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani complețî broșați cu prețul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX și XXI care se vând cu prețul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV și XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu** și **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecțiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția IV revăzută și adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu** și **G. Țițeica,** *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu** și **Șt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediția II revăzută și adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicațiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediția III-a revăzută și îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu** și **G. Țițeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Țițeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* (Ediția II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din bibiioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Regiei Publice Comerciale «Monitorul Oficial și Imprimeriile Statului», B-dul Elisabeta 29, București I.

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călușei 23, București 4.